2007 年河北高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．第Ⅰ卷 1 至 2 页．第Ⅱ卷 3 至 4 页．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第Ⅰ卷

注意事项：

1．答题前，考生在答题卡上务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，并贴好条形码．请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目．

2．每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，在试题卷上作答无效．

3．本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A，B 相互独立，那么

$P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\ldots,n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

（1）α 是第四象限角，$\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$-\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{5}{13}$　　D．$-\dfrac{5}{13}$

（2）设 a 是实数，且 $\dfrac{a}{1+\mathrm{i}}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ 是实数，则 $a=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．2

（3）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$，$\boldsymbol{b}=(6,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$（　　）

A．垂直　　B．不垂直也不平行　　C．平行且同向　　D．平行且反向

（4）已知双曲线的离心率为 2，焦点是 $(-4,0)$，$(4,0)$，则双曲线方程为（　　）

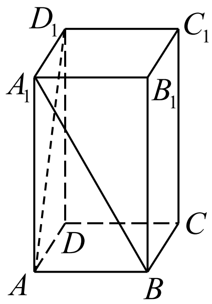
A．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{10}=1$

（5）设 a，$b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,\ a+b,\ a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},\ b\right\}$，则 $b-a=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

（6）下面给出的四个点中，到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且位于 $\begin{cases}x+y-1<0,\\x-y+1>0\end{cases}$ 表示的平面区域内的点是（　　）

A．$(1,1)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(-1,-1)$　　D．$(1,-1)$



（7）如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

（8）设 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\dfrac{1}{2}$，则 $a=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

（9）$f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$h(x)=f(x)+g(x)$，则“$f(x)$，$g(x)$ 均为偶函数”是“$h(x)$ 为偶函数”的（　　）

A．充要条件　　B．充分而不必要的条件

C．必要而不充分的条件　　D．既不充分也不必要的条件

（10）$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中，常数项为 15，则 $n=$（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

（11）抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A，$AK\perp l$，垂足为 K，则 $\triangle AKF$ 的面积是（　　）

A．4　　B．$3\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．8

（12）函数 $f(x)=\cos^2 x-2\cos^2\dfrac{x}{2}$ 的一个单调增区间是（　　）

A．$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　B．$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　C．$\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$

第Ⅱ卷

注意事项：

1．答题前，考生先在答题卡上用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，然后贴好条形码．请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目．

2．第Ⅱ卷共 2 页，请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，在试题卷上作答无效．

3．本卷共 10 题，共 90 分．

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在横线上．

（13）从班委会 5 名成员中选出 3 名，分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员，其中甲、乙二人不能担任文娱委员，则不同的选法共有__________种．（用数字作答）

（14）函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_3 x(x>0)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x)=$__________．

（15）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 S_1，$2S_2$，$3S_3$ 成等差数列，则 $\{a_n\}$ 的公比为____________．

（16）一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上．已知正三棱柱的底面边长为 2，则该三角形的斜边长为____________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（17）（本小题满分 10 分）

设锐角三角形 ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$a=2b\sin A$．

（Ⅰ）求 B 的大小；

（Ⅱ）求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围．

（18）（本小题满分 12 分）

某商场经销某商品，根据以往资料统计，顾客采用的付款期数 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

商场经销一件该商品，采用 1 期付款，其利润为 200 元；分 2 期或 3 期付款，其利润为 250 元；分 4 期或 5 期付款，其利润为 300 元．η 表示经销一件该商品的利润．

（Ⅰ）求事件 A：“购买该商品的 3 位顾客中，至少有 1 位采用 1 期付款”的概率 $P(A)$；

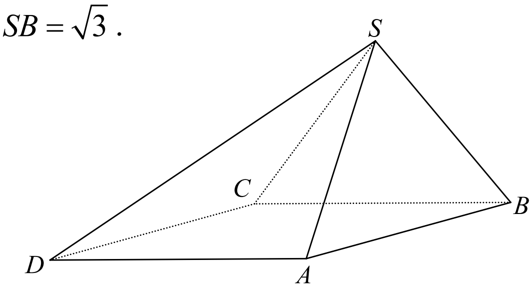
（Ⅱ）求 η 的分布列及期望 $E\eta$．

（19）（本小题满分 12 分）

四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$．已知 $\angle ABC=45^\circ$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$SA=SB=\sqrt{3}$．

（Ⅰ）证明 $SA\perp BC$；

（Ⅱ）求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小．



（20）（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$．

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$；

（Ⅱ）若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

（21）（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2. 过 F_1 的直线交椭圆于 B，D 两点，过 F_2 的直线交椭圆于 A，C 两点，且 $AC\perp BD$，垂足为 P.

（Ⅰ）设 P 点的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，证明：$\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}<1$；

（Ⅱ）求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值.

（22）（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2$，$a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)$，$n=1,2,3,\dots$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 中 $b_1=2$，$b_{n+1}=\dfrac{3b_n+4}{2b_n+3}$，$n=1,2,3,\dots$ ，

证明：$\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$，$n=1,2,3,\dots$.

参考答案

一、选择题：

（1）D	（2）B	（3）A	（4）A	（5）C	（6）C
（7）D	（8）D	（9）B	（10）D	（11）C	（12）A

二、填空题：

（13）36　　（14）$3^x(x\in\mathbf{R})$　　（15）$\dfrac{1}{3}$　　（16）$2\sqrt{3}$

三、解答题：

（17）解：

（Ⅰ）由 $a=2b\sin A$，根据正弦定理得 $\sin A=2\sin B\sin A$，所以 $\sin B=\dfrac{1}{2}$，

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅱ）$\cos A+\sin C=\cos A+\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}-A\right)$

$=\cos A+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)$

$=\cos A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$

$=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$.

由$\triangle ABC$为锐角三角形知，

$\frac{\pi}{2}-A>\frac{\pi}{2}-B$，$\frac{\pi}{2}-B=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}$，

所以$\frac{1}{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由此有$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$，

所以，$\cos A+\sin C$的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

（18）解：

（Ⅰ）由A表示事件“购买该商品的3位顾客中至少有1位采用1期付款”.

知$\overline{A}$表示事件“购买该商品的3位顾客中无人采用1期付款”

$P(\overline{A})=(1-0.4)^2=0.216$，

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.216=0.784$.

（Ⅱ）η的可能取值为200元，250元，300元.

$P(\eta=200)=P(\xi=1)=0.4$，

$P(\eta=250)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=0.2+0.2=0.4$，

$P(\eta=300)=1-P(\eta=200)-P(\eta=250)=1-0.4-0.4=0.2$.

η的分布列为

η	200	250	300
P	0.4	0.4	0.2

$E\eta=200\times0.4+250\times0.4+300\times0.2$

$=240$（元）.

（19）解法一：

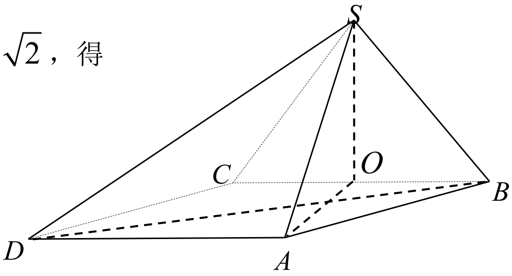
（Ⅰ）作 $SO \perp BC$，垂足为 O，连结 AO，由侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$，得 $SO \perp$ 底面 $ABCD$.

因为 $SA = SB$，所以 $AO = BO$，

又 $\angle ABC = 45^\circ$，故 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，$AO \perp BO$，

由三垂线定理，得 $SA \perp BC$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $SA \perp BC$，依题设 $AD /\!/ BC$，



故 $SA \perp AD$，由 $AD = BC = 2\sqrt{2}$，$SA = \sqrt{3}$，$AO = \sqrt{2}$，得

$SO = 1$，$SD = \sqrt{11}$.

$\triangle SAB$ 的面积 $S_1 = \dfrac{1}{2} AB \bullet \sqrt{SA^2 - \left(\dfrac{1}{2} AB\right)^2} = \sqrt{2}$.

连结 DB，得 $\triangle DAB$ 的面积 $S_2 = \dfrac{1}{2} AB \bullet AD \sin 135^\circ = 2$

设 D 到平面 SAB 的距离为 h，由于 $V_{D-SAB} = V_{S-ABD}$，得

$\dfrac{1}{3} h \bullet S_1 = \dfrac{1}{3} SO \bullet S_2$，

解得 $h = \sqrt{2}$.

设 SD 与平面 SAB 所成角为 α，则 $\sin\alpha = \dfrac{h}{SD} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

所以，直线 SD 与平面 SBC 所成的我为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

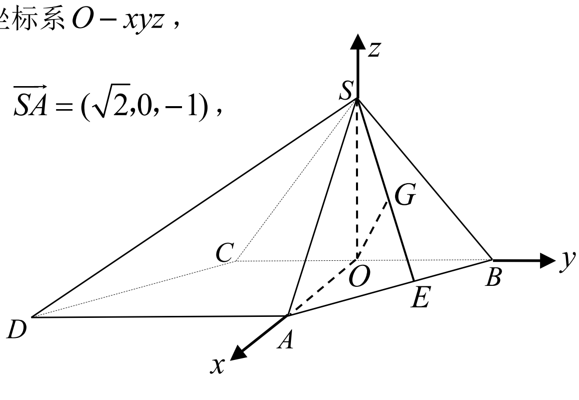
解法二：

（Ⅰ）作 $SO \perp BC$，垂足为 O，连结 AO，由侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$，得 $SO \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $SA = SB$，所以 $AO = BO$.

又 $\angle ABC = 45^\circ$，$\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，$AO \perp OB$.

如图，以 O 为坐标原点，OA 为 x 轴正向，建立直角坐标系 $O - xyz$，



$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(0,-\sqrt{2},0)$，$S(0,0,1)$，$\overrightarrow{SA} = (\sqrt{2},0,-1)$，

$\overrightarrow{CB} = (0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{SA} \bullet \overrightarrow{CB} = 0$，所以 $SA \perp BC$.

（Ⅱ）取 AB 中点 E，$E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，

连结SE，取SE中点G，连结OG，$G\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$.

$\overline{OG}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$，$\overline{SE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\overline{AB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.

$\overline{SE}\bullet\overline{OG}=0$，$\overline{AB}\bullet\overline{OG}=0$，$OG$与平面$SAB$内两条相交直线$SE$，$AB$垂直.

所以$OG\perp$平面SAB，$\overline{OG}$与$\overline{DS}$的夹角记为α，SD与平面SAB所成的角记为β，则α与β互余.

$D(\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overline{DS}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$.

$\cos\alpha=\frac{\overline{OG}\bullet\overline{DS}}{\left|\overline{OG}\right|\bullet\left|\overline{DS}\right|}=\frac{\sqrt{22}}{11}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{22}}{11}$，

所以，直线SD与平面SAB所成的角为$\arcsin\frac{\sqrt{22}}{11}$.

（20）解：

（Ⅰ）$f(x)$的导数$f'(x)=e^x+e^{-x}$.

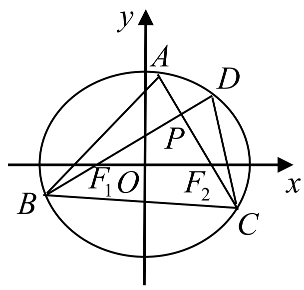
由于$e^x+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\bullet e^{-x}}=2$，故$f'(x)\geqslant 2$.

（当且仅当$x=0$时，等号成立）.

（Ⅱ）令$g(x)=f(x)-ax$，则

$g'(x)=f'(x)-a=e^x+e^{-x}-a$，

（ⅰ）若$a\leqslant 2$，当$x>0$时，$g'(x)=e^x+e^{-x}-a>2-a\geqslant 0$，



故$g(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

所以，$x\geqslant 0$时，$g(x)\geqslant g(0)$，即$f(x)\geqslant ax$.

（ⅱ）若$a>2$，方程$g'(x)=0$的正根为$x_1=\ln\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

此时，若$x\in(0，x_1)$，则$g'(x)<0$，故$g(x)$在该区间为减函数.

所以，$x\in(0，x_1)$时，$g(x)<g(0)=0$，即$f(x)<ax$，与题设$f(x)\geqslant ax$相矛盾.

综上，满足条件的a的取值范围是$\left(-\infty,2\right]$.

（21）证明：

（Ⅰ）椭圆的半焦距 $c=\sqrt{3-2}=1$，

由 $AC\perp BD$ 知点 P 在以线段 F_1F_2 为直径的圆上，故 $x_0^2+y_0^2=1$，

所以，$\dfrac{x_2^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}\leqslant\dfrac{x_0^2}{2}+\dfrac{y_0^2}{2}=\dfrac{1}{2}<1$.

（Ⅱ）（ⅰ）当 BD 的斜率 k 存在且 $k\neq 0$ 时，BD 的方程为 $y=k(x+1)$，代入椭圆方程

$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，并化简得 $(3k^2+2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$.

设 $B(x_1,\ y_1)$，$D(x_2,\ y_2)$，则

$x_1+x_2=-\dfrac{6k^2}{3k^2+2}$，$x_1x_2=\dfrac{3k^2-6}{3k^2+2}$

$|BD|=\sqrt{1+k^2}\bullet|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\bullet\left[(x_2+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\dfrac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+2}$；

因为 AC 与 BC 相交于点 P，且 AC 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，

所以，$|AC|=\dfrac{4\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{k^2}+1\right)}{3\times\dfrac{1}{k^2}+2}=\dfrac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2k^2+3}$.

四边形 $ABCD$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\bullet|BD||AC|=\frac{24(k^2+1)^2}{(3k^2+2)(2k^2+3)}\geqslant\frac{24(k^2+1)^2}{\left[\dfrac{(3k^2+2)+(2k^2+3)}{2}\right]^2}=\frac{96}{25}.$$

当 $k^2=1$ 时，上式取等号.

（ⅱ）当 BD 的斜率 $k=0$ 或斜率不存在时，四边形 $ABCD$ 的面积 $S=4$.

综上，四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为 $\dfrac{96}{25}$.

（22）解：

（Ⅰ）由题设：

$a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)$

$=(\sqrt{2}-1)(a_n-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})$

$=(\sqrt{2}-1)(a_n-\sqrt{2})+\sqrt{2}$，

$a_{n+1}-\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)(a_n-\sqrt{2})$.

所以，数列$\left\{a_n-\sqrt{2}\right\}$是首项为$2-\sqrt{2}$，公比为$\sqrt{2}-1$的等比数列，

$a_n-\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^n$，

即a_n的通项公式为$a_n=\sqrt{2}\left[(\sqrt{2}-1)^n+1\right]$，$n=1,2,3,\ldots$.

（Ⅱ）用数学归纳法证明.

（ⅰ）当$n=1$时，因$\sqrt{2}<2$，$b_1=a_1=2$，所以

$\sqrt{2}<b_1\leqslant a_1$，结论成立.

（ⅱ）假设当$n=k$时，结论成立，即$\sqrt{2}<b_k\leqslant a_{4k-3}$，

也即$0<b_k-\sqrt{2}\leqslant a_{4k-3}-\sqrt{3}$.

当$n=k+1$时，

$$b_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{3b_k+4}{2b_k+3}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{(3-2\sqrt{2})b_k+(4-3\sqrt{2})}{2b_k+3}$$

$$=\frac{(3-2\sqrt{2})(b_k-\sqrt{2})}{2b_k+3}>0,$$

又$\dfrac{1}{2b_k+3}<\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}=3-2\sqrt{2}$，

所以 $$b_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{(3-2\sqrt{2})(b_k-\sqrt{2})}{2b_k+3}$$

$$<(3-2\sqrt{2})^2(b_k-\sqrt{2})$$

$$\leqslant(\sqrt{2}-1)^4(a_{4k-3}-\sqrt{2})$$

$$=a_{4k+1}-\sqrt{2}.$$

也就是说，当$n=k+1$时，结论成立.

根据（ⅰ）和（ⅱ）知$\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$，$n=1,2,3,\ldots$.