2008年广东省高考数学试卷（文科）

一、选择题（共10小题，每小题5分，满分50分）

1. （5分）（2008•广东）第二十九届夏季奥林匹克运动会将于2008年8月8日在北京举行，若集合A={参加北京奥运会比赛的运动员}，集合B={参加北京奥运会比赛的男运动员}．集合C={参加北京奥运会比赛的女运动员}，则下列关系正确的是（　　）

A．$A\subseteq B$ B．$B\subseteq C$ C．$A\cap B=C$　D．$B\cup C=A$

2. （5分）（2008•广东）已知$0<a<2$，复数z的实部为a，虚部为1，则|z|的取值范围是（　　）

A．（1，5） B．（1，3） C．$(1,\sqrt{5})$　D．$(1,\sqrt{3})$

3. （5分）（2008•广东）已知平面向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,m)$，且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$2\vec{a}+3\vec{b}=$（　　）

A．（﹣5，﹣10）　B．（﹣4，﹣8） C．（﹣3，﹣6） D．（﹣2，﹣4）

4. （5分）（2008•广东）记等差数列的前n项和为S_n，若$S_2=4$，$S_4=20$，则该数列的公差d=（　　）

A．2　B．3　C．6　D．7

5. （5分）（2008•广东）已知函数$f(x)=(1+\cos 2x)\sin^2 x$，$x\in R$，则f（x）是（　　）

A．最小正周期为π的奇函数　B．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数

C．最小正周期为π的偶函数　D．最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

6. （5分）（2008•广东）经过圆$x^2+2x+y^2=0$的圆心C，且与直线$x+y=0$垂直的直线方程是（　　）

A．$x+y+1=0$ B．$x+y-1=0$ C．$x-y+1=0$ D．$x-y-1=0$

7. （5分）（2008•广东）将正三棱柱截去三个角（如图1所示A，B，C分别是△GHI三边的中点）得到几何体如图2，则该几何体按图2所示方向的侧视图（或称左视图）为（　　）

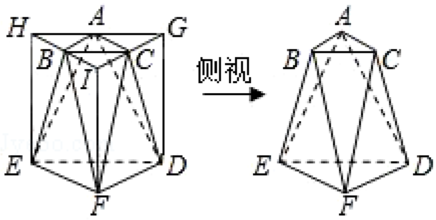
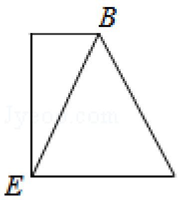
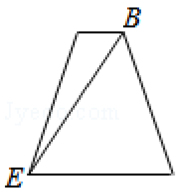
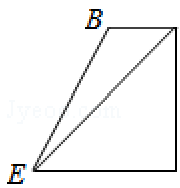
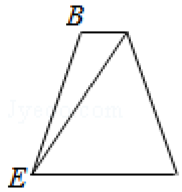


图1　　图2

A. 

B. 

C. 

D. 

8. （5分）（2008•广东）命题“若函数f（x）=$\log_a x$（a＞0，a≠1）在其定义域内是减函数，则$\log_a 2$＜0”的逆否命题是（　　）

A. 若$\log_a 2$≥0，则函数f（x）=$\log_a x$（a＞0，a≠1）在其定义域内不是减函数

B. 若$\log_a 2$＜0，则函数f（x）=$\log_a x$（a＞0，a≠1）在其定义域内不是减函数

C. 若$\log_a 2$≥0，则函数f（x）=$\log_a x$（a＞0，a≠1）在其定义域内是减函数

D. 若$\log_a 2$＜0，则函数f（x）=$\log_a x$（a＞0，a≠1）在其定义域内是减函数

9. （5分）（2008•广东）设a∈R，若函数$y=e^x+ax$，x∈R，有大于零的极值点，则（　　）

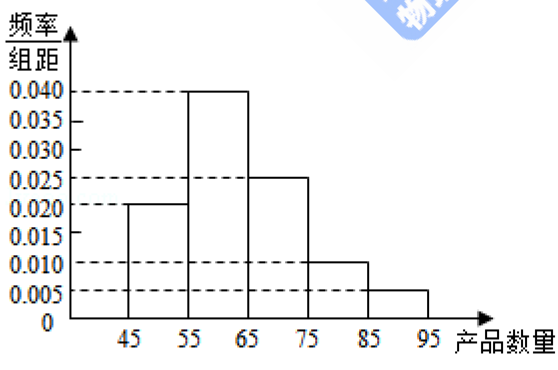
A. a＜﹣1　B. a＞﹣1　C. $a<-\frac{1}{e}$ D. $a>-\frac{1}{e}$

10. （5分）（2008•广东）设a，b∈R，若a﹣|b|＞0，则下列不等式中正确的是（　　）

A. b﹣a＞0　B. $a^3+b^3<0$　C. $a^2-b^2<0$ D. b+a＞0

二、填空题（共5小题，11--13为必做题，14--15题选做1题，每小题5分，满分20分）

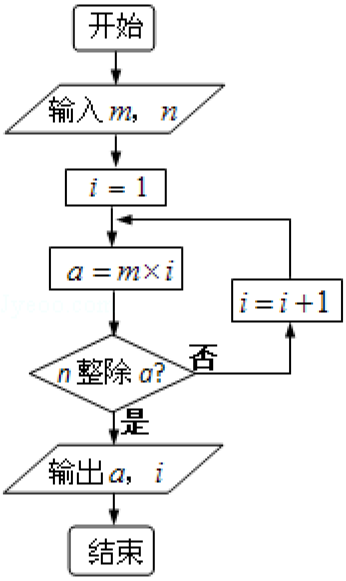
11. （5分）（2008•广东）为了调查某厂工人生产某种产品的能力，随机抽查了20位工人某天生产该产品的数量．产品数量的分组区间为[45，55），[55，65），[65，75），[75，85），[85，95）由此得到频率分布直方图如图，则这20名工人中一天生产该产品数量在[55，75）的人数是____________．



12. （5分）（2008•广东）若变量x，y满足$\begin{cases}2x+y\leqslant 40\\x+2y\leqslant 50\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，则z=3x+2y的最大值是__________

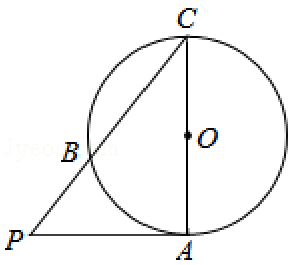
．

13. （5分）（2008•广东）阅读程序框图，若输入m=4，n=3，则输出a=____________，i=_
.
（注：框图中的赋值符号“=”，也可以写成“←”或“：=”）



14. （5分）（2008•广东）已知曲线C_1，C_2的极坐标方程分别为$\rho\cos\theta=3$，$\rho=4\cos\theta$（$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$），则曲线$C_1$与$C_2$交点的极坐标为____________.

15. （2008•广东）已知PA是圆O的切线，切点为A，PA=2．AC是圆O的直径，PC与圆O交于点B，PB=1，则圆O的半径R=____________.



三、解答题（共6小题，满分80分）

16. （13分）（2008•广东）已知函数f（x）=Asin（x+φ）（A＞0，0＜φ＜π），x∈R的最大值是1，其图象经过点$M\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$．

（1）求f（x）的解析式；

（2）已知α，$\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，且$f(\alpha)=\frac{3}{5}$，$f(\beta)=\frac{12}{13}$，求f（α－β）的值.

17. （12分）（2008•广东）某单位用2160万元购得一块空地，计划在该地块上建造一栋至少10层、每层2000平方米的楼房．经测算，如果将楼房建为x（x≥10）层，则每平方米的平

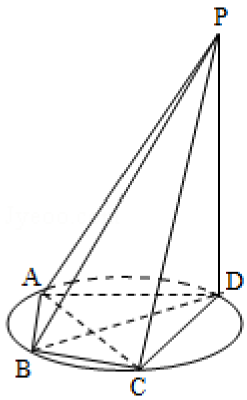
均建筑费用为560+48x（单位：元）．为了使楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建为多少层？

（注：平均综合费用=平均建筑费用+平均购地费用，平均购地费用=$\frac{\text{购地总费用}}{\text{建筑总面积}}$）

18．（14分）（2008•广东）如图所示，四棱锥P﹣ABCD的底面ABCD是半径为R的圆的内接四边形，其中BD是圆的直径，∠ABD=60°，∠BDC=45°，△ADP～△BAD．

（1）求线段PD的长；

（2）若$PC=\sqrt{11}R$，求三棱锥P﹣ABC的体积．



19．（13分）（2008•广东）某中学共有学生2000人，各年级男，女生人数如下表：

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

已知在全校学生中随机抽取1名，抽到高二年级女生的概率是0.19．

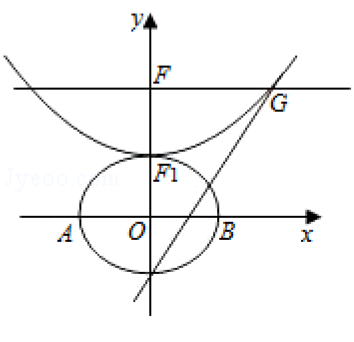
（1）现用分层抽样的方法在全校抽取48名学生，问应在高三年级抽取多少名？

（2）已知y≥245，z≥245，求高三年级中女生比男生多的概率．

20．（14分）（2008•广东）设b＞0，椭圆方程为$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为$x^2=8$（y﹣b）．如图所示，过点F（0，b+2）作x轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为G，已知抛物线在点G的切线经过椭圆的右焦点F_1．

（1）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（2）设A，B分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点P，使得△ABP为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）．



21．（14分）（2008•广东）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}+2a_{n-2})$（n=3，4，…）．数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_n$（n=2，3，…）是非零整数，且对任意的正整数m和自然数k，都有$-1\le b_m+b_{m+1}+\ldots+b_{m+k}\le 1$．

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n=na_nb_n$（n=1，2，…），求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n．

1．已知$0<a<2$，复数z的实部为a，虚部为1，则$|z|$的取值范围是（ C ）

A．$(1,5)$　　B．$(1,3)$　　C．$(1,\sqrt{5})$　　D．$(1,\sqrt{3})$

【解析】$|z|=\sqrt{a^2+1}$，而$0<a<2$，即$1<a^2+1<5$，$\therefore 1<|z|<\sqrt{5}$

2．记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=\frac{1}{2}$，$S_4=20$，则$S_6=$（ D ）

A．16　　B．24　　C．36　　D．48

【解析】$S_4=2+6d=20$，$\therefore d=3$，故$S_6=3+15d=48$

3．某校共有学生2000名，各年级男、女生人数如表1．已知在全校学生中随机抽取1名，抽到二年级女生的概率是0.19．现用分层抽样的方法在全校抽取64名学生，则应在三年级抽取的学生人数为（ C ）

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

表1

A．24　　B．18　　C．16　　D．12

【解析】依题意我们知道二年级的女生有380人，那么三年级的学生的人数应该是500，即总体中各个年级的人数比例为$3:3:2$，故在分层抽样中应在三年级抽取的学生人数为$64\times\frac{2}{8}=16$

4．若变量x,y满足$\begin{cases}2x+y\leqslant 40,\\x+2y\leqslant 50,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=3x+2y$的最大值是（ C ）

A．90　　B．80　　C．70　　D．40

【解析】画出可行域,利用角点法易得答案C.

5．将正三棱柱截去三个角（如图1所示A,B,C分别是$\triangle GHI$三边的中点）得到几何体如图2，则该几何体按图2所示方向的侧视图（或称左视图）为（ A ）

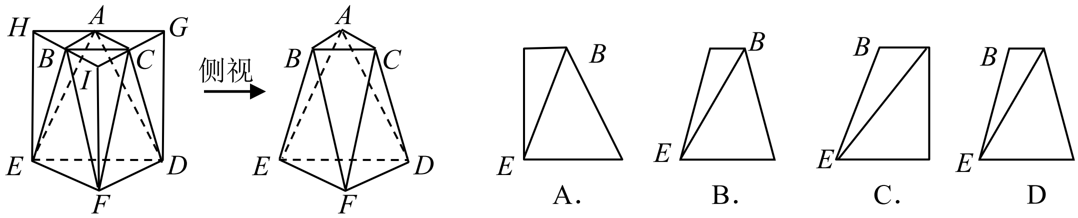


图1　　　　　　图2

【解析】解题时在图2的右边放扇墙(心中有墙),可得答案A.

6．已知命题 p:所有有理数都是实数，命题 q:正数的对数都是负数，则下列命题中为真命题的是（ D ）

A．$(\neg p)\vee q$　　　B．$p\wedge q$　　　C．$(\neg p)\wedge(\neg q)$　　　D．$(\neg p)\vee(\neg q)$

【解析】不难判断命题 p 为真命题，命题 q 为假命题，从而上述叙述中只有 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 为真命题

7．设 $a\in\mathbf{R}$，若函数 $y=e^{ax}+3x$，$x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点，则（ B ）

A．$a>-3$　　　B．$a<-3$　　　C．$a>-\dfrac{1}{3}$　　　D．$a<-\dfrac{1}{3}$

【解析】$f'(x)=3+ae^{ax}$，若函数在 $x\in R$ 上有大于零的极值点，即 $f'(x)=3+ae^{ax}=0$ 有正根。当有 $f'(x)=3+ae^{ax}=0$ 成立时,显然有 $a<0$,此时 $x=\dfrac{1}{a}\ln(-\dfrac{3}{a})$，由 $x>0$ 我们马上就能得到参数 a 的范围为 $a<-3$.

8．在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 交于点 F．若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AF}=$（ B ）

A．$\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　　B．$\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　　C．$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　　D．$\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$

【解析】此题属于中档题.解题关键是利用平面几何知识得出 $DF:FC=1:2$,然后利用向量的加减法则易得答案B.

二、填空题：本大题共7小题，考生作答6小题，每小题5分，满分30分．

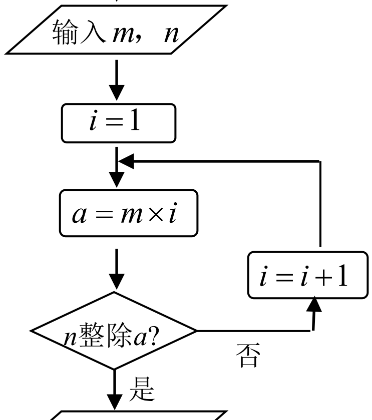
（一）必做题（9~12题）

9．阅读图3的程序框图，若输入 $m=4$，$n=6$，则输出 $a=$___，$i=$____

（注：框图中的赋值符号“＝”也可以写成“←”或“:=”）

【解析】要结束程序的运算，就必须通过 n 整除 a 的条件运算，而同时 m 也整除 a，那么 a 的最小值应为 m 和 n 的最小公倍数12，即此时有 $i=3$。

10．已知 $(1+kx^2)^6$（k 是正整数）的展开式中，x^8 的系数小于120，则 $k=$_____.



【解析】$(1+kx^2)^6$ 按二项式定理展开的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(kx^2)^r=C_6^rk^rx^{2r}$，

我们知道 x^8 的系数为 $C_6^4k^4=15k^4$，即 $15k^4<120$，也即 $k^4<8$，

而 k 是正整数，故 k 只能取1。

11．经过圆 $x^2+2x+y^2=0$ 的圆心 C，且与直线 $x+y=0$ 垂直的直线方程是 _____.

【解析】易知点C为 $(-1,0)$，而直线与 $x+y=0$ 垂直，我们设待求的

直线的方程为 $y=x+b$，将点C的坐标代入马上就能求出参数 b 的

值为 $b=1$，故待求的直线的方程为 $x-y+1=0$。

12．已知函数 $f(x)=(\sin x-\cos x)\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 的最小正周期是_____.

【解析】$f(x)=\sin^2 x-\sin x\cos x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin 2x$,此时可得函数的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$。

二、选做题（13—15题，考生只能从中选做两题）

13．（坐标系与参数方程选做题）已知曲线 C_1，C_2 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta=3$，

$\rho=4\cos\theta\left(\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为_____.

【解析】我们通过联立解方程组 $\begin{cases}\rho\cos\theta=3\\ \rho=4\cos\theta\end{cases}(\rho\ge 0,0\le\theta<\dfrac{\pi}{2})$ 解得 $\begin{cases}\rho=2\sqrt{3}\\ \theta=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$,即两曲线的交

点为 $(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6})$。

14．（不等式选讲选做题）已知 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的方程 $x^2+x+\left|a-\dfrac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根，

则 a 的取值范围是____.

【解析】方程即 $\left|a-\dfrac{1}{4}\right|+|a|=-x^2-x\in[0,\dfrac{1}{4}]$,利用绝对值的几何意义(或零点分段法进行

求解)可得实数 a 的取值范围为 $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$

15．（几何证明选讲选做题）已知 PA 是圆 O 的切线，切点为 A，$PA=2$．AC 是圆 O 的直径，PC 与圆 O 交于点 B，$PB=1$，则圆 O 的半径 $R=$_____.

【解析】依题意，我们知道$\Delta PBA\sim\Delta PAC$,由相似三角形的性质我们有$\dfrac{PA}{2R}=\dfrac{PB}{AB}$,即

$$R=\frac{PA\bullet AB}{2PB}=\frac{2\times\sqrt{2^2-1^2}}{2\times 1}=\sqrt{3}。$$

三、解答题：本大题共6小题，满分80分．解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16．（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=A\sin(x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi)$，$x\in\mathbf{R}$的最大值是1，其图像经过点$M\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

（1）求$f(x)$的解析式；（2）已知α，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$，$f(\beta)=\dfrac{12}{13}$，求$f(\alpha-\beta)$的值.

【解析】（1）依题意有$A=1$，则$f(x)=\sin(x+\varphi)$，将点$M(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2})$代入得

$\sin(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=\dfrac{1}{2}$，而$0<\varphi<\pi$，$\therefore\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{5}{6}\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，故

$f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})=\cos x$；

（2）依题意有$\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\cos\beta=\dfrac{12}{13}$，而$\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

$$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5},\sin\beta=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\frac{5}{13},$$

$$f(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{56}{65}。$$

17．（本小题满分13分）

随机抽取某厂的某种产品200件，经质检，其中有一等品126件、二等品50件、三等品20件、次品4件．已知生产1件一、二、三等品获得的利润分别为6万元、2万元、1万元，而1件次品亏损2万元．设1件产品的利润（单位：万元）为ξ.

（1）求ξ的分布列；（2）求1件产品的平均利润（即ξ的数学期望）；

（3）经技术革新后，仍有四个等级的产品，但次品率降为1%，一等品率提高为70%.如果此时要求1件产品的平均利润不小于4.73万元，则三等品率最多是多少？

【解析】ξ的所有可能取值有6，2，1，-2；$P(\xi=6)=\dfrac{126}{200}=0.63$，

$P(\xi=2)=\dfrac{50}{200}=0.25$

$P(\xi=1)=\dfrac{20}{200}=0.1$，$P(\xi=-2)=\dfrac{4}{200}=0.02$

故ξ的分布列为：

ξ	6	2	1	-2
P	0.63	0.25	0.1	0.02

（2）$E\xi=6\times0.63+2\times0.25+1\times0.1+(-2)\times0.02=4.34$

（3）设技术革新后的三等品率为x，则此时1件产品的平均利润为

$E(x)=6\times0.7+2\times(1-0.7-0.01-x)+(-2)\times0.01=4.76-x(0\le x\le0.29)$

依题意，$E(x)\ge4.73$，即$4.76-x\ge4.73$，解得$x\le0.03$ 所以三等品率最多为3%

18．（本小题满分14分）

设$b>0$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为$x^2=8(y-b)$．如图4所示，过点$F(0，b+2)$作$x$轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为$G$，已知抛物线在点$G$的切线经过椭圆的右焦点$F_1$．

（1）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（2）设$A，B$分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点P，使得$\triangle ABP$为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）．

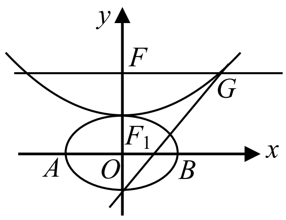


图4

【解析】（1）由$x^2=8(y-b)$得$y=\dfrac{1}{8}x^2+b$，

当$y=b+2$得$x=\pm4$，$\therefore$G点的坐标为$(4,b+2)$，$y'=\dfrac{1}{4}x$，$y'|_{x=4}=1$，

过点G的切线方程为$y-(b+2)=x-4$即$y=x+b-2$，

令$y=0$得$x=2-b$，$\therefore F_1$点的坐标为$(2-b,0)$，由椭圆方程得F_1点的坐标为$(b,0)$，

$\therefore 2-b=b$即$b=1$，即椭圆和抛物线的方程分别为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$和$x^2=8(y-1)$；

（2）$\because$过A作x轴的垂线与抛物线只有一个交点P，$\therefore$以$\angle PAB$为直角的$Rt\Delta ABP$只有一个，

同理$\therefore$ 以$\angle PBA$为直角的$Rt\Delta ABP$只有一个。

若以$\angle APB$为直角，设P点坐标为$(x,\dfrac{1}{8}x^2+1)$，A、B两点的坐标分别为$(-\sqrt{2},0)$和$(\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB} = x^2 - 2 + (\frac{1}{8}x^2 + 1)^2 = \frac{1}{64}x^4 + \frac{5}{4}x^2 - 1 = 0$。

关于 x^2 的二次方程有一大于零的解，$\therefore x$ 有两解，即以 $\angle APB$ 为直角的 $Rt\Delta ABP$ 有两个，

因此抛物线上存在四个点使得 ΔABP 为直角三角形。

19．（本小题满分14分）

设 $k \in \mathbf{R}$，函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 1 \\ -\sqrt{x-1}, & x \geqslant 1 \end{cases}$，$F(x) = f(x) - kx$，$x \in \mathbf{R}$，试讨论函数 $F(x)$ 的单调性.

【解析】$F(x) = f(x) - kx = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - kx, & x < 1, \\ -\sqrt{x-1} - kx, & x \ge 1, \end{cases}$ $F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - k, & x < 1, \\ -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - k, & x \ge 1, \end{cases}$

对于 $F(x) = \frac{1}{1-x} - kx(x < 1)$，

当 $k \le 0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是增函数；

当 $k > 0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{k}})$ 上是减函数，在 $(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}, 1)$ 上是增函数；

对于 $F(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - k(x \ge 1)$，

当 $k \ge 0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $\left[1, +\infty\right)$ 上是减函数；

当 $k < 0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $\left[1, 1 + \frac{1}{4k^2}\right)$ 上是减函数，在 $\left[1 + \frac{1}{4k^2}, +\infty\right)$ 上是增函数。

20．（本小题满分14分）

如图5所示，四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形，其中 BD 是圆的直径，$\angle ABD = 60^\circ$，$\angle BDC = 45^\circ$，PD 垂直底面 $ABCD$，$PD = 2\sqrt{2}R$，E，F 分别是 PB，CD 上的点，且 $\frac{PE}{EB} = \frac{DF}{FC}$，过点 E 作 BC 的平行线交 PC 于 G.

（1）求 BD 与平面 ABP 所成角 θ 的正弦值；（2）证明：$\triangle EFG$ 是直角三角形；

（3）当 $\frac{PE}{EB} = \frac{1}{2}$ 时，求 $\triangle EFG$ 的面积.

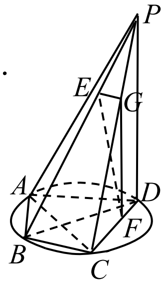


图5

【解析】（1）在 $Rt\Delta BAD$ 中，$\because \angle ABD = 60^\circ$，$\therefore AB = R, AD = \sqrt{3}R$

而PD垂直底面ABCD，$PA=\sqrt{PD^2+AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}R)^2+(\sqrt{3}R)^2}=\sqrt{11}R$

$PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}R)^2+(2R)^2}=2\sqrt{3}R$,

在ΔPAB中，$PA^2+AB^2=PB^2$, 即ΔPAB为以$\angle PAB$为直角的直角三角形。

设点D到面PAB的距离为H, 由$V_{P-ABD}=V_{D-PAB}$有$PA\bullet AB\bullet H=AB\bullet AD\bullet PD$, 即

$H=\dfrac{AD\bullet PD}{PA}=\dfrac{\sqrt{3}R\bullet 2\sqrt{2}R}{\sqrt{11}R}=\dfrac{2\sqrt{66}}{11}R$　　$\sin\theta=\dfrac{H}{BD}=\dfrac{\sqrt{66}}{11}$；

(2) $EG//BC,\therefore\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{PG}{GC}$, 而$\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}$, 即$\dfrac{PG}{GC}=\dfrac{DF}{DC},\therefore GF//PD$, $\therefore GF\perp BC$

,

$\therefore GF\perp EG$, $\therefore\Delta EFG$是直角三角形；

（3）$\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{1}{2}$时$\dfrac{EG}{BC}=\dfrac{PE}{PB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{GF}{PD}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{2}{3}$,

即$EG=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{1}{3}\times 2R\times\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{3}R, GF=\dfrac{2}{3}PD=\dfrac{2}{3}\times 2\sqrt{2}R=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}R$,

$\therefore\Delta EFG$的面积$S_{\Delta EFG}=\dfrac{1}{2}EG\bullet GF=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}R\times\dfrac{4\sqrt{2}}{3}R=\dfrac{4}{9}R^2$

21．（本小题满分12分）

设p，q为实数，α，β是方程$x^2-px+q=0$的两个实根，数列$\{x_n\}$满足$x_1=p$，$x_2=p^2-q$，$x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$（$n=3,4,\ldots$）．（1）证明：$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$；（2）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（3）若$p=1$，$q=\dfrac{1}{4}$，求$\{x_n\}$的前n项和S_n．

【解析】（1）由求根公式，不妨设$\alpha<\beta$，得$\alpha=\dfrac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2},\beta=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$$\therefore\alpha+\beta=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=p,$$

$$\alpha\beta=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\times\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=q$$

（2）设$x_n-sx_{n-1}=t(x_{n-1}-sx_{n-2})$，则$x_n=(s+t)x_{n-1}-stx_{n-2}$，由$x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$得

$\begin{cases} s+t=p \\ st=q \end{cases}$，

消去t，得$s^2-ps+q=0$，$\therefore s$是方程$x^2-px+q=0$的根，由题意可知，

$s_1=\alpha, s_2=\beta$

①当$\alpha\neq\beta$时，此时方程组$\begin{cases} s+t=p \\ st=q \end{cases}$的解记为$\begin{cases} s_1=\alpha \\ t_1=\beta \end{cases}$或$\begin{cases} s_2=\alpha \\ t_2=\beta \end{cases}$

$\therefore x_n-\alpha x_{n-1}=\beta(x_{n-1}-\alpha x_{n-2}), x_n-\beta x_{n-1}=\alpha(x_{n-1}-\beta x_{n-2}),$

即$\{x_n-t_1x_{n-1}\}$、$\{x_n-t_2x_{n-1}\}$分别是公比为$s_1=\alpha$、$s_2=\beta$的等比数列，

由等比数列性质可得$x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}$，$x_n-\beta x_{n-1}=(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}$，

两式相减，得$(\beta-\alpha)x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}-(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}$

$\because x_2=p^2-q, x_1=p$，$\therefore x_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$，$x_1=\alpha+\beta$

$\therefore (x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}=\beta^2\bullet\beta^{n-2}=\beta^n$，$(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}=\alpha^2\bullet\alpha^{n-2}=\alpha^n$

$\therefore (\beta-\alpha)x_{n-1}=\beta^n-\alpha^n$，即$\therefore x_{n-1}=\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$，$\therefore x_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$

②当$\alpha=\beta$时，即方程$x^2-px+q=0$有重根，$\therefore p^2-4q=0$，

即$(s+t)^2-4st=0$，得$(s-t)^2=0, \therefore s=t$，不妨设$s=t=\alpha$，由①可知

$x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}$，$\because \alpha=\beta$，$\therefore x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\alpha^{n-2}=\alpha^n$

即$\therefore x_n=\alpha x_{n-1}+\alpha^n$，等式两边同时除以$\alpha^n$，得$\dfrac{x_n}{\alpha^n}=\dfrac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}}+1$，即$\dfrac{x_n}{\alpha^n}-\dfrac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}}=1$

$\therefore$数列$\{\dfrac{x_n}{\alpha^n}\}$是以1为公差的等差数列，$\therefore \dfrac{x_n}{\alpha^n}=\dfrac{x_1}{\alpha}+(n-1)\times 1=\dfrac{2\alpha}{\alpha}+n-1=n+1$，

$\therefore x_n=n\alpha^n+\alpha^n$

综上所述，$x_n=\begin{cases} \dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha},(\alpha\neq\beta) \\ n\alpha^n+\alpha^n,(\alpha=\beta) \end{cases}$

（3）把$p=1$，$q=\dfrac{1}{4}$代入$x^2-px+q=0$，得$x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$，解得$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore x_n = n\bullet(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n$$

$$S_n = \left((\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots + (\frac{1}{2})^n \right) + \left((\frac{1}{2}) + 2\bullet(\frac{1}{2})^2 + 3\bullet(\frac{1}{2})^3 + \ldots + n\bullet(\frac{1}{2})^n \right)$$

$$= 1 - (\frac{1}{2})^n + \left((\frac{1}{2}) + 2\bullet(\frac{1}{2})^2 + 3\bullet(\frac{1}{2})^3 + \ldots + n\bullet(\frac{1}{2})^n \right)$$

$$= 1 - (\frac{1}{2})^n + 2 - (\frac{1}{2})^{n-1} - n(\frac{1}{2})^n = 3 - (n+3)(\frac{1}{2})^n$$