2004年湖南高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）函数 $y=lg(1-\frac{1}{x})$ 的定义域为(　　)

A．$\{x\,|\,x<0\}$　　B．$\{x\,|\,x>1\}$　　C．$\{x\,|\,0<x<1\}$　　D．$\{x\,|\,x<0$ 或 $>1\}$

2.（5分）设直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为 α，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 a，b 满足(　　)

A．$a+b=1$　　B．$a-b=1$　　C．$a+b=0$　　D．$a-b=0$

3.（5分）设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数，则下列不等式中恒成立的是(　　)

A．$f^{-1}(x)\leqslant 2x-1$　　B．$f^{-1}(x)\leqslant 2x+1$　　C．$f^{-1}(x)\geqslant 2x-1$　　D．$f^{-1}(x)\geqslant 2x+1$

4.（5分）如果双曲线 $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点 P 到右焦点的距离等于 $\sqrt{13}$，那么点 P 到右准线的距离是(　　)

A．$\frac{13}{5}$　　B．13　　C．5　　D．$\frac{5}{13}$

5.（5分）把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，当以 A，B，C，D 为顶点的三棱锥体积最大时，直线 BD 和平面 ABC 所成角的大小为(　　)

A．$30°$　　B．$45°$　　C．$60°$　　D．$90°$

6.（5分）某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有150个、120个、180个、150个销售点．公司为了调查产品销售的情况，需从这600个销售点中抽取一个容量为100的样本，记这项调查为①；在丙地区中有20个特大型销售点，要从中抽取7个调查其销售收入和售后服务情况，记这项调查为②．则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是(　　)

A．分层抽样法，系统抽样法

B．分层抽样法，简单随机抽样法

C．系统抽样法，分层抽样法

D．简单随机抽样法，分层抽样法

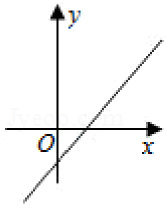
7.（5分）若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=(a+1)^{1-x}$ 在区间 $[1，2]$ 上都是减函数，则 a 的取值范围是(　　)

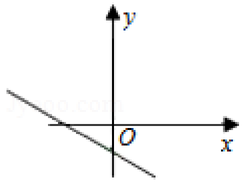
A．$(-1,0)$　　B．$(-1，0)\cup(0，1]$　　C．$(0，1]$　　D．$(0,1)$

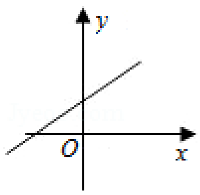
8.（5分）已知向量 $\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量 $\vec{b}=(\sqrt{3}，-1)$ 则 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值，最小值分别是(　　)

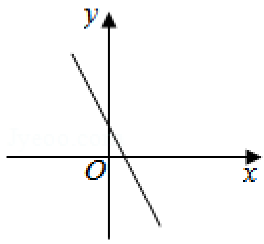
A．$4\sqrt{2}$，0　　B．4，$4\sqrt{2}$　　C．16，0　　D．4，0

9．（5 分）若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象的顶点在第四象限，则函数 $f'(x)$ 的图象是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

10．（5 分）从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形，其中直角三角形的个数为(　　)

A．56　　B．52　　C．48　　D．40

11．（5 分）农民收入由工资性收入和其它收入两部分构成．2003 年某地区农民人均收入为 3150 元（其中工资性收入为 1800 元，其它收入为 1350 元），预计该地区自 2004 年起的 5 年内，农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长，其它收入每年增加 160 元．根据以上数据，2008 年该地区农民人均收入介于(　　)

A．4200 元～4400 元　　B．4400 元～4600 元

C．4600 元～4800 元　　D．4800 元～5000 元

12．（5 分）设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in R,\ y\in R\}$，$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是(　　)

A．$m>-1$，$n<5$　　B．$m<-1$，$n<5$　　C．$m>-1$，$n>5$　　D．$m<-1$，$n>5$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）过点 $P(-1,2)$ 且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线平行的直线方程是_____．

14．（4 分）$(x^2+\dfrac{1}{x})^9$ 的展开式中的常数项为_____（用数字作答）

15．（4 分）F_1，F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点，在 C 上满足 $PF_1\perp PF_2$ 的点 P 的个数为_____．

16．（4 分）若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象有两个公共点，则 a 的取值范围是_____．

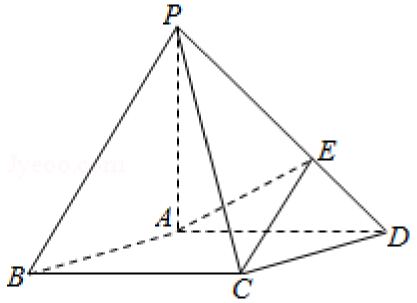
三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知 $\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=2$，求 $\dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$ 的值．

18．（12 分）如图，在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC=60^{\circ}$，$PA=AC=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，点 E 是 PD 的中点．

(I) 证明 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PB//$ 平面 EAC；

(II) 求以 AC 为棱，EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的正切值．



19．（12 分）甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件，已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\dfrac{2}{9}$．

（Ⅰ）分别求甲、乙、丙三台机床各自加工零件是一等品的概率；

（Ⅱ）从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，求至少有一个一等品的概率．

20．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a 且公比 q 不等于 1 的等比数列，S_n 是其前 n 项的和，a_1，$2a_7$，$3a_4$ 成等差数列．

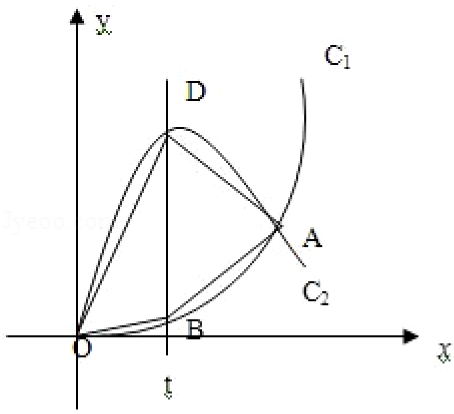
(I) 证明 $12S_3$，S_6，$S_{12}-S_6$ 成等比数列；

(II) 求和 $T_n=a_1+2a_4+3a_7+\ldots+na_{3n-2}$．

21．（12 分）如图，已知曲线 $C_1: y=x^3(x\ldots 0)$ 与曲线 $C_2: y=-2x^3+3x(x\ldots 0)$ 交于 O，A，直线 $x=t(0<t<1)$ 与曲线 C_1，C_2 分别交于 B，D．

（Ⅰ）写出四边形 $ABOD$ 的面积 S 与 t 的函数关系式 $S=f(t)$；

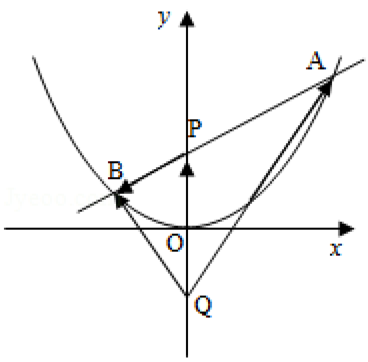
（Ⅱ）讨论 $f(t)$ 的单调性，并求 $f(t)$ 的最大值．



22．（14 分）如图，过抛物线 $x^2=4y$ 的对称轴上任一点 $P(0，m)(m>0)$ 作直线与抛物线交于 A， B 两点，点 Q 是点 P 关于原点的对称点.

(I) 设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，证明：$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$

（Ⅱ）设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$，过 A， B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线，求圆 C 的方程.



2004年湖南省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）函数 $y=lg(1-\frac{1}{x})$ 的定义域为(　　)

A． $\{x\,|\,x<0\}$　　B． $\{x\,|\,x>1\}$　　C． $\{x\,|\,0<x<1\}$　　D． $\{x\,|\,x<0$ 或 $>1\}$

【解答】解：$\because 1-\frac{1}{x}>0$，

$\therefore x<0$ 或 >1，

$\therefore$ 函数 $y=lg(1-\frac{1}{x})$ 的定义域：$\{x\,|\,x<0$ 或 $>1\}$．

故选：D．

2．（5分）设直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为 α，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 a，b 满足(　　)

A． $a+b=1$　　B． $a-b=1$　　C． $a+b=0$　　D． $a-b=0$

【解答】解：$\because \sin\alpha+\cos\alpha=0$

$\therefore \tan\alpha=-1$，$k=-1$，$-\frac{a}{b}=-1$，$a=b$，$a-b=0$

故选：D．

3．（5分）设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数，则下列不等式中恒成立的是(　　)

A． $f^{-1}(x)\leqslant 2x-1$　　B． $f^{-1}(x)\leqslant 2x+1$　　C． $f^{-1}(x)\geqslant 2x-1$　　D． $f^{-1}(x)\geqslant 2x+1$

【解答】解：由 $y=\sqrt{x}$ 解得：$x=y^2$，

则函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=x^2$，$x\geqslant 0$

$\because x^2\geqslant 2x-1$ 恒成立

$\therefore$ 不等式中恒成立的是 $f^{-1}(x)\geqslant 2x-1$

故选：C．

4．（5分）如果双曲线 $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点 P 到右焦点的距离等于 $\sqrt{13}$，那么点 P 到右准线的距离是(　　)

A． $\frac{13}{5}$　　B．13　　C．5　　D． $\frac{5}{13}$

【解答】解：由题意可知，$a=\sqrt{13}, c=5, e=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$，

点 P 到左焦点的距离 $=2\sqrt{13}-\sqrt{13}=\sqrt{13}$，

设点 P 到右准线的距离是 x，

由双曲线的第二定义可知 $\dfrac{\sqrt{13}}{x}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$，

解得 $x=\dfrac{13}{5}$；

故选：A．

5．（5 分）把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，当以 A，B，C，D 为顶点的三棱锥体积最大时，直线 BD 和平面 ABC 所成角的大小为(　　)

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

【解答】解：如图，当平面 $BAC\perp$ 平面 DAC 时，三棱锥体积最大

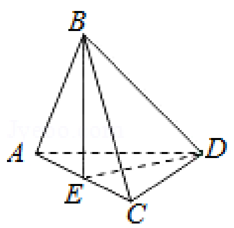
取 AC 的中点 E，则 $BE\perp$ 平面 DAC，

故直线 BD 和平面 ABC 所成的角为 $\angle DBE$

$\cos\angle DBE=\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\angle DBE=45^{\circ}$．

故选：B．



6．（5 分）某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点．公司为了调查产品销售的情况，需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本，记这项调查为①；在丙地区中有 20 个特大型销售点，要从中抽取 7 个调查其销售收入和售后服务情况，记这项调查为②．则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是(　　)

A．分层抽样法，系统抽样法

B．分层抽样法，简单随机抽样法

C．系统抽样法，分层抽样法

D．简单随机抽样法，分层抽样法

【解答】解：依据题意，第①项调查中，总体中的个体差异较大，应采用分层抽样法；

第②项调查总体中个体较少，应采用简单随机抽样法．

故选：B．

7．（5 分）若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=(a+1)^{1-x}$ 在区间 $[1，2]$ 上都是减函数，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-1,0)$　　　　B．$(-1，0)\cup(0，1]$　C．$(0，1]$　　　　D．$(0,1)$

【解答】解：$f(x)=-x^2+2ax$ 在区间 $[1，2]$ 上是减函数，故对称轴 $x=a\leqslant 1$；

$g(x)=(a+1)^{1-x}$ 在区间 $[1，2]$ 上是减函数，只需 $a+1>1$，即 $a>0$，综上可得 $0<a\leqslant 1$．

故选：C．

8．（5 分）已知向量 $\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量 $\vec{b}=(\sqrt{3}，-1)$ 则 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值，最小值分别是(　　)

A．$4\sqrt{2}$，0　　　　B．4，$4\sqrt{2}$　　　　C．16，0　　　　D．4，0

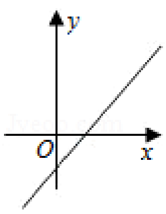
【解答】解：$2\vec{a}-\vec{b}=(2\cos\theta-\sqrt{3}，2\sin\theta+1)$，

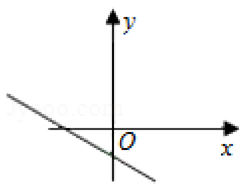
$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(2\cos\theta-\sqrt{3})^2+(2\sin\theta+1)^2}$

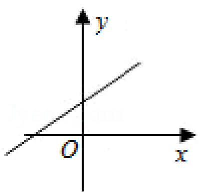
$=\sqrt{8+4\sin\theta-4\sqrt{3}\cos\theta}=\sqrt{8+8\sin(\theta-\dfrac{\pi}{3})}$，最大值为 4，最小值为 0．

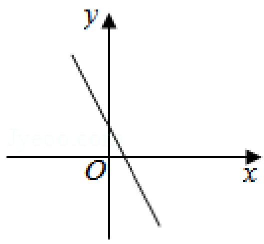
故选：D．

9．（5 分）若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象的顶点在第四象限，则函数 $f'(x)$ 的图象是(　　)


A．


B．


C．


D．

【解答】解：函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 是开口向上的二次函数，顶点在第四象限说明对称轴大于 0

根据函数 $f(x)$ 在对称轴左侧单调递减，导函数小于 0；在对称轴右侧单调递增，导函数大于 0 知，A 满足条件

故选：A．

10．（5 分）从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形，其中直角三角形的个数为(　　)

A．56　　　　B．52　　　　C．48　　　　D．40

【解答】解：如图，分两种情况，

①若取出的 3 个点在同一个表面上，

则取出的 3 个点组成的三角形，必然是直角三角形，

即有 $6C_4^3=24$ 种情况，

②若取出的 3 个点在不在同一个表面上，

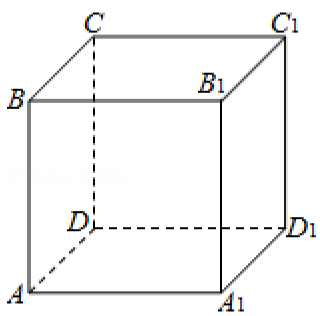
过每一条棱，有 2 个直角三角形，

如过 AD 的有 $\mathrm{Rt\Delta ADC_1}$ 与 $\mathrm{Rt\Delta ADB_1}$；

即其情况数目为$12\times2=24$；

综合可得，有 $24+24=48$ 个；

故选：C．



11．（5 分）农民收入由工资性收入和其它收入两部分构成．2003 年某地区农民人均收入为 3150 元（其中工资性收入为 1800 元，其它收入为 1350 元），预计该地区自 2004 年起的 5 年内，农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长，其它收入每年增加 160 元．根据以上数据，2008 年该地区农民人均收入介于(　　)

A．4200 元$\sim$4400 元　　　　B．4400 元$\sim$4600 元

C．4600 元$\sim$4800 元　　　　D．4800 元$\sim$5000 元

【解答】解：由题知：2004 年农民收入$=1800\times(1+6\%)+(1350+160)$；

2005 年农民收入$=1800\times(1+6\%)^2+(1350+2\times160)$；…

所以 2008 年农民收入$=1800\times(1+6\%)^5+(1350+5\times160)\approx4559$

故选：B.

12．（5 分）设集合$U=\{(x,y)\mid x\in R$，$y\in R\}$，$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$，那么点$P(2$，$3)\in A\bigcap(\complement_U B)$的充要条件是$($　　$)$

A．$m>-1$，$n<5$　　B．$m<-1$，$n<5$　　C．$m>-1$，$n>5$　　D．$m<-1$，$n>5$

【解答】解：$\complement_U B=\{(x,y)\mid x+y-n>0\}$

$\because P(2$，$3)\in A\bigcap(\complement_U B)$

$\therefore 2\times 2-3+m>0$，$2+3-n>0$

$\therefore m>-1$，$n<5$

故选：A.

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）过点$P(-1,2)$且与曲线$y=3x^2-4x+2$在点$M(1,1)$处的切线平行的直线方程是__$2x-y+4=0$__.

【解答】解：$y'=6x-4$，$\therefore$切线斜率为$6\times 1-4=2$．$\therefore$所求直线方程为$y-2=2(x+1)$，即$2x-y+4=0$.

故答案为：$2x-y+4=0$.

14．（4 分）$(x^2+\dfrac{1}{x})^9$的展开式中的常数项为__84__（用数字作答）

【解答】解：$T_{k+1}=C_9^k(x^2)^{9-k}(\dfrac{1}{x})^k=C_9^k x^{18-3k}$

令$18-3k=0$，$k=6$，故$(x^2+\dfrac{1}{x})^9$的展开式中的常数项为$T_7=C_9^6=84$

故答案为：84

15．（4 分）F_1，F_2是椭圆$C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$的焦点，在$C$上满足$PF_1\perp PF_2$的点$P$的个数为__2__.

【解答】解：设$|PF1|=m$，$|PF2|=n$

则$m+n=2a=4\sqrt{2}$，$m^2+n^2=(2c)^2=16$

$\therefore mn=\dfrac{(m+n)^2-(m^2+n^2)}{2}=8$

所以m，n是一元二次方程$x^2-4\sqrt{2}x+8=0$的两根

判别式$\triangle=32-32=0$故此方程有一个实根，

根据椭圆的对称性可知椭圆上存在 2 个点 P 满足 $PF_1 \perp PF_2$

故答案为 2．

法二：（几何法）由椭圆的图形知 $\angle F_1BF_2 = 90^0$，故这样的 P 点只能有两个．

故答案为 2．

16．（4 分）若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图象有两个公共点，则 a 的取值范围是 $0 < a < \frac{1}{2}$＿．

【解答】解：①当 $0 < a < 1$ 时，作出函数 $y = |a^x - 1|$ 图象：

若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图象有两个公共点

由图象可知 $0 < 2a < 1$，

$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}$．

②：当 $a > 1$ 时，作出函数 $y = |a^x - 1|$ 图象：

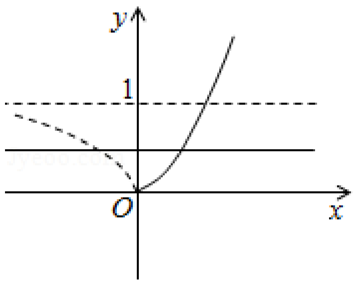
若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图象有两个公共点

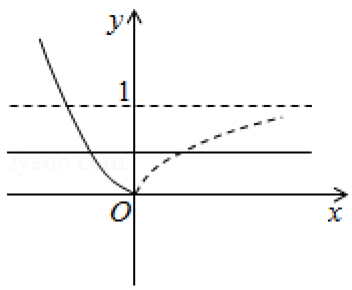
由图象可知 $0 < 2a < 1$，

此时无解．

综上：a 的取值范围是 $0 < a < \frac{1}{2}$．

故答案为：$0 < a < \frac{1}{2}$





三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2$，求 $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$ 的值．

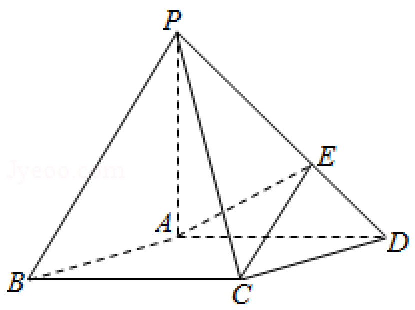
【解答】解：由 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$，得 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$．

于是 $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+1}{2\tan\alpha+1}=\frac{(\frac{1}{3})^2+1}{2\times\frac{1}{3}+1}=\frac{2}{3}$．

18．（12 分）如图，在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，$PA=AC=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，点 E 是 PD 的中点．

(I) 证明 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PB//$ 平面 EAC；

(II) 求以 AC 为棱，EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的正切值．



【解答】（Ⅰ）证明：因为底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，

所以 $AB=AD=AC=a$，

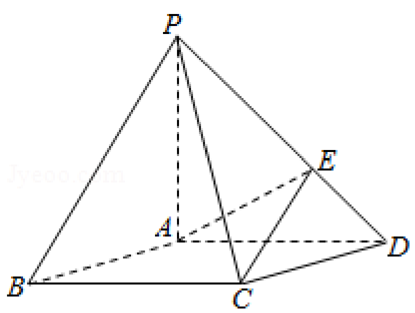
在 ΔPAB 中，由 $PA^2+AB^2=2a^2=PB^2$ 知 $PA\perp AB$．

同理，$PA\perp AD$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$．

因为 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}$．

所以 $\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{EA}$、$\overrightarrow{EC}$ 共面．

又 $PB\not\subset$ 平面 EAC，所以 $PB//$ 平面 EAC．



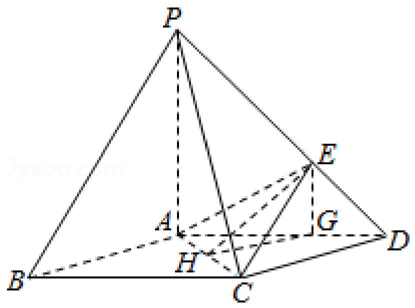
（Ⅱ）解：作 $EG//PA$ 交 AD 于 G，由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$．

知 $EG\perp$ 平面 $ABCD$．

作 $GH\perp AC$ 于 H，连接 EH，则 $EH\perp AC$，$\angle EHG$ 即为二面角 θ 的平面角．

又 E 是 PD 的中点，从而 G 是 AD 的中点，$EG=\dfrac{1}{2}a,AG=\dfrac{1}{2}a,GH=AG\sin 60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$．

所以 $\tan\theta=\dfrac{EG}{GH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．



19．（12 分）甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件，已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\dfrac{2}{9}$．

（Ⅰ）分别求甲、乙、丙三台机床各自加工零件是一等品的概率；

（Ⅱ）从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，求至少有一个一等品的概率．

【解答】解：（Ⅰ）设 A、B、C 分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的事件．

由题设条件有 $\begin{cases}P(A\bullet\vec{B})=\dfrac{1}{4}\\ P(B\bullet\vec{C})=\dfrac{1}{12}\\ P(A\bullet C)=\dfrac{2}{9}.\end{cases}$

即 $\begin{cases}P(A)\bullet(1-P(B))=\dfrac{1}{4}\\ P(B)\bullet(1-P(C))=\dfrac{1}{12}\\ P(A)\bullet P(C)=\dfrac{2}{9}.\end{cases}$

由①、③得 $P(B)=1-\dfrac{9}{8}P(C)$

代入②得 $27[P$（C）$]^{2}-51P$（C）$+22=0$．

解得 P（C）$=\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{11}{9}$（舍去）．

将 $P(C)=\frac{2}{3}$ 分别代入③、②可得

$P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4}$．

即甲、乙、丙三台机床各加工的零件是一等品的概率分别是 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3}$．

（Ⅱ）记 D 为从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，至少有一个一等品的事件，

则 $P(D)=1-P(\bar{D})=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))=1-\frac{2}{3}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$．

故从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，至少有一个一等品的概率为 $\frac{5}{6}$．

20．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a 且公比 q 不等于 1 的等比数列，S_n 是其前 n 项的和，a_1，$2a_7$，$3a_4$ 成等差数列．

(I) 证明 $12S_3$，S_6，$S_{12}-S_6$ 成等比数列；

(II) 求和 $T_n=a_1+2a_4+3a_7+\ldots+na_{3n-2}$．

【解答】（Ⅰ）证明：由 a_1，$2a_7$，$3a_4$ 成等差数列，得 $4a_7=a_1+3a_4$，

即 $4aq^6=a+3aq^3$．

变形得 $(4q^3+1)(q^3-1)=0$，

又$\because$公比 q 不等于 1，所以 $4q^3+1=0$

由 $\frac{S_6}{12S_3}=\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{12a_1(1-q^3)}{1-q}}=\frac{1+q^3}{12}=\frac{1}{16}$． $\frac{S_{12}-S_6}{S_6}=\frac{S_{12}}{S_6}-1=\frac{\frac{a_1(1-q^{12})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}-1=1+q^6-1=q^6=\frac{1}{16}$．

得 $\frac{S_6}{12S_3}=\frac{S_{12}-S_6}{S_6}$．

所以 $12S_3$，S_6，$S_{12}-S_6$ 成等比数列．

（Ⅱ）解：$T_n=a_1+2a_4+3a_7+\ldots+na_{3n-2}=a+2aq^3+3aq^6+\ldots+naq^{3(n-1)}$．

即 $T_n=a+2\bullet(-\frac{1}{4})a+3\bullet(-\frac{1}{4})^2a+\ldots+n\bullet(-\frac{1}{4})^{n-1}a$． ①

①$\times(-\frac{1}{4})$ 得：$-\frac{1}{4}T_n=-\frac{1}{4}a+2\bullet(-\frac{1}{4})^2a+3\bullet(-\frac{1}{4})^3a+\ldots+(n-1)\bullet(-\frac{1}{4})^{n-1}a+n(-\frac{1}{4})^na\ldots$②．

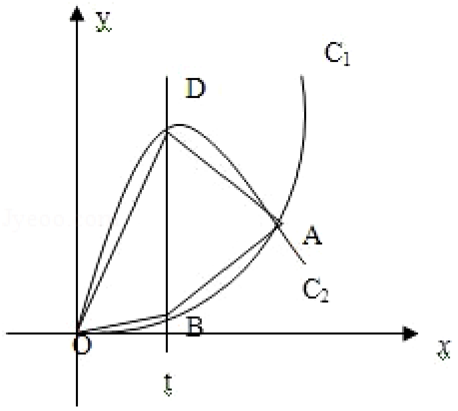
①$-$②得 $\frac{5}{4}T_n=\frac{a[1-(-\frac{1}{4})^n]}{1-(-\frac{1}{4})}-n\bullet(-\frac{1}{4})^na=\frac{4}{5}a-(\frac{4}{5}+n)\bullet(-\frac{1}{4})^na$．

所以$T_n=\frac{16}{25}a-(\frac{16}{25}+\frac{4}{5}n)\cdot(-\frac{1}{4})^n a$．

21．（12 分）如图，已知曲线$C_1: y=x^3(x\ldots 0)$与曲线$C_2: y=-2x^3+3x(x\ldots 0)$交于$O$，$A$，直线$x=t(0<t<1)$与曲线$C_1$，$C_2$分别交于$B$，$D$．

（Ⅰ）写出四边形$ABOD$的面积S与t的函数关系式$S=f(t)$；

（Ⅱ）讨论$f(t)$的单调性，并求$f(t)$的最大值．



【解答】解：（Ⅰ）由$\begin{cases}y=x^3\\y=-2x^3+3x\end{cases}$得交点$O$、$A$的坐标分别是$(0,0)$，$(1,1)$．$f(t)=S_{\Delta ABO}+S_{\Delta OBD}=\frac{1}{2}|BD|\cdot|1-0|=\frac{1}{2}|BD|=\frac{1}{2}(-3t^3+3t)$，

即$f(t)=-\frac{3}{2}(t^3-t),(0<t<1)$．

（Ⅱ）$f'(t)=-\frac{9}{2}t^2+\frac{3}{2}$．令$f'(t)=0$解得$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

当$0<t\left\langle\frac{\sqrt{3}}{3}时,f'(t)\right\rangle 0$，从而$f(t)$在区间$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$上是增函数；

当$\frac{\sqrt{3}}{3}<t<1时,f'(t)<0$，从而$f(t)$在区间$(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$上是减函数．

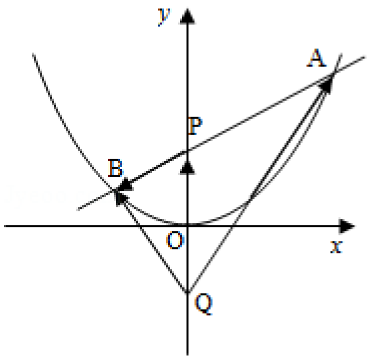
所以当$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(t)$有最大值为$f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

22．（14 分）如图，过抛物线$x^2=4y$的对称轴上任一点$P(0$，$m)(m>0)$作直线与抛物线交于A，B两点，点Q是点P关于原点的对称点．

(I)设点P分有向线段$\overrightarrow{AB}$所成的比为λ，证明：$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$

（Ⅱ）设直线AB的方程是$x-2y+12=0$，过A，B两点的圆C与抛物线在点A处有共同的切线，求圆C

的方程．



【解答】解：（Ⅰ）依题意，可设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，代入抛物线方程 $x^2=4y$ 得

$x^2-4kx-4m=0$．①

设 A、B 两点的坐标分别是 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$，则 x_1、x_2 是方程①的两根．

所以 $x_1x_2=-4m$．

由点 $P(0,m)$ 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，

得 $\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=0$,即$\lambda=-\dfrac{x_1}{x_2}$．

又点 Q 是点 P 关于原点的对称点，

故点 Q 的坐标是 $(0,-m)$，从而

$$\overrightarrow{QP}=(0,2m).\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB}=(x_1,y_1+m)-\lambda(x_2,y_2+m)=(x_1-\lambda x_2,y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m).$$

$$\overrightarrow{QP}\bullet(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})=2m[y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m]=2m[\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_1}{x_2}\bullet\frac{x_2^2}{4}+(1+\frac{x_1}{x_2})m]=2m(x_1+x_2)\bullet\frac{x_1x_2+4m}{4x_2}=2m(x_1+x_2)\bullet\frac{-4m+4m}{4x_2}=0.$$

所以 $\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$．

（Ⅱ）由 $\begin{cases}x-2y+12=0\\x^2=4y\end{cases}$ 得点 A、B 的坐标分别是 $(6,9)$、$(-4,4)$．

由 $x^2=4y$ 得 $y=\dfrac{1}{4}x^2,y'=\dfrac{1}{2}x$，

所以抛物线 $x^2=4y$ 在点 A 处切线的斜率为 $y'|_{x=6}=3$

设圆 C 的方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

则 $\begin{cases}\dfrac{b-9}{a-b}=-\dfrac{1}{3}\\(a-6)^2+(b-9)^2=(a+4)^2+(b-4)^2.\end{cases}$

解之得 $a=-\frac{3}{2},b=\frac{23}{2},r^2=(a+4)^2+(b-4)^2=\frac{125}{2}$.

所以圆 C 的方程是 $(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{23}{2})^2=\frac{125}{2}$ ，

即 $x^2+y^2+3x-23y+72=0$.