

2010年普通高等学校招生全国统一考试江苏卷数学全解全析

数学 I 试题

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

- 1.本试卷共4页，包含填空题（第1题——第14题）、解答题（第15题——第20题）。本卷满分160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将本卷和答题卡一并交回。
- 2.答题前，请您务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
- 3.请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。
- 4.请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效。作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔。请注意字体工整，笔迹清楚。
- 5.如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。
- 6.请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损。

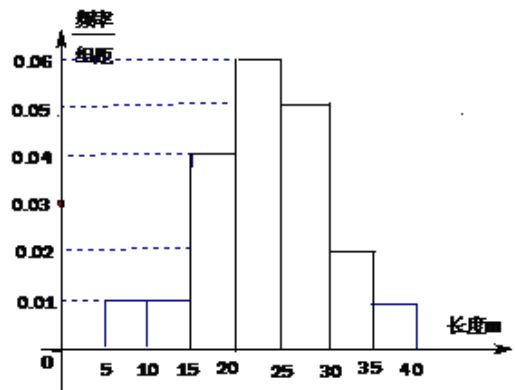
参考公式：

锥体的体积公式： $V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh$ ，其中S是锥体的底面积，h是高。

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分。请把答案填写在答题卡相应的位置上。

- 1、设集合 $A = \{-1, 1, 3\}$ ， $B = \{a+2, a^2+4\}$ ， $A \cap B = \{3\}$ ，则实数 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。
- 2、设复数 z 满足 $z(2-3i) = 6+4i$ （其中 i 为虚数单位），则 z 的模为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。
- 3、盒子中有大小相同的3只白球，1只黑球，若从中随机地摸出两只球，两只球颜色不同的概率是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

4、某棉纺厂为了了解一批棉花的质量，从中随机抽取了100根棉花纤维的长度（棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标），所得数据都在区间 $[5, 40]$ 中，其频率分布直方图如图所示，则其抽样的100根中，有 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 根在棉花纤维的长度小于20mm。

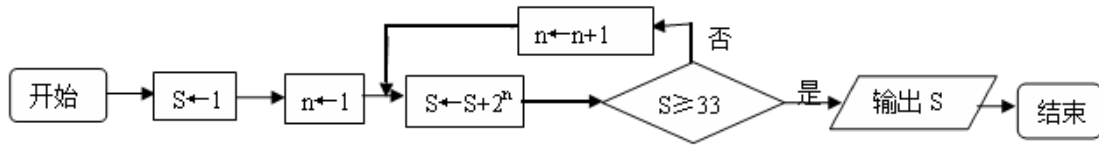


5、设函数 $f(x) = x(e^x + ae^{-x})$ ($x \in \mathbb{R}$) 是偶函数，则实数 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

6、在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 上一点M，点M的横坐标是3，则M到双

曲线右焦点的距离是 ▲

7、右图是一个算法的流程图，则输出S的值是 ▲



8、函数 $y=x^2(x>0)$ 的图像在点 (a_k, a_k^2) 处的切线与x轴交点的横坐标为 a_{k+1}, k 为正整数， $a_1=16$ ，则 $a_1+a_3+a_5=$ ▲

9、在平面直角坐标系xOy中，已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有且仅有四个点到直线 $12x - 5y + c = 0$ 的距离为1，则实数c的取值范围是 ▲

10、定义在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $y=6\cos x$ 的图像与 $y=5\tan x$ 的图像的交点为P，过点P作 $PP_1 \perp x$ 轴于点 P_1 ，直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图像交于点 P_2 ，则线段 P_1P_2 的长为 ▲。

11、已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ，则满足不等式 $f(1-x^2) > f(2x)$ 的x的范围是 ▲。

12、设实数x,y满足 $3 \leq xy^2 \leq 8, 4 \leq \frac{x^2}{y} \leq 9$ ，则 $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值是 ▲。

13、在锐角三角形ABC，A、B、C的对边分别为a、b、c， $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 6 \cos C$ ，则 $\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B} =$ ▲。

14、将边长为1m正三角形薄片，沿一条平行于底边的直线剪成两块，其中一块是梯形，记 $S = \frac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$ ，则S的最小值是 ▲。

二、解答题：本大题共6小题，共计90分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明或演算步骤。

15、（本小题满分14分）

在平面直角坐标系xOy中，点A(-1,-2)、B(2,3)、C(-2,-1)。

(1)求以线段AB、AC为邻边的平行四边形两条对角线的长；

(2) 设实数 t 满足 $(\vec{AB} - t\vec{OC}) \cdot \vec{OC} = 0$, 求 t 的值。

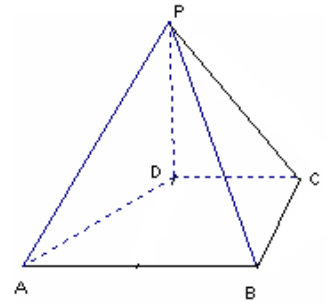
16、(本小题满分14分)

如图, 在四棱锥 $P-$

$ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD=DC=BC=1$, $AB=2$, $AB \parallel DC$, $\angle BCD=90^\circ$ 。

(1) 求证: $PC \perp BC$;

(2) 求点 A 到平面 PBC 的距离。



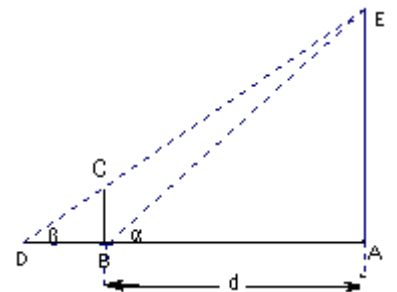
17、(本小题满分14分)

某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位: m), 如示意图, 垂直放置的标杆 BC 的高度 $h=4$ m , 仰角 $\angle ABE = \alpha$, $\angle ADE = \beta$ 。

(1) 该小组已经测得一组 α 、 β 的值, $\tan \alpha = 1.24$, $\tan \beta = 1.20$, 请据此算出 H 的值;

(2) 该小组分析若干测得的数据后, 认为适当调整标杆到电视塔的距离 d

(单位: m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提高测量精确度。若电视塔的实际高度为 $125m$, 试问 d 为多少时, $\alpha - \beta$ 最大?



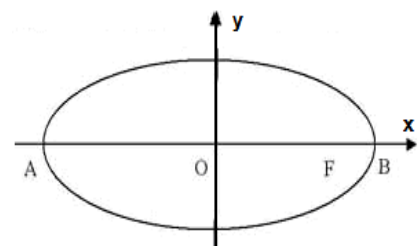
18、(本小题满分16分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右顶点为 A 、 B , 右焦点为

F 。设过点 $T(t, m)$ 的直线 TA 、 TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$, 其中 $m > 0$,

$y_1 > 0, y_2 < 0$ 。

(1) 设动点 P 满足 $PF^2 - PB^2 = 4$, 求点 P 的轨迹;



(2) 设 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}$, 求点T的坐标;

(3) 设 $t = 9$, 求证: 直线MN必过x轴上的一定点 (其坐标与m无关)。

19、(本小题满分16分)

设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n , 已知 $2a_2 = a_1 + a_3$, 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 d 的等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (用 n, d 表示);

(2) 设 c 为实数, 对满足 $m + n = 3k$ 且 $m \neq n$ 的任意正整数 m, n, k , 不等式

$S_m + S_n > cS_k$ 都成立。求证: c 的最大值为 $\frac{9}{2}$ 。

20、(本小题满分16分)

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(1, +\infty)$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$ 。如果存在实数 a 和函数 $h(x)$, 其中 $h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) > 0$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$ 。

(1) 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{b+2}{x+1} (x > 1)$, 其中 b 为实数。

(i) 求证: 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$; (ii) 求函数 $f(x)$ 的单调区间。

(2) 已知函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$ 。给定 $x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 < x_2$, 设 m 为实数,

$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2, \beta = (1-m)x_1 + mx_2$, 且 $\alpha > 1, \beta > 1$,

若 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 求 m 的取值范围。

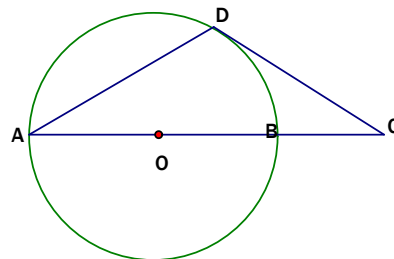
数学 II (附加题)

21. [选做题] 本题包括A、B、C、D四小题, 请选定其中两题, 并在相应的答题区域内作答。若多做, 则按作答的前两题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. 选修4-1：几何证明选讲

(本小题满分10分)

AB是圆O的直径，D为圆O上一点，过D作圆O的切线交AB延长线于点C，若DA=DC，求证：AB=2BC。



B. 选修4-2：矩阵与变换

(本小题满分10分)

在平面直角坐标系xOy中，已知点A(0,0)，B(-2,0)，C(-2,1)。设k为非零实数，矩阵M=

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{点A、B、C在矩阵MN对应的变换下得到点分别为} A_1、B_1、C_1, \triangle A_1$$

B_1C_1 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的2倍，求k的值。

C. 选修4-5：不等式选讲

(本小题满分10分)

设a、b是非负实数，求证： $a^3 + b^3 \geq \sqrt{ab}(a^2 + b^2)$ 。

[必做题]第22题、第23题，每题10分，共计20分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

22、(本小题满分10分)

某工厂生产甲、乙两种产品，甲产品的一等品率为80%，二等品率为20%；乙产品的一等品率为90%，二等品率为10%。生产1件甲产品，若是一等品则获得利润4万元，若是二等品则亏损1万元；生产1件乙产品，若是一等品则获得利润6万元，若是二等品则亏损2万元。设生产各种产品相互独立。

- (1) 记X(单位：万元)为生产1件甲产品和1件乙产品可获得的总利润，求X的分布列；
- (2) 求生产4件甲产品所获得的利润不少于10万元的概率。

23、（本小题满分10分）

已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数。

（1）求证 $\cos A$ 是有理数；（2）求证：对任意正整数 n ， $\cos nA$ 是有理数。

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分。请把答案填写在答题卡相应的位置上。

1、设集合 $A=\{-1,1,3\}$ ， $B=\{a+2,a^2+4\}$ ， $A \cap B=\{3\}$ ，则实数 $a=$ ▲ 。

[解析] 考查集合的运算推理。 $3 \in B$ ， $a+2=3$ ， $a=1$ 。

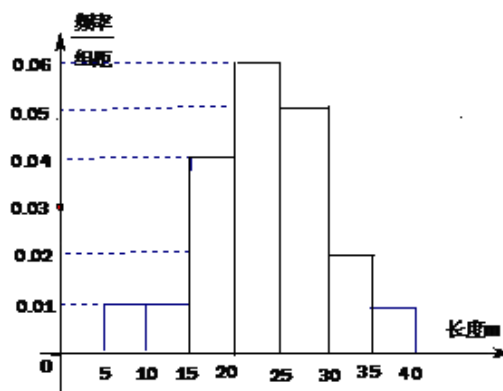
2、设复数 z 满足 $z(2-3i)=6+4i$ （其中 i 为虚数单位），则 z 的模为 ▲ 。

[解析] 考查复数运算、模的性质。 $z(2-3i)=2(3+2i)$ ， $2-3i$ 与 $3+2i$ 的模相等， z 的模为2。

3、盒子中有大小相同的3只白球，1只黑球，若从中随机地摸出两只球，两只球颜色不同的概率是 ▲ 。

[解析] 考查古典概型知识。 $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4、某棉纺厂为了了解一批棉花的质量，从中随机抽取了100根棉花纤维的长度（棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标），所得数据都在区间 $[5,40]$ 中，其频率分布直方图如图所示，则其抽样的100根中，有 ▲ 根在棉花纤维的长度小于20mm。



[解析] 考查频率分布直方图的知识。

$$100 \times (0.001+0.001+0.004) \times 5=30$$

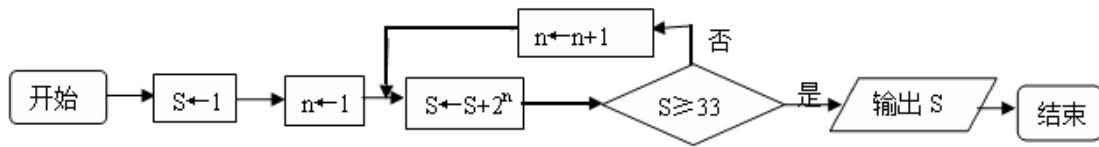
5、设函数 $f(x)=x(e^x+ae^{-x})(x \in \mathbf{R})$ 是偶函数，则实数 $a=$ ▲ 。

[解析] 考查函数的奇偶性的知识。 $g(x)=e^x+ae^{-x}$ 为奇函数，由 $g(0)=0$ ，得 $a=-1$ 。

6、在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 上一点 M ，点 M 的横坐标是3，则 M 到双曲线右焦点的距离是 ▲ 。

[解析] 考查双曲线的定义。 $\frac{MF}{d} = e = \frac{4}{2} = 2$ ， d 为点 M 到右准线 $x=1$ 的距离， $d=2$ ， $MF=4$

7、右图是一个算法的流程图，则输出S的值是_____▲_____



[解析]考查流程图理解。 $1+2+2^2+\dots+2^4=31<33$, 输出 $S=1+2+2^2+\dots+2^5=63$ 。

8、函数 $y=x^2(x>0)$ 的图像在点 (a_k, a_k^2) 处的切线与x轴交点的横坐标为 a_{k+1} , k 为正整数, $a_1=16$, 则 $a_1+a_3+a_5=$ _____▲_____

[解析]考查函数的切线方程、数列的通项。

在点 (a_k, a_k^2) 处的切线方程为: $y - a_k^2 = 2a_k(x - a_k)$, 当 $y = 0$ 时, 解得 $x = \frac{a_k}{2}$,

所以 $a_{k+1} = \frac{a_k}{2}$, $a_1 + a_3 + a_5 = 16 + 4 + 1 = 21$ 。

9、在平面直角坐标系xOy中, 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有且仅有四个点到直线 $12x - 5y + c = 0$ 的距离为1, 则实数c的取值范围是_____▲_____

[解析]考查圆与直线的位置关系。圆半径为2,

圆心 $(0, 0)$ 到直线 $12x - 5y + c = 0$ 的距离小于1, $\frac{|c|}{13} < 1$, c 的取值范围是 $(-13, 13)$ 。

10、定义在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $y=6\cos x$ 的图像与 $y=5\tan x$ 的图像的交点为P, 过点P作 $PP_1 \perp x$ 轴于点 P_1 , 直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图像交于点 P_2 , 则线段 P_1P_2 的长为_____▲_____。

[解析]考查三角函数的图象、数形结合思想。线段 P_1P_2 的长即为 $\sin x$ 的值,

且其中的 x 满足 $6\cos x = 5\tan x$, 解得 $\sin x = \frac{2}{3}$ 。线段 P_1P_2 的长为 $\frac{2}{3}$

11、已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, 则满足不等式 $f(1-x^2) > f(2x)$ 的 x 的范围是_____▲_____。

[解析]考查分段函数的单调性。 $\begin{cases} 1-x^2 > 2x \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, \sqrt{2}-1)$

12、设实数 x, y 满足 $3 \leq xy^2 \leq 8$, $4 \leq \frac{x^2}{y} \leq 9$, 则 $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值是_____▲_____。

[解析]考查不等式的基本性质, 等价转化思想。

$(\frac{x^2}{y})^2 \in [16, 81]$, $\frac{1}{xy^2} \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{3}]$, $\frac{x^3}{y^4} = (\frac{x^2}{y})^2 \cdot \frac{1}{xy^2} \in [2, 27]$, $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值是27。

13、在锐角三角形ABC, A、B、C的对边分别为a、b、c, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 6 \cos C$, 则

$$\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}。$$

[解析] 考查三角形中的正、余弦定理三角函数知识的应用, 等价转化思想。一题多解。

(方法一) 考虑已知条件和所求结论对于角A、B和边a、b具有轮换性。

当A=B或a=b时满足题意, 此时有: $\cos C = \frac{1}{3}$, $\tan^2 \frac{C}{2} = \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \frac{1}{2}$, $\tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\tan A = \tan B = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} = \sqrt{2}, \quad \frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B} = 4。$$

(方法二) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 6 \cos C \Rightarrow 6ab \cos C = a^2 + b^2$,

$$6ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = a^2 + b^2, a^2 + b^2 = \frac{3c^2}{2}$$

$$\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B} = \frac{\sin C}{\cos C} \cdot \frac{\cos B \sin A + \sin B \cos A}{\sin A \sin B} = \frac{\sin C}{\cos C} \cdot \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{1}{\cos C} \cdot \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B}$$

$$\text{由正弦定理, 得: 上式} = \frac{1}{\cos C} \cdot \frac{c^2}{ab} = \frac{c^2}{\frac{1}{6}(a^2 + b^2)} = \frac{c^2}{\frac{1}{6} \cdot \frac{3c^2}{2}} = 4$$

14、将边长为1m正三角形薄片, 沿一条平行于底边的直线剪成两块, 其中一块是梯形, 记

$$S = \frac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}, \text{则S的最小值是} \underline{\quad \blacktriangle \quad}。$$

[解析] 考查函数中的建模应用, 等价转化思想。一题多解。

$$\text{设剪成的小正三角形的边长为} x, \text{ 则: } S = \frac{(3-x)^2}{\frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1-x)} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(3-x)^2}{1-x^2} (0 < x < 1)$$

(方法一) 利用导数求函数最小值。

$$S(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(3-x)^2}{1-x^2}, \quad S'(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(2x-6) \cdot (1-x^2) - (3-x)^2 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(2x-6) \cdot (1-x^2) - (3-x)^2 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2(3x-1)(x-3)}{(1-x^2)^2}$$

$$S'(x) = 0, 0 < x < 1, x = \frac{1}{3},$$

当 $x \in (0, \frac{1}{3}]$ 时, $S'(x) < 0$, 递减; 当 $x \in [\frac{1}{3}, 1)$ 时, $S'(x) > 0$, 递增;

故当 $x = \frac{1}{3}$ 时, S 的最小值是 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ 。

(方法二) 利用函数的方法求最小值。

$$\text{令 } 3-x=t, t \in (2, 3), \frac{1}{t} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), \text{ 则: } S = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{t^2}{-t^2+6t-8} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{-\frac{8}{t^2} + \frac{6}{t} - 1}$$

故当 $\frac{1}{t} = \frac{3}{8}, x = \frac{1}{3}$ 时, S 的最小值是 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ 。

二、解答题: 本大题共6小题, 共计90分, 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明或演算步骤.

15、(本小题满分14分)

在平面直角坐标系xOy中, 点A(-1,-2)、B(2,3)、C(-2,-1)。

(3)求以线段AB、AC为邻边的平行四边形两条对角线的长;

(4)设实数t满足 $(\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, 求t的值。

[解析]本小题考查平面向量的几何意义、线性运算、数量积, 考查运算求解能力。满分14分

。

(1) (方法一) 由题设知 $\overrightarrow{AB} = (3, 5), \overrightarrow{AC} = (-1, 1)$, 则

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2, 6), \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (4, 4).$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{10}, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}.$$

故所求的两条对角线的长分别为 $4\sqrt{2}$ 、 $2\sqrt{10}$ 。

(方法二) 设该平行四边形的第四个顶点为D, 两条对角线的交点为E, 则:

E为B、C的中点, E(0, 1)

又E(0, 1)为A、D的中点, 所以D(1, 4)

故所求的两条对角线的长分别为 $BC=4\sqrt{2}$ 、 $AD=2\sqrt{10}$ ；

(2) 由题设知： $\overrightarrow{OC}=(-2,-1)$ ， $\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}=(3+2t,5+t)$ 。

由 $(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OC}=0$ ，得： $(3+2t,5+t)\cdot(-2,-1)=0$ ，

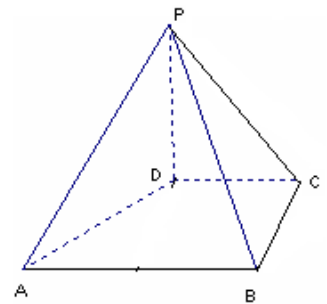
从而 $5t=-11$ ，所以 $t=-\frac{11}{5}$ 。

或者： $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OC}^2$ ， $\overrightarrow{AB}=(3,5)$ ， $t=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|^2}=-\frac{11}{5}$

16、（本小题满分14分）

如图，在四棱锥P-

ABCD中， $PD\perp$ 平面ABCD， $PD=DC=BC=1$ ， $AB=2$ ， $AB\parallel DC$ ， $\angle BCD=90^\circ$ 。



(3)求证： $PC\perp BC$ ；

(4)求点A到平面PBC的距离。

[解析]

本小题主要考查直线与平面、平面与平面的位置关系，考查几何体的体积，考查空间想象能力、推理论证能力和运算能力。满分14分。

(1) 证明：因为 $PD\perp$ 平面ABCD， $BC\subset$ 平面ABCD，所以 $PD\perp BC$ 。

由 $\angle BCD=90^\circ$ ，得 $CD\perp BC$ ，

又 $PD\cap DC=D$ ， $PD、DC\subset$ 平面PCD，

所以 $BC\perp$ 平面PCD。

因为 $PC\subset$ 平面PCD，故 $PC\perp BC$ 。

(2)（方法一）分别取AB、PC的中点E、F，连DE、DF，则：

易证 $DE\parallel CB$ ， $DE\parallel$ 平面PBC，点D、E到平面PBC的距离相等。

又点A到平面PBC的距离等于E到平面PBC的距离的2倍。

由(1)知： $BC\perp$ 平面PCD，所以平面PBC \perp 平面PCD于PC，

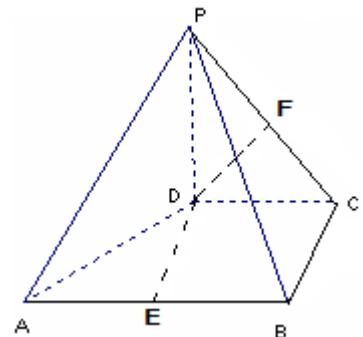
因为 $PD=DC$ ， $PF=FC$ ，所以 $DF\perp PC$ ，所以 $DF\perp$ 平面PBC于F。

易知 $DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故点A到平面PBC的距离等于 $\sqrt{2}$ 。

（方法二）体积法：连结AC。设点A到平面PBC的距离为h。

因为 $AB\parallel DC$ ， $\angle BCD=90^\circ$ ，所以 $\angle ABC=90^\circ$ 。

从而 $AB=2$ ， $BC=1$ ，得 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=1$ 。



由PD⊥平面ABCD及PD=1，得三棱锥P-ABC的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PD = \frac{1}{3}$ 。

因为PD⊥平面ABCD，DC⊂平面ABCD，所以PD⊥DC。

又PD=DC=1，所以 $PC = \sqrt{PD^2 + DC^2} = \sqrt{2}$ 。

由PC⊥BC，BC=1，得 $\triangle PBC$ 的面积 $S_{\triangle PBC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

由 $V_{A-PBC} = V_{P-ABC}$ ， $\frac{1}{3} S_{\triangle PBC} \cdot h = V = \frac{1}{3}$ ，得 $h = \sqrt{2}$ ，

故点A到平面PBC的距离等于 $\sqrt{2}$ 。

17、（本小题满分14分）

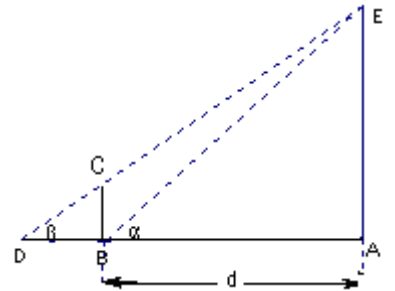
某兴趣小组测量电视塔AE的高度H(单位：m)，如示意图，垂直放置的标杆BC的高度h=4m，仰角 $\angle ABE = \alpha$ ， $\angle ADE = \beta$ 。

(3)该小组已经测得一组 α 、 β 的值， $\tan \alpha = 1.24$ ， $\tan \beta = 1.20$ ，请据此算出H的值；

(4)该小组分析若干测得的数据后，认为适当调整标杆到电视塔的距离d

(单位：m)，使 α 与 β 之差较大，可以提高测量精确度。若电视塔

的实际高度为125m，试问d为多少时， $\alpha - \beta$ 最大？



[解析]

本题主要考查解三角形的知识、两角差的正切及不等式的应用。

$$(1) \frac{H}{AD} = \tan \beta \Rightarrow AD = \frac{H}{\tan \beta}, \text{ 同理: } AB = \frac{H}{\tan \alpha}, \quad BD = \frac{h}{\tan \beta}.$$

AD—

$$AB=BD, \text{ 故得 } \frac{H}{\tan \beta} - \frac{H}{\tan \alpha} = \frac{h}{\tan \beta}, \text{ 解得: } H = \frac{h \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} = \frac{4 \times 1.24}{1.24 - 1.20} = 124.$$

因此，算出的电视塔的高度H是124m。

$$(2) \text{ 由题设知 } d = AB, \text{ 得 } \tan \alpha = \frac{H}{d}, \tan \beta = \frac{H}{AD} = \frac{h}{DB} = \frac{H-h}{d},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{H}{d} - \frac{H-h}{d}}{1 + \frac{H}{d} \cdot \frac{H-h}{d}} = \frac{hd}{d^2 + H(H-h)} = \frac{h}{d + \frac{H(H-h)}{d}}$$

$d + \frac{H(H-h)}{d} \geq 2\sqrt{H(H-h)}$, (当且仅当 $d = \sqrt{H(H-h)} = \sqrt{125 \times 121} = 55\sqrt{5}$ 时, 取等号)

故当 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\tan(\alpha - \beta)$ 最大。

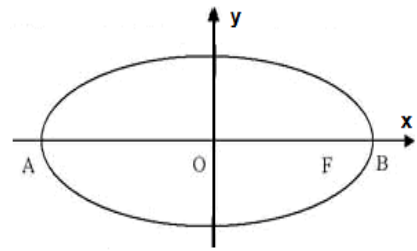
因为 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以当 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\alpha - \beta$ 最大。

故所求的 d 是 $55\sqrt{5}$ m。

18、(本小题满分16分)

在平面直角坐标系 xoy 中, 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右顶点为 A 、 B , 右焦点为

F 。设过点 $T(t, m)$ 的直线 TA 、 TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$, 其中 $m > 0$, $y_1 > 0, y_2 < 0$ 。



(1) 设动点 P 满足 $PF^2 - PB^2 = 4$, 求点 P 的轨迹;

(2) 设 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}$, 求点 T 的坐标;

(3) 设 $t = 9$, 求证: 直线 MN 必过 x 轴上的一定点 (其坐标与 m 无关)。

[解析]

本小题主要考查求简单曲线的方程, 考查直线与椭圆的方程等基础知识。考查运算求解能力和探究问题的能力。满分16分。

(1) 设点 $P(x, y)$, 则: $F(2, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $A(-3, 0)$ 。

由 $PF^2 - PB^2 = 4$, 得 $(x-2)^2 + y^2 - [(x-3)^2 + y^2] = 4$, 化简得 $x = \frac{9}{2}$ 。

故所求点 P 的轨迹为直线 $x = \frac{9}{2}$ 。

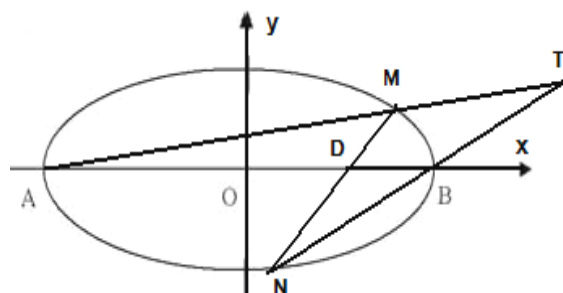
(2) 将 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}$ 分别代入椭圆方程, 以及 $y_1 > 0, y_2 < 0$ 得: $M(2, \frac{5}{3})$ 、 $N(\frac{1}{3}, -\frac{20}{9})$

直线 MTA 方程为: $\frac{y-0}{\frac{5}{3}-0} = \frac{x+3}{2+3}$, 即 $y = \frac{1}{3}x + 1$,

直线NTB 方程为: $\frac{y-0}{-\frac{20}{9}-0} = \frac{x-3}{\frac{1}{3}-3}$, 即 $y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}$ 。

联立方程组, 解得: $\begin{cases} x=7 \\ y=\frac{10}{3} \end{cases}$,

所以点T的坐标为 $(7, \frac{10}{3})$ 。



(3) 点T的坐标为 $(9, m)$

直线MTA 方程为: $\frac{y-0}{m-0} = \frac{x+3}{9+3}$, 即 $y = \frac{m}{12}(x+3)$,

直线NTB 方程为: $\frac{y-0}{m-0} = \frac{x-3}{9-3}$, 即 $y = \frac{m}{6}(x-3)$ 。

分别与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 联立方程组, 同时考虑到 $x_1 \neq -3, x_2 \neq 3$,

解得: $M(\frac{3(80-m^2)}{80+m^2}, \frac{40m}{80+m^2})$ 、 $N(\frac{3(m^2-20)}{20+m^2}, -\frac{20m}{20+m^2})$ 。

(方法一) 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 直线MN 方程为:

$$\frac{y + \frac{20m}{20+m^2}}{\frac{40m}{80+m^2} + \frac{20m}{20+m^2}} = \frac{x - \frac{3(m^2-20)}{20+m^2}}{\frac{3(80-m^2)}{80+m^2} - \frac{3(m^2-20)}{20+m^2}}$$

令 $y=0$, 解得: $x=1$ 。此时必过点D $(1, 0)$;

当 $x_1 = x_2$ 时, 直线MN 方程为: $x=1$, 与x轴交点为D $(1, 0)$ 。

所以直线MN 必过x轴上的一定点D $(1, 0)$ 。

(方法二) 若 $x_1 = x_2$, 则由 $\frac{240-3m^2}{80+m^2} = \frac{3m^2-60}{20+m^2}$ 及 $m > 0$, 得 $m = 2\sqrt{10}$,

此时直线MN 的方程为 $x=1$, 过点D $(1, 0)$ 。

若 $x_1 \neq x_2$, 则 $m \neq 2\sqrt{10}$, 直线MD 的斜率 $k_{MD} = \frac{\frac{40m}{80+m^2}}{\frac{240-3m^2}{80+m^2} - 1} = \frac{10m}{40-m^2}$,

直线ND的斜率 $k_{ND} = \frac{-20m}{\frac{20+m^2}{3m^2-60}-1} = \frac{10m}{40-m^2}$ ，得 $k_{MD} = k_{ND}$ ，所以直线MN过D点。

因此，直线MN必过 x 轴上的点 $(1, 0)$ 。

19、（本小题满分16分）

设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $2a_2 = a_1 + a_3$ ，数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 d 的等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式（用 n, d 表示）；

(2) 设 c 为实数，对满足 $m+n=3k$ 且 $m \neq n$ 的任意正整数 m, n, k ，不等式

$$S_m + S_n > cS_k \text{ 都成立。求证：} c \text{ 的最大值为 } \frac{9}{2}.$$

[解析]

本小题主要考查等差数列的通项、求和以及基本不等式等有关知识，考查探索、分析及论证的能力。满分16分。

$$(1) \text{ 由题意知：} d > 0, \sqrt{S_n} = \sqrt{S_1} + (n-1)d = \sqrt{a_1} + (n-1)d$$

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 3a_2 = S_3 \Rightarrow 3(S_2 - S_1) = S_3, 3[(\sqrt{a_1} + d)^2 - a_1] = (\sqrt{a_1} + 2d)^2,$$

$$\text{化简，得：} a_1 - 2\sqrt{a_1} \cdot d + d^2 = 0, \sqrt{a_1} = d, a_1 = d^2$$

$$\sqrt{S_n} = d + (n-1)d = nd, S_n = n^2d^2,$$

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2d^2 - (n-1)^2d^2 = (2n-1)d^2$ ，适合 $n=1$ 情形。

故所求 $a_n = (2n-1)d^2$

(2)（方法一）

$$S_m + S_n > cS_k \Rightarrow m^2d^2 + n^2d^2 > c \cdot k^2d^2 \Rightarrow m^2 + n^2 > c \cdot k^2, \quad c < \frac{m^2 + n^2}{k^2} \text{ 恒成立。}$$

$$\text{又 } m+n=3k \text{ 且 } m \neq n, \quad 2(m^2 + n^2) > (m+n)^2 = 9k^2 \Rightarrow \frac{m^2 + n^2}{k^2} > \frac{9}{2},$$

故 $c \leq \frac{9}{2}$ ，即 c 的最大值为 $\frac{9}{2}$ 。

(方法二) 由 $\sqrt{a_1} = d$ 及 $\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)d$, 得 $d > 0$, $S_n = n^2 d^2$ 。

于是, 对满足题设的 m, n, k , $m \neq n$, 有

$$S_m + S_n = (m^2 + n^2)d^2 > \frac{(m+n)^2}{2}d^2 = \frac{9}{2}d^2 k^2 = \frac{9}{2}S_k。$$

所以 c 的最大值 $c_{\max} \geq \frac{9}{2}$ 。

另一方面, 任取实数 $a > \frac{9}{2}$ 。设 k 为偶数, 令 $m = \frac{3}{2}k + 1, n = \frac{3}{2}k - 1$, 则 m, n, k 符合条件, 且 $S_m + S_n = (m^2 + n^2)d^2 = d^2[(\frac{3}{2}k + 1)^2 + (\frac{3}{2}k - 1)^2] = \frac{1}{2}d^2(9k^2 + 4)$ 。

于是, 只要 $9k^2 + 4 < 2ak^2$, 即当 $k > \frac{2}{\sqrt{2a-9}}$ 时, $S_m + S_n < \frac{1}{2}d^2 \cdot 2ak^2 = aS_k$ 。

所以满足条件的 $c \leq \frac{9}{2}$, 从而 $c_{\max} \leq \frac{9}{2}$ 。

因此 c 的最大值为 $\frac{9}{2}$ 。

20、(本小题满分16分)

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(1, +\infty)$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$ 。如果存在实数 a 和函数 $h(x)$, 其中 $h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) > 0$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$ 。

(1) 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{b+2}{x+1}$ ($x > 1$), 其中 b 为实数。

(i) 求证: 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$; (ii) 求函数 $f(x)$ 的单调区间。

(2) 已知函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$ 。给定 $x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 < x_2$, 设 m 为实数,

$$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2, \quad \beta = (1-m)x_1 + mx_2, \quad \text{且 } \alpha > 1, \beta > 1,$$

若 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 求 m 的取值范围。

[解析]

本小题主要考查函数的概念、性质、图象及导数等基础知识, 考查灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力。满分16分。

$$(1) (i) f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{b+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} (x^2 - bx + 1)$$

$\because x > 1$ 时, $h(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$ 恒成立,

\therefore 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$;

(ii) (方法一) 设 $\varphi(x) = x^2 - bx + 1 = (x - \frac{b}{2})^2 + 1 - \frac{b^2}{4}$, $\varphi(x)$ 与 $f'(x)$ 的符号相同。

当 $1 - \frac{b^2}{4} > 0, -2 < b < 2$ 时, $\varphi(x) > 0, f'(x) > 0$, 故此时 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增;

当 $b = \pm 2$ 时, 对于 $x > 1$, 有 $f'(x) > 0$, 所以此时 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增;

当 $b < -2$ 时, $\varphi(x)$ 图像开口向上, 对称轴 $x = \frac{b}{2} < -1$, 而 $\varphi(0) = 1$,

对于 $x > 1$, 总有 $\varphi(x) > 0, f'(x) > 0$, 故此时 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增;

(方法二) 当 $b \leq 2$ 时, 对于 $x > 1, \varphi(x) = x^2 - bx + 1 \geq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$

所以 $f'(x) > 0$, 故此时 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增;

当 $b > 2$ 时, $\varphi(x)$ 图像开口向上, 对称轴 $x = \frac{b}{2} > 1$, 方程 $\varphi(x) = 0$ 的两根为:

$$\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}, \frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}, \text{ 而 } \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2} > 1, \frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2} = \frac{2}{b + \sqrt{b^2 - 4}} \in (0, 1)$$

当 $x \in (1, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2})$ 时, $\varphi(x) < 0, f'(x) < 0$, 故此时 $f(x)$ 在区间 $(1, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2})$

上递减; 同理得: $f(x)$ 在区间 $[\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上递增。

综上所述, 当 $b \leq 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增;

当 $b > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(1, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2})$ 上递减; $f(x)$ 在 $[\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上递增。

(2) (方法一) 由题意, 得: $g'(x) = h(x)(x^2 - 2x + 1) = h(x)(x-1)^2$

又 $h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) > 0$,

所以对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增。

又 $\alpha + \beta = x_1 + x_2, \alpha - \beta = (2m-1)(x_1 - x_2)$ 。

当 $m > \frac{1}{2}, m \neq 1$ 时, $\alpha < \beta$, 且 $\alpha - x_1 = (m-1)x_1 + (1-m)x_2, \beta - x_2 = (1-m)x_1 + (m-1)x_2$

$$\therefore (\alpha - x_1)(\beta - x_2) = -(m-1)^2(x_1 - x_2)^2 < 0, \therefore \alpha < x_1 < x_2 < \beta \text{ 或 } x_1 < \alpha < \beta < x_2,$$

若 $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, 则 $f(\alpha) < f(x_1) < f(x_2) < f(\beta)$,

$$\therefore |g(\alpha) - g(\beta)| > |g(x_1) - g(x_2)|, \text{不合题意。} \quad \therefore x_1 < \alpha < \beta < x_2,$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_1 < mx_1 + (1-m)x_2 \\ (1-m)x_1 + mx_2 < x_2 \end{cases}, \text{解得 } m < 1, \therefore \frac{1}{2} < m < 1.$$

当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $\alpha = \beta$, $0 = |g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 符合题意。

当 $m < \frac{1}{2}$ 时, $\alpha > \beta$, 且 $\alpha - x_2 = m(x_1 - x_2), \beta - x_1 = -m(x_1 - x_2)$,

$$\text{同理有 } x_1 < \beta < \alpha < x_2, \text{即 } \begin{cases} x_1 < (1-m)x_1 + mx_2 \\ mx_1 + (1-m)x_2 < x_2 \end{cases}, \text{解得 } m > 0, \therefore 0 < m < \frac{1}{2},$$

综合以上讨论, 得: 所求 m 的取值范围是 $(0, 1)$ 。

(方法二) 由题设知, $g(x)$ 的导函数 $g'(x) = h(x)(x^2 - 2x + 1)$, 其中函数 $h(x) > 0$ 对于任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都成立。所以, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) = h(x)(x-1)^2 > 0$, 从而 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

① 当 $m \in (0, 1)$ 时, 有 $\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 > mx_1 + (1-m)x_1 = x_1$,

$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 < mx_2 + (1-m)x_2 = x_2$, 得 $\alpha \in (x_1, x_2)$, 同理可得 $\beta \in (x_1, x_2)$, 所

以由 $g(x)$ 的单调性知 $g(\alpha), g(\beta) \in (g(x_1), g(x_2))$,

从而有 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 符合题设。

② 当 $m \leq 0$ 时, $\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 \geq mx_2 + (1-m)x_2 = x_2$,

$\beta = (1-m)x_1 + mx_2 \leq (1-m)x_1 + mx_1 = x_1$, 于是由 $\alpha > 1, \beta > 1$ 及 $g(x)$ 的单调性知

$g(\beta) \leq g(x_1) < g(x_2) \leq g(\alpha)$, 所以 $|g(\alpha) - g(\beta)| \geq |g(x_1) - g(x_2)|$, 与题设不符。

③ 当 $m \geq 1$ 时, 同理可得 $\alpha \leq x_1, \beta \geq x_2$, 进而得 $|g(\alpha) - g(\beta)| \geq |g(x_1) - g(x_2)|$, 与题设

不符。

因此综合①、②、③得所求的 m 的取值范围是 $(0, 1)$ 。

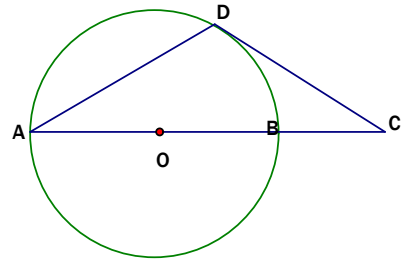
数学 II (附加题)

21. [选做题] 本题包括A、B、C、D四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答。若多做，则按作答的前两题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

D. 选修4-1: 几何证明选讲

(本小题满分10分)

AB是圆O的直径，D为圆O上一点，过D作圆O的切线交AB延长线于点C，若 $DA=DC$ ，求证： $AB=2BC$ 。



[解析]

本题主要考查三角形、圆的有关知识，考查推理论证能力。

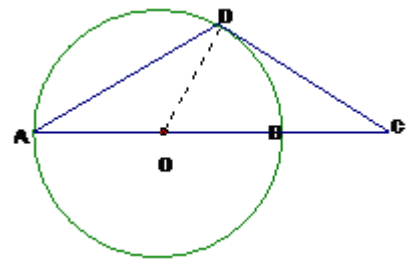
(方法一) 证明：连结OD，则： $OD \perp DC$ ，

又 $OA=OD$ ， $DA=DC$ ，所以 $\angle DAO = \angle ODA = \angle DCO$ ，

$\angle DOC = \angle DAO + \angle ODA = 2\angle DCO$ ，

所以 $\angle DCO = 30^\circ$ ， $\angle DOC = 60^\circ$ ，

所以 $OC = 2OD$ ，即 $OB = BC = OD = OA$ ，所以 $AB = 2BC$ 。



(方法二) 证明：连结OD、BD。

因为AB是圆O的直径，所以 $\angle ADB = 90^\circ$ ， $AB = 2OB$ 。

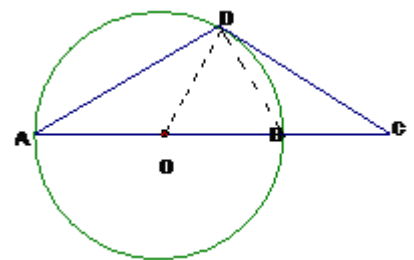
因为DC是圆O的切线，所以 $\angle CDO = 90^\circ$ 。

又因为 $DA = DC$ ，所以 $\angle DAC = \angle DCA$ ，

于是 $\triangle ADB \cong \triangle CDO$ ，从而 $AB = CO$ 。

即 $2OB = OB + BC$ ，得 $OB = BC$ 。

故 $AB = 2BC$ 。



E. 选修4-2: 矩阵与变换

(本小题满分10分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,0)$ ， $B(-2,0)$ ， $C(-2,1)$ 。设 k 为非零实数，矩阵 $M =$

$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 点A、B、C在矩阵MN对应的变换下得到点分别为 A_1 、 B_1 、 C_1 , $\triangle A_1$

B_1C_1 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的2倍, 求k的值。

[解析]

本题主要考查图形在矩阵对应的变换下的变化特点, 考查运算求解能力。满分10分。

解: 由题设得 $MN = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

由 $\begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, 可知 $A_1(0, 0)$ 、 $B_1(0, -2)$ 、 $C_1(k, -2)$ 。

计算得 $\triangle ABC$ 的面积是1, $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积是 $|k|$, 则由题设知: $|k| = 2 \times 1 = 2$ 。

所以k的值为2或-2。

F. 选修4-4: 坐标系与参数方程

(本小题满分10分)

在极坐标系中, 已知圆 $\rho = 2\cos\theta$ 与直线 $3\rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta + a = 0$ 相切, 求实数a的值。

[解析] 本题主要考查曲线的极坐标方程等基本知识, 考查转化问题的能力。满分10分。

解: $\rho^2 = 2\rho\cos\theta$, 圆 $\rho = 2\cos\theta$ 的普通方程为: $x^2 + y^2 = 2x, (x-1)^2 + y^2 = 1$,

直线 $3\rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta + a = 0$ 的普通方程为: $3x + 4y + a = 0$,

又圆与直线相切, 所以 $\frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$, 解得: $a = 2$, 或 $a = -8$ 。

G. 选修4-5: 不等式选讲

(本小题满分10分)

设a、b是非负实数, 求证: $a^3 + b^3 \geq \sqrt{ab}(a^2 + b^2)$ 。

[解析] 本题主要考查证明不等式的基本方法, 考查推理论证的能力。满分10分。

(方法一) 证明: $a^3 + b^3 - \sqrt{ab}(a^2 + b^2) = a^2\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + b^2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$
 $= (\sqrt{a} - \sqrt{b})[(\sqrt{a})^5 - (\sqrt{b})^5]$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 [(\sqrt{a})^4 + (\sqrt{a})^3(\sqrt{b}) + (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a})(\sqrt{b})^3 + (\sqrt{b})^4]$$

因为实数 $a, b \geq 0$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, $[(\sqrt{a})^4 + (\sqrt{a})^3(\sqrt{b}) + (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a})(\sqrt{b})^3 + (\sqrt{b})^4] \geq 0$

所以上式 ≥ 0 。即有 $a^3 + b^3 \geq \sqrt{ab}(a^2 + b^2)$ 。

(方法二) 证明: 由 a, b 是非负实数, 作差得

$$a^3 + b^3 - \sqrt{ab}(a^2 + b^2) = a^2\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + b^2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})[(\sqrt{a})^5 - (\sqrt{b})^5]$$

当 $a \geq b$ 时, $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$, 从而 $(\sqrt{a})^5 \geq (\sqrt{b})^5$, 得 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})[(\sqrt{a})^5 - (\sqrt{b})^5] \geq 0$;

当 $a < b$ 时, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 从而 $(\sqrt{a})^5 < (\sqrt{b})^5$, 得 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})[(\sqrt{a})^5 - (\sqrt{b})^5] < 0$;

所以 $a^3 + b^3 \geq \sqrt{ab}(a^2 + b^2)$ 。

[必做题]第22题、第23题, 每题10分, 共计20分。请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

23、(本小题满分10分)

某工厂生产甲、乙两种产品, 甲产品的一等品率为80%, 二等品率为20%; 乙产品的一等品率为90%, 二等品率为10%。生产1件甲产品, 若是一等品则获得利润4万元, 若是二等品则亏损1万元; 生产1件乙产品, 若是一等品则获得利润6万元, 若是二等品则亏损2万元。设生产各种产品相互独立。

(3) 记 X (单位: 万元) 为生产1件甲产品和1件乙产品可获得的总利润, 求 X 的分布列;

(4) 求生产4件甲产品所获得的利润不少于10万元的概率。

[解析] 本题主要考查概率的有关知识, 考查运算求解能力。满分10分。

解: (1) 由题设知, X 的可能取值为10, 5, 2, -3, 且

$$P(X=10) = 0.8 \times 0.9 = 0.72, \quad P(X=5) = 0.2 \times 0.9 = 0.18,$$

$$P(X=2) = 0.8 \times 0.1 = 0.08, \quad P(X=-3) = 0.2 \times 0.1 = 0.02。$$

由此得 X 的分布列为:

X	10	5	2	-3
P	0.72	0.18	0.08	0.02

(2) 设生产的4件甲产品中一等品有 n 件, 则二等品有 $4 - n$ 件。

由题设知 $4n - (4 - n) \geq 10$ ，解得 $n \geq \frac{14}{5}$ ，

又 $n \in N$ ，得 $n = 3$ ，或 $n = 4$ 。

所求概率为 $P = C_4^3 \times 0.8^3 \times 0.2 + 0.8^4 = 0.8192$

答：生产4件甲产品所获得的利润不少于10万元的概率为0.8192。

24、（本小题满分10分）

已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数。

（2）求证 $\cos A$ 是有理数；（2）求证：对任意正整数 n ， $\cos nA$ 是有理数。

[解析]

本题主要考查余弦定理、数学归纳法等基础知识，考查推理论证的能力与分析问题、解决问题的能力。满分10分。

（方法一）（1）证明：设三边长分别为 a, b, c ， $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ， $\because a, b, c$ 是有理数，

$b^2 + c^2 - a^2$ 是有理数，分母 $2bc$ 为正有理数，又有有理数集对于除法的具有封闭性，

$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 必为有理数， $\therefore \cos A$ 是有理数。

（2）①当 $n = 1$ 时，显然 $\cos A$ 是有理数；

当 $n = 2$ 时， $\because \cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ ，因为 $\cos A$ 是有理数， $\therefore \cos 2A$ 也是有理数；

②假设当 $n \leq k (k \geq 2)$ 时，结论成立，即 $\cos kA$ 、 $\cos(k-1)A$ 均是有理数。

当 $n = k + 1$ 时， $\cos(k+1)A = \cos kA \cos A - \sin kA \sin A$ ，

$$\cos(k+1)A = \cos kA \cos A - \frac{1}{2}[\cos(kA - A) - \cos(kA + A)],$$

$$\cos(k+1)A = \cos kA \cos A - \frac{1}{2}\cos(k-1)A + \frac{1}{2}\cos(k+1)A,$$

$$\text{解得：} \cos(k+1)A = 2\cos kA \cos A - \cos(k-1)A$$

$\because \cos A$ ， $\cos kA$ ， $\cos(k-1)A$ 均是有理数， $\therefore 2\cos kA \cos A - \cos(k-1)A$ 是有理数，

$\therefore \cos(k+1)A$ 是有理数。

即当 $n = k + 1$ 时，结论成立。

综上所述，对于任意正整数 n ， $\cos nA$ 是有理数。

（方法二）证明：（1）由 AB 、 BC 、 AC 为有理数及余弦定理知

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \text{ 是有理数。}$$

(2) 用数学归纳法证明 $\cos nA$ 和 $\sin A \cdot \sin nA$ 都是有理数。

① 当 $n=1$ 时，由 (1) 知 $\cos A$ 是有理数，从而有 $\sin A \cdot \sin A = 1 - \cos^2 A$ 也是有理数。

。

② 假设当 $n=k (k \geq 1)$ 时， $\cos kA$ 和 $\sin A \cdot \sin kA$ 都是有理数。

当 $n=k+1$ 时，由 $\cos(k+1)A = \cos A \cdot \cos kA - \sin A \cdot \sin kA$ ，

$$\sin A \cdot \sin(k+1)A = \sin A \cdot (\sin A \cdot \cos kA + \cos A \cdot \sin kA) = (\sin A \cdot \sin A) \cdot \cos kA + (\sin A \cdot \sin kA) \cdot \cos A$$

，

及①和归纳假设，知 $\cos(k+1)A$ 和 $\sin A \cdot \sin(k+1)A$ 都是有理数。

即当 $n=k+1$ 时，结论成立。

综合①、②可知，对任意正整数 n ， $\cos nA$ 是有理数。