

2005 年湖南高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择）题两部分，满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本大题共 10 小，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z = i + i^2 + i^3 + i^4$ 的值是 ()
 A. -1 B. 0 C. 1 D. i

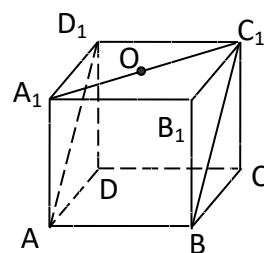
2. 函数 $f(x) = \sqrt{1-2^x}$ 的定义域是 ()
 A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, +\infty)$

3. 已知数列 $\{\log_2(a_n - 1)\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 为等差数列，且 $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \right) =$$
 ()
 A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

4. 已知点 $P(x, y)$ 在不等式组 $\begin{cases} x - 2 \leq 0, \\ y - 1 \leq 0, \\ x + 2y - 2 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域内，则 $z = x - y$ 的取值范围是 ()
 A. $[-2, -1]$ B. $[-2, 1]$ C. $[-1, 2]$ D. $[1, 2]$

5. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, O 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，则 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



6. 设 $f_0(x) = \sin x$, $f_1(x) = f_0'(x)$, $f_2(x) = f_1'(x)$, \dots , $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}$, 则 $f_{2005}(x) =$ ()
 A. $\sin x$ B. $-\sin x$ C. $\cos x$ D. $-\cos x$

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 右准线与一条渐近线交于点 A , $\triangle OAF$ 的面积为 $\frac{a^2}{2}$ (O 为原点), 则两条渐近线的夹角为 ()
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

8. 集合 $A = \{x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\}$, $B = \{x \mid |x-b| < a\}$, 若 “ $a=1$ ” 是 “ $A \cap B \neq \emptyset$ ” 的充分条件,

则 b 的取值范围是 ()

- A. $-2 \leq b < 0$ B. $0 < b \leq 2$ C. $-3 < b < -1$ D. $-1 \leq b < 2$

9. 4 位同学参加某种形式的竞赛, 竞赛规则规定: 每位同学必须从甲、乙两道题中任选一题作答, 选甲题答对得 100 分, 答错得 -100 分; 选乙题答对得 90 分, 答错得 -90 分. 若 4 位同学的总分为 0, 则这 4 位同学不同得分情况的种数是

()

- A. 48 B. 36 C. 24 D. 18

10. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积, $\lambda_1 = \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$, $\lambda_2 = \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}$,

$\lambda_3 = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$, 定义 $f(P) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $f(Q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$,

则 ()

- A. 点 Q 在 $\triangle GAB$ 内 B. 点 Q 在 $\triangle GBC$ 内
C. 点 Q 在 $\triangle GCA$ 内 D. 点 Q 与点 G 重合

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分 (第 15 小题每空 2 分), 共 20 分, 把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

11. 一工厂生产了某种产品 16800 件, 它们来自甲、乙、丙 3 条生产线, 为检查这批产品的质量, 决定采用分层抽样的方法进行抽样, 已知甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列, 则乙生产线生产了_____件产品.

12. 在 $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^6$ 的展开式中, x^2 项的系数是_____. (用数字作答)

13. 已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 A、B 两点, 且 $|AB| = \sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ _____.

14. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4)=0$, 则 $f^{-1}(4) =$ _____.

15. 设函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成图形的面积称为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的面积, 已知函数 $y = \sin nx$ 在 $[0, \frac{\pi}{n}]$ 上的面积为 $\frac{2}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), (i) $y = \sin 3x$ 在 $[0,$

$\frac{2\pi}{3}$] 上的面积为_____；(ii) $y = \sin(3x - \pi) + 1$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 上的面积为_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 12 分)

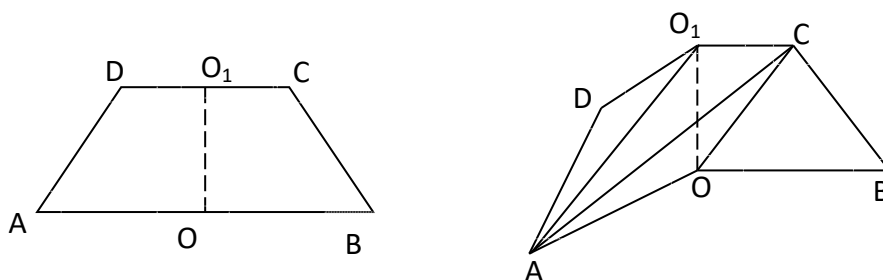
已知在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A(\sin B + \cos B) - \sin C = 0$ ， $\sin B + \cos 2C = 0$ ，求角 A、B、C 的大小。

17. (本题满分 12 分)

如图 1，已知 ABCD 是上、下底边长分别为 2 和 6，高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形，将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角，如图 2。

(I) 证明： $AC \perp BO_1$ ；

(II) 求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小。



18. (本小题满分 14 分)

某城市有甲、乙、丙 3 个旅游景点，一位客人游览这三个景点的概率分别是 0.4，0.5，0.6，且客人是否游览哪个景点互不影响，设 ξ 表示客人离开该城市时游览的景点数与没有游览的景点数之差的绝对值。

(I) 求 ξ 的分布及数学期望；

(II) 记“函数 $f(x) = x^2 - 3\xi x + 1$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增”为事件 A，求事件 A 的概率。

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点为 F_1, F_2 ，离心率为 e。直线

$l: y = ex + a$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点，P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点，设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 。

(I) 证明： $\lambda = 1 - e^2$ ；

(II) 确定 λ 的值，使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形。

20. (本小题满分 14 分)

自然状态下的鱼类是一种可再生资源, 为持续利用这一资源, 需从宏观上考察其再生能力及捕捞强度对鱼群总量的影响. 用 x_n 表示某鱼群在第 n 年年年初的总量, $n \in \mathbb{N}^*$, 且 $x_1 > 0$. 不考虑其它因素, 设在第 n 年内鱼群的繁殖量及捕捞量都与 x_n 成正比, 死亡量与 x_n^2 成正比, 这些比例系数依次为正常数 a, b, c .

(I) 求 x_{n+1} 与 x_n 的关系式;

(II) 猜测: 当且仅当 x_1, a, b, c 满足什么条件时, 每年年初鱼群的总量保持不变?
(不

要求证明)

(II) 设 $a=2, b=1$, 为保证对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 都有 $x_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$, 则捕捞强度 b 的最大允许值是多少? 证明你的结论.

21. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx, a \neq 0$.

(I) 若 $b=2$, 且 $h(x) = f(x) - g(x)$ 存在单调递减区间, 求 a 的取值范围;

(II) 设函数 $f(x)$ 的图象 C_1 与函数 $g(x)$ 图象 C_2 交于点 P, Q , 过线段 PQ 的中点作 x 轴的垂线分别交 C_1, C_2 于点 M, N , 证明 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

参考答案

一、选择题: 1—5: BACCB 6—10: CDDBA

二、填空题:

11. 5600 12. 35 13. $-\frac{1}{2}$ 14. -2 15. $\frac{4}{3}, \pi + \frac{2}{3}$

三、解答题:

16. 解法一 由 $\sin A(\sin B + \cos B) - \sin C = 0$

得 $\sin A \sin B + \sin A \cos B - \sin(A+B) = 0$.

所以 $\sin A \sin B + \sin A \cos B - \sin A \cos B - \cos A \sin B = 0$.

即 $\sin B(\sin A - \cos A) = 0$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 从而 $\cos A = \sin A$.

由 $A \in (0, \pi)$, 知 $A = \frac{\pi}{4}$. 从而 $B+C = \frac{3}{4}\pi$.

由 $\sin B + \cos 2C = 0$ 得 $\sin B + \cos 2(\frac{3}{4}\pi - B) = 0$.

即 $\sin B - \sin 2B = 0$. 亦即 $\sin B - 2 \sin B \cos B = 0$.

由此得 $\cos B = \frac{1}{2}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{5\pi}{12}$. 所以 $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{5\pi}{12}$.

解法二: 由 $\sin B + \cos 2C = 0$ 得 $\sin B = -\cos 2C = \sin(\frac{3\pi}{2} - 2C)$.

由 $0 < B, C < \pi$, 所以 $B = \frac{3\pi}{2} - 2C$ 或 $B = 2C - \frac{\pi}{2}$.

即 $B + 2C = \frac{3\pi}{2}$ 或 $2C - B = \frac{\pi}{2}$.

由 $\sin A(\sin B + \cos B) - \sin C = 0$ 得 $\sin A \sin B + \sin A \cos B - \sin(A+B) = 0$.

所以 $\sin A \sin B + \sin A \cos B - \sin A \cos B - \cos A \sin B = 0$.

即 $\sin B(\sin A - \cos A) = 0$. 因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A = \sin A$.

由 $A \in (0, \pi)$, 知 $A = \frac{\pi}{4}$. 从而 $B + C = \frac{3}{4}\pi$, 知 $B + 2C = \frac{3\pi}{2}$ 不合要求.

再由 $2C - B = \frac{1}{2}\pi$, 得 $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{5\pi}{12}$. 所以 $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{5\pi}{12}$.

17. 解法一 (I) 证明 由题设知 $OA \perp OO_1$, $OB \perp OO_1$.

所以 $\angle AOB$ 是所折成的直二面角的平面角,

即 $OA \perp OB$. 故可以 O 为原点, OA 、 OB 、 OO_1

所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

如图 3, 则相关各点的坐标是 $A(3, 0, 0)$,

$B(0, 3, 0)$, $C(0, 1, \sqrt{3})$

$O_1(0, 0, \sqrt{3})$.

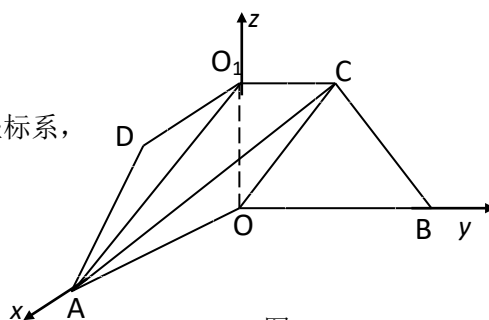


图 3

从而 $\overrightarrow{AC} = (-3, 1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BO_1} = (0, -3, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BO_1} = -3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 0$.

所以 $AC \perp BO_1$.

(II) 解: 因为 $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{OC} = -3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 0$, 所以 $BO_1 \perp OC$,

由 (I) $AC \perp BO_1$, 所以 $BO_1 \perp$ 平面 OAC , $\overrightarrow{BO_1}$ 是平面 OAC 的一个法向量.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是 O 平面 O_1AC 的一个法向量,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{O_1C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + \sqrt{3}z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{取 } z = \sqrt{3}, \quad \text{得 } \vec{n} = (1, 0, \sqrt{3}).$$

设二面角 $O-AC-O_1$ 的大小为 θ , 由 \vec{n} 、 $\overrightarrow{BO_1}$ 的方向可知 $\theta = \langle \vec{n}, \overrightarrow{BO_1} \rangle$,

所以 $\cos \theta = \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{BO_1} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{BO_1}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BO_1}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

即二面角 $O-AC-O_1$ 的大小是 $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

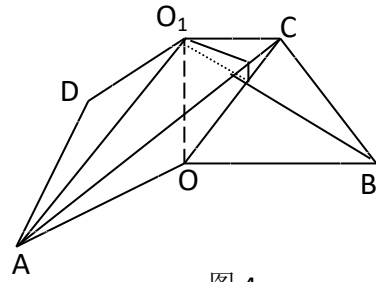


图 4

解法二 (I) 证明 由题设知 $OA \perp OO_1$, $OB \perp OO_1$, 所以 $\angle AOB$ 是所折成的直二面角的平面角, 即 $OA \perp OB$. 从而 $AO \perp$ 平面 $OBCO_1$, OC 是 AC 在面 $OBCO_1$ 内的射影.

因为 $\tan \angle OO_1B = \frac{OB}{OO_1} = \sqrt{3}$ $\tan \angle O_1OC = \frac{O_1C}{OO_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\angle OO_1B = 60^\circ$, $\angle O_1OC = 30^\circ$, 从而 $OC \perp BO_1$. 由三垂线定理得 $AC \perp BO_1$.

(II) 解 由 (I) $AC \perp BO_1$, $OC \perp BO_1$, 知 $BO_1 \perp$ 平面 AOC .

设 $OC \cap O_1B = E$, 过点 E 作 $EF \perp AC$ 于 F , 连结 O_1F (如图 4), 则 EF 是 O_1F 在平面 AOC 内的射影, 由三垂线定理得 $O_1F \perp AC$.

所以 $\angle O_1FE$ 是二面角 $O-AC-O_1$ 的平面角.

由题设知 $OA=3$, $OO_1=\sqrt{3}$, $O_1C=1$,

所以 $O_1A = \sqrt{OA^2 + OO_1^2} = 2\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{O_1A^2 + O_1C^2} = \sqrt{13}$,

从而 $O_1F = \frac{O_1A \cdot O_1C}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, 又 $O_1E = OO_1 \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin \angle O_1FE = \frac{O_1E}{O_1F} = \frac{\sqrt{13}}{4}$. 即二面角 $O-AC-O_1$ 的大小是 $\arcsin \frac{\sqrt{13}}{4}$.

18. 解: (I) 分别记“客人游览甲景点”, “客人游览乙景点”, “客人游览丙景点”为事件 A_1, A_2, A_3 . 由已知 A_1, A_2, A_3 相互独立, $P(A_1) = 0.4$, $P(A_2) = 0.5$, $P(A_3) = 0.6$.

客人游览的景点数的可能取值为 0, 1, 2, 3. 相应地, 客人没有游览的景点数的可能取值为 3, 2, 1, 0, 所以 ξ 的可能取值为 1, 3.

$$\begin{aligned} P(\xi=3) &= P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) \\ &= P(A_1) P(A_2) P(A_3) + P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) P(\overline{A_3}) \\ &= 2 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.6 = 0.24, \end{aligned}$$

$P(\xi=1) = 1 - 0.24 = 0.76$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	1	3
P	0.76	0.24

$E\xi = 1 \times 0.76 + 3 \times 0.24 = 1.48$.

(II) 解法一 因为 $f(x) = (x - \frac{3}{2}\xi)^2 + 1 - \frac{9}{4}\xi^2$,

所以函数 $f(x) = x^2 - 3\xi x + 1$ 在区间 $[\frac{3}{2}\xi, +\infty)$ 上单调递增,

要使 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 当且仅当 $\frac{3}{2}\xi \leq 2$, 即 $\xi \leq \frac{4}{3}$.

从而 $P(A) = P(\xi \leq \frac{4}{3}) = P(\xi = 1) = 0.76$.

解法二: ξ 的可能取值为 1, 3.

当 $\xi=1$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

当 $\xi=3$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - 9x + 1$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上不单调递增. 0

所以 $P(A) = P(\xi = 1) = 0.76$.

19. (I) 证法一: 因为 A、B 分别是直线 $l: y = ex + a$ 与 x 轴、 y 轴的交点, 所以 A、B 的

坐标分别是 $(-\frac{a}{e}, 0), (0, a)$. 由 $\begin{cases} y = ex + a, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -c, \\ y = \frac{b^2}{c}. \end{cases}$ 这里 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

所以点 M 的坐标是 $(-c, \frac{b^2}{a})$. 由 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 得 $(-c + \frac{a}{e}, \frac{b^2}{a}) = \lambda(\frac{a}{e}, a)$.

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{a}{e} - c = \lambda \frac{a}{e} \\ \frac{b^2}{a} = \lambda a \end{cases} \quad \text{解得 } \lambda = 1 - e^2$$

证法二: 因为 A、B 分别是直线 $l: y = ex + a$ 与 x 轴、 y 轴的交点, 所以 A、B 的坐标

分别是 $(-\frac{a}{e}, 0), (0, a)$. 设 M 的坐标是

(x_0, y_0) , 由 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 得 $(x_0 + \frac{a}{e}, y_0) = \lambda(\frac{a}{e}, a)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x_0 = \frac{a}{e}(\lambda - 1) \\ y_0 = \lambda a. \end{cases} \quad \text{因为点 M 在椭圆上, 所以 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{即 } \frac{[\frac{a}{e}(\lambda - 1)]^2}{a^2} + \frac{(\lambda a)^2}{b^2} = 1, \text{ 所以 } \frac{(1 - \lambda)^2}{e^2} + \frac{\lambda^2}{1 - e^2} = 1.$$

$$e^4 - 2(1 - \lambda)e^2 + (1 - \lambda)^2 = 0, \quad \text{解得 } e^2 = 1 - \lambda \quad \text{即 } \lambda = 1 - e^2.$$

(II) 解法一: 因为 $PF_1 \perp l$, 所以 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ + \angle BAF_1$ 为钝角, 要使 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, 必有 $|PF_1| = |F_1F_2|$, 即 $\frac{1}{2}|PF_1| = c$.

设点 F_1 到 l 的距离为 d , 由 $\frac{1}{2}|PF_1| = d = \frac{|e(-c) + 0 + a|}{\sqrt{1+e^2}} = \frac{|a-ec|}{\sqrt{1+e^2}} = c$,

得 $\frac{1-e^2}{\sqrt{1+e^2}} = e$. 所以 $e^2 = \frac{1}{3}$, 于是 $\lambda = 1 - e^2 = \frac{2}{3}$.

即当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形.

解法二: 因为 $PF_1 \perp l$, 所以 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ + \angle BAF_1$ 为钝角, 要使 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, 必有 $|PF_1| = |F_1F_2|$,

设点 P 的坐标是 (x_0, y_0) ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{y_0 - 0}{x_0 + c} = -\frac{1}{e} \\ \frac{y_0 + 0}{2} = e \frac{x_0 - c}{2} + a. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_0 = \frac{e^2 - 3}{e^2 + 1}c, \\ y_0 = \frac{2(1 - e^2)a}{e^2 + 1}. \end{cases}$$

由 $|PF_1| = |F_1F_2|$ 得 $[\frac{(e^2 - 3)c}{e^2 + 1} + c]^2 + [\frac{2(1 - e^2)a}{e^2 + 1}]^2 = 4c^2$,

两边同时除以 $4a^2$, 化简得 $\frac{(e^2 - 1)^2}{e^2 + 1} = e^2$. 从而 $e^2 = \frac{1}{3}$.

于是 $\lambda = 1 - e^2 = \frac{2}{3}$. 即当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形.

20. 解 (I) 从第 n 年初到第 $n+1$ 年初, 鱼群的繁殖量为 ax_n , 被捕捞量为 bx_n , 死亡量为

cx_n^2 , 因此 $x_{n+1} - x_n = ax_n - bx_n - cx_n^2, n \in N^* . (*)$

即 $x_{n+1} = x_n(a - b + 1 - cx_n), n \in N^* . (**)$

(II) 若每年年初鱼群总量保持不变, 则 x_n 恒等于 $x_1, n \in N^*$, 从而由 $(*)$ 式得

$x_n(a - b - cx_n)$ 恒等于 0, $n \in N^*$, 所以 $a - b - cx_1 = 0$. 即 $x_1 = \frac{a-b}{c}$.

因为 $x_1 > 0$, 所以 $a > b$.

猜测: 当且仅当 $a > b$, 且 $x_1 = \frac{a-b}{c}$ 时, 每年年初鱼群的总量保持不变.

(III) 若 b 的值使得 $x_n > 0, n \in N^*$

由 $x_{n+1} = x_n(3 - b - x_n), n \in N^*$, 知

$0 < x_n < 3 - b, n \in N^*$, 特别地, 有 $0 < x_1 < 3 - b$. 即 $0 < b < 3 - x_1$.

而 $x_1 \in (0, 2)$, 所以 $b \in (0, 1]$

由此猜测 b 的最大允许值是 1.

下证 当 $x_1 \in (0, 2)$, $b=1$ 时, 都有 $x_n \in (0, 2)$, $n \in \mathbb{N}^*$

①当 $n=1$ 时, 结论显然成立.

②假设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $x_k \in (0, 2)$,

则当 $n=k+1$ 时, $x_{k+1} = x_k(2-x_k) > 0$.

又因为 $x_{k+1} = x_k(2-x_k) = -(x_k-1)^2 + 1 \leq 1 < 2$,

所以 $x_{k+1} \in (0, 2)$, 故当 $n=k+1$ 时结论也成立.

由①、②可知, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x_n \in (0, 2)$.

综上所述, 为保证对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 都有 $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则捕捞强度 b 的最大允许值是 1.

21. 解: (I) $b=2$ 时, $h(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - 2x$,

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - ax - 2 = -\frac{ax^2 + 2x - 1}{x}.$$

因为函数 $h(x)$ 存在单调递减区间, 所以 $h'(x) < 0$ 有解.

又因为 $x > 0$ 时, 则 $ax^2 + 2x - 1 > 0$ 有 $x > 0$ 的解.

①当 $a > 0$ 时, $y = ax^2 + 2x - 1$ 为开口向上的抛物线, $ax^2 + 2x - 1 > 0$ 总有 $x > 0$ 的解;

②当 $a < 0$ 时, $y = ax^2 + 2x - 1$ 为开口向下的抛物线, 而 $ax^2 + 2x - 1 > 0$ 总有 $x > 0$ 的解;

则 $\Delta = 4 + 4a > 0$, 且方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 至少有一正根. 此时, $-1 < a < 0$.

综上所述, a 的取值范围为 $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

(II) 证法一 设点 P、Q 的坐标分别是 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $0 < x_1 < x_2$.

$$\text{则点 M、N 的横坐标为 } x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$C_1 \text{ 在点 M 处的切线斜率为 } k_1 = \frac{1}{x} \Big|_{x=\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2}{x_1 + x_2},$$

$$C_2 \text{ 在点 N 处的切线斜率为 } k_2 = ax + b \Big|_{x=\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{a(x_1 + x_2)}{2} + b.$$

假设 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线平行, 则 $k_1 = k_2$.

$$\text{即 } \frac{2}{x_1 + x_2} = \frac{a(x_1 + x_2)}{2} + b, \text{ 则}$$

$$\frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2} = \frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = \frac{a}{2}(x_2^2 + bx_2) - \left(\frac{a}{2}x_1^2 + bx_1\right)$$

$$= y_2 - y_1 = \ln x_2 - \ln x_1.$$

$$\text{所以 } \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{2\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right)}{1 + \frac{x_2}{x_1}}. \text{ 设 } t = \frac{x_2}{x_1}, \text{ 则 } \ln t = \frac{2(t-1)}{1+t}, t > 1. \text{ ①}$$

$$\text{令 } r(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{1+t}, t > 1. \text{ 则 } r'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}.$$

因为 $t > 1$ 时, $r'(t) > 0$, 所以 $r(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增. 故 $r(t) > r(1) = 0$.

则 $\ln t > \frac{2(t-1)}{1+t}$. 这与①矛盾, 假设不成立.

故 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

证法二: 同证法一得 $(x_2 + x_1)(\ln x_2 - \ln x_1) = 2(x_2 - x_1)$.

$$\text{因为 } x_1 > 0, \text{ 所以 } \left(\frac{x_2}{x_1} + 1\right) \ln \frac{x_2}{x_1} = 2\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right).$$

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1}, \text{ 得 } (t+1) \ln t = 2(t-1), t > 1. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{令 } r(t) = (t+1) \ln t - 2(t-1), t > 1, \text{ 则 } r'(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1.$$

$$\text{因为 } \left(\ln t + \frac{1}{t}\right)' = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2}, \text{ 所以 } t > 1 \text{ 时, } \left(\ln t + \frac{1}{t}\right)' > 0.$$

故 $\ln t + \frac{1}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增. 从而 $\ln t + \frac{1}{t} - 1 > 0$, 即 $r'(t) > 0$.

于是 $r(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

故 $r(t) > r(1) = 0$. 即 $(t+1) \ln t > 2(t-1)$. 这与②矛盾, 假设不成立.

故 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.