

2012年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给同的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. （5分）已知集合 $A=\{x|x^2-x-2<0\}$ ， $B=\{x|-1<x<1\}$ ，则（ ）

- A. $A\subseteq B$ B. $B\subseteq A$ C. $A=B$ D. $A\cap B=\emptyset$

【考点】18：集合的包含关系判断及应用.

【专题】5J：集合.

【分析】先求出集合A，然后根据集合之间的关系可判断

【解答】解：由题意可得， $A=\{x|-1<x<2\}$ ，

$\therefore B=\{x|-1<x<1\}$ ，

在集合B中的元素都属于集合A，但是在集合A中的元素不一定在集合B中，例如

$$x=\frac{3}{2}$$

$\therefore B\subseteq A$.

故选：B.

【点评】本题主要考查了集合之间关系的判断，属于基础试题.

2. （5分）复数 $z=\frac{-3+i}{2+i}$ 的共轭复数是（ ）

- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

【考点】A1：虚数单位i、复数；A5：复数的运算.

【专题】11：计算题.

【分析】利用复数的分子、分母同乘分母的共轭复数，把复数化为 $a+bi$ 的形式，然后求法共轭复数即可.

【解答】解：复数 $z=\frac{-3+i}{2+i}=\frac{(-3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-5+5i}{5}=-1+i$.

所以复数的共轭复数为： $-1-i$.

故选：D.

【点评】本题考查复数的代数形式的混合运算，复数的基本概念，考查计算能力.

3. (5分) 在一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ($n \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_n$ 不全相等) 的散点图中, 若所有样本点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) 都在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上, 则这组样本数据的样本相关系数为 ()

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【考点】BS: 相关系数.

【专题】29: 规律型.

【分析】所有样本点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) 都在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上, 故这组样本数据完全正相关, 故其相关系数为1.

【解答】解: 由题设知, 所有样本点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) 都在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上,

$\therefore$ 这组样本数据完全正相关, 故其相关系数为1,

故选: D.

【点评】本题主要考查样本的相关系数, 是简单题.

4. (5分) 设 F_1, F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, P 为直线 $x =$

$\frac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

【考点】K4: 椭圆的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用 $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 可得 $|PF_2| = |F_2F_1|$, 根据 P 为直

线 $x=\frac{3a}{2}$ 上一点，可建立方程，由此可求椭圆的离心率．

【解答】解：∵ $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形，

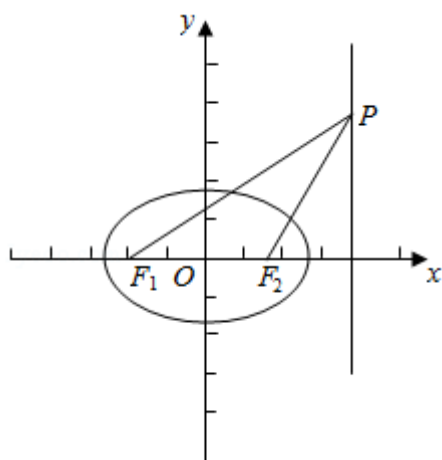
$$\therefore |PF_2| = |F_2F_1|$$

$$\therefore P \text{ 为直线 } x = \frac{3a}{2} \text{ 上一点}$$

$$\therefore 2\left(\frac{3}{2}a - c\right) = 2c$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

故选：C．



【点评】本题考查椭圆的几何性质，解题的关键是确定几何量之间的关系，属于基础题．

5. （5分）已知正三角形ABC的顶点A（1，1），B（1，3），顶点C在第一象限，若点（x，y）在 $\triangle ABC$ 内部，则 $z = -x + y$ 的取值范围是（ ）

- A. $(1 - \sqrt{3}, 2)$ B. $(0, 2)$ C. $(\sqrt{3} - 1, 2)$ D. $(0, 1 + \sqrt{3})$

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题．

【分析】由A，B及 $\triangle ABC$ 为正三角形可得，可求C的坐标，然后把三角形的各顶点代入可求z的值，进而判断最大与最小值，即可求解范围

【解答】解：设C（a，b），（a>0，b>0）

由A (1, 1) , B (1, 3) , 及 $\triangle ABC$ 为正三角形可得, $AB=AC=BC=2$

$$\text{即 } (a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 = 4$$

$$\therefore b=2, a=1+\sqrt{3} \text{ 即 } C(1+\sqrt{3}, 2)$$

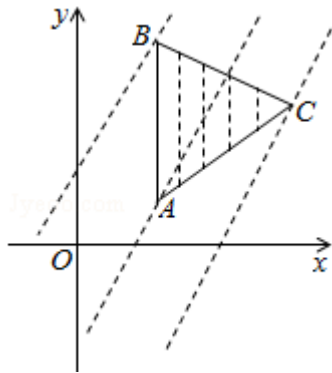
则此时直线AB的方程 $x=1$, AC的方程为 $y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$,

直线BC的方程为 $y-3=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

当直线 $x-y+z=0$ 经过点A (1, 1) 时, $z=0$, 经过点B (1, 3) $z=2$, 经过点C ($1+\sqrt{3}$, 2) 时, $z=1-\sqrt{3}$

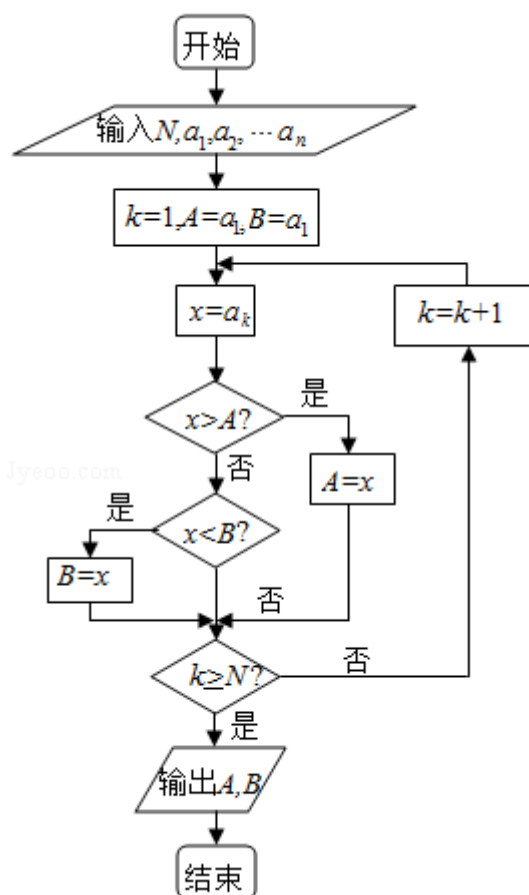
$$\therefore z_{\max}=2, z_{\min}=1-\sqrt{3}$$

故选: A.



【点评】 考查学生线性规划的理解和认识, 考查学生的数形结合思想. 属于基本题型.

6. (5分) 如果执行右边的程序框图, 输入正整数 N ($N \geq 2$) 和实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 输出A, B, 则 ()



- A. $A+B$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和
- B. $\frac{A+B}{2}$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的算术平均数
- C. A和B分别是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数和最小的数
- D. A和B分别是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最小的数和最大的数

【考点】E7：循环结构.

【专题】5K：算法和程序框图.

【分析】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：
：该程序的作用是求出 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数和最小的数.

【解答】解：分析程序中各变量、各语句的作用，

再根据流程图所示的顺序，

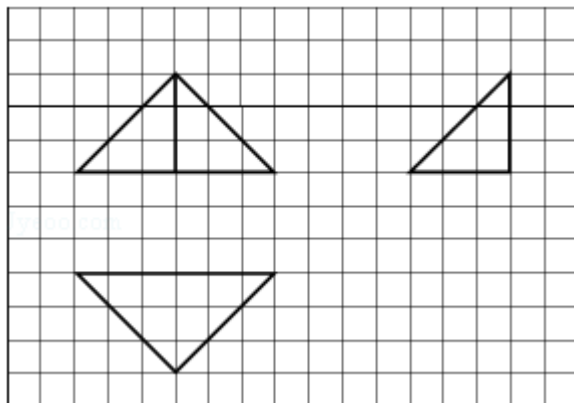
可知，该程序的作用是：求出 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数和最小的数

其中A为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大的数，B为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最小的数

故选：C.

【点评】 本题主要考查了循环结构，解题的关键是建立数学模型，根据每一步分析的结果，选择恰当的数学模型，属于中档题.

7. (5分) 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为 ()



- A. 6 B. 9 C. 12 D. 18

【考点】 L1： 由三视图求面积、体积.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 通过三视图判断几何体的特征，利用三视图的数据求出几何体的体积即可.

【解答】 解： 该几何体是三棱锥，底面是俯视图，三棱锥的高为3；

底面三角形斜边长为6，高为3的等腰直角三角形，

此几何体的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times 3 = 9$.

故选： B.

【点评】 本题考查三视图与几何体的关系，考查几何体的体积的求法，考查计算能力.

8. (5分) 平面 α 截球O的球面所得圆的半径为1，球心O到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$ ，则此球的体积为 ()

- A. $\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{3}\pi$ C. $4\sqrt{6}\pi$ D. $6\sqrt{3}\pi$

【考点】LG：球的体积和表面积.

【专题】11：计算题.

【分析】利用平面 α 截球O的球面所得圆的半径为1，球心O到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$ ，求出球的半径，然后求解球的体积.

【解答】解：因为平面 α 截球O的球面所得圆的半径为1，球心O到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$ ，

所以球的半径为： $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$.

所以球的体积为： $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$.

故选：B.

【点评】本题考查球的体积的求法，考查空间想象能力、计算能力.

9. (5分) 已知 $\omega>0$ ， $0<\phi<\pi$ ，直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$

图象的两条相邻的对称轴，则 $\phi=(\quad)$

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{3\pi}{4}$

【考点】HK：由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式.

【专题】11：计算题.

【分析】通过函数的对称轴求出函数的周期，利用对称轴以及 ϕ 的范围，确定 ϕ 的值即可.

【解答】解：因为直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$ 图象的两条相邻的对称轴，

所以 $T=2\times(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=2\pi$. 所以 $\omega=1$ ，并且 $\sin(\frac{\pi}{4}+\phi)$ 与 $\sin(\frac{5\pi}{4}+\phi)$ 分别是

最大值与最小值， $0<\phi<\pi$ ，

所以 $\phi=\frac{\pi}{4}$.

故选：A.

【点评】本题考查三角函数的解析式的求法，注意函数的最值的应用，考查计算能力.

10. (5分) 等轴双曲线C的中心在原点, 焦点在x轴上, C与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于点A和点B, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则C的实轴长为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

【考点】K1: 圆锥曲线的综合.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】设等轴双曲线C: $x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$), $y^2 = 16x$ 的准线l: $x = -4$, 由C与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线交于A, B两点, $|AB| = 4\sqrt{3}$, 能求出C的实轴长.

【解答】解: 设等轴双曲线C: $x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$),

$y^2 = 16x$ 的准线l: $x = -4$,

$\therefore$ C与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线l: $x = -4$ 交于A, B两点, $|AB| = 4\sqrt{3}$

$\therefore A(-4, 2\sqrt{3})$, $B(-4, -2\sqrt{3})$,

将A点坐标代入双曲线方程得 $a^2 = (-4)^2 - (2\sqrt{3})^2 = 4$,

$\therefore a = 2$, $2a = 4$.

故选: C.

【点评】本题考查双曲线的性质和应用, 解题时要认真审题, 仔细解答, 注意挖掘题设中的隐含条件, 合理地进行等价转化.

11. (5分) 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $4^x < \log_a x$, 则a的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, 2)$

【考点】7J: 指、对数不等式的解法.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】由指数函数和对数函数的图象和性质, 将已知不等式转化为不等式恒成立问题加以解决即可

【解答】解: $\because 0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $1 < 4^x \leq 2$

要使 $4^x < \log_a x$, 由对数函数的性质可得 $0 < a < 1$,

数形结合可知只需 $2 < \log_a x$,

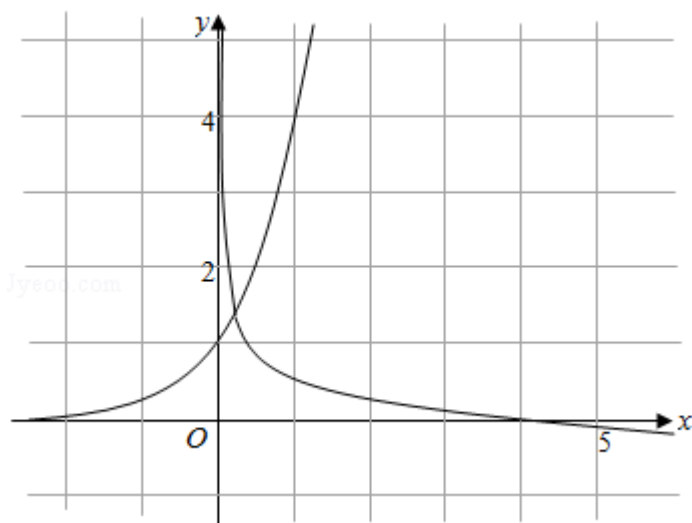
$$\therefore \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \log_a a^2 < \log_a x \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a^2 > x \end{cases} \text{对 } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 时恒成立}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a^2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$$

故选：B.



【点评】 本题主要考查了指数函数和对数函数的图象和性质，不等式恒成立问题的一般解法，属基础题

12. (5分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$ ，则 $\{a_n\}$ 的前60项和为 ()

A. 3690

B. 3660

C. 1845

D. 1830

【考点】 8E： 数列的求和.

【专题】 54： 等差数列与等比数列.

【分析】 由题意可得

$$a_2 - a_1 = 1, a_3 + a_2 = 3, a_4 - a_3 = 5, a_5 + a_4 = 7, a_6 - a_5 = 9, a_7 + a_6 = 11, \dots, a_{50} - a_{49} = 97$$

，变形可得

$$a_3+a_1=2, a_4+a_2=8, a_7+a_5=2, a_8+a_6=24, a_9+a_7=2, a_{12}+a_{10}=40, a_{13}+a_{11}=2, a_{16}+a_{14}=56, \dots \text{利用}$$

数列的结构特征，求出 $\{a_n\}$ 的前60项和.

【解答】解：由于数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$ ，故有

$$a_2-a_1=1, a_3+a_2=3, a_4-a_3=5,$$

$$a_5+a_4=7, a_6-a_5=9, a_7+a_6=11, \dots a_{50}-a_{49}=97.$$

从而可得

$$a_3+a_1=2, a_4+a_2=8, a_7+a_5=2, a_8+a_6=24, a_{11}+a_9=2, a_{12}+a_{10}=40, a_{15}+a_{13}=2, a_{16}+a_{14}=56, \dots$$

从第一项开始，依次取2个相邻奇数项的和都等于2，

从第二项开始，依次取2个相邻偶数项的和构成以8为首项，以16为公差的等差数列.

$$\{a_n\} \text{的前60项和为 } 15 \times 2 + \left(15 \times 8 + \frac{15 \times 14}{2} \times 16\right) = 1830,$$

故选：D.

【点评】本题主要考查数列求和的方法，等差数列的求和公式，注意利用数列的结构特征，属于中档题.

二. 填空题：本大题共4小题，每小题5分.

13. (5分) 曲线 $y=x(3\ln x+1)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y=4x-3$.

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】11：计算题.

【分析】先求导函数，求出切线的斜率，再求切线的方程.

【解答】解：求导函数，可得 $y'=3\ln x+4$,

当 $x=1$ 时， $y'=4$,

$\therefore$ 曲线 $y=x(3\ln x+1)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y-1=4(x-1)$ ，即 $y=4x-3$.

故答案为： $y=4x-3$.

【点评】 本题考查导数的几何意义，考查点斜式求直线的方程，属于基础题.

14. (5分) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3+3S_2=0$ ，则公比 $q=$ - 2 .

【考点】 89: 等比数列的前 n 项和.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 由题意可得， $q \neq 1$ ，由 $S_3+3S_2=0$ ，代入等比数列的求和公式可求 q

【解答】 解：由题意可得， $q \neq 1$

$$\because S_3+3S_2=0$$

$$\therefore \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{3a_1(1-q^2)}{1-q} = 0$$

$$\therefore q^3+3q^2-4=0$$

$$\therefore (q-1)(q+2)^2=0$$

$$\because q \neq 1$$

$$\therefore q = -2$$

故答案为： - 2

【点评】 本题主要考查了等比数列的求和公式的应用，解题中要注意公比 q 是否为1

15. (5分) 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 夹角为 45° ，且 $|\vec{a}|=1$ ， $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$ ，则 $|\vec{b}|=$ $3\sqrt{2}$.

【考点】 90: 平面向量数量积的性质及其运算； 9S: 数量积表示两个向量的夹角.

【专题】 11: 计算题； 16: 压轴题.

【分析】 由已知可得， $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{b}|$ ，代入 $|2\vec{a}-\vec{b}|=$

$$\sqrt{(2\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2} |\vec{b}| + |\vec{b}|^2} = \sqrt{10} \text{ 可求}$$

【解答】 解： $\because \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 45^\circ$ ， $|\vec{a}|=1$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{b}|$$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2} |\vec{b}| + |\vec{b}|^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{解得 } |\vec{b}| = 3\sqrt{2}$$

故答案为: $3\sqrt{2}$

【点评】 本题主要考查了向量的数量积 定义的应用, 向量的数量积性质 $|\vec{a}| =$

$\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ 是求解向量的模常用的方法

16. (5分) 设函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值为M, 最小值为m, 则 $M+m$
= 2.

【考点】 3N: 奇偶性与单调性的综合.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】 函数可化为 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$, 令 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$,

则 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$ 为奇函数, 从而函数 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值与最小值的和

为0, 由此可得函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值与最小值的和.

【解答】 解: 函数可化为 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$,

令 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$, 则 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$ 为奇函数,

$\therefore g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值与最小值的和为0.

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值与最小值的和为 $1+1+0=2$.

即 $M+m=2$.

故答案为: 2.

【点评】 本题考查函数的最值, 考查函数的奇偶性, 解题的关键是将函数化简

，转化为利用函数的奇偶性解题.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (12分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边， $c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a=2$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，求 b, c .

【考点】HU：解三角形.

【专题】11：计算题.

【分析】(1) 由正弦定理有： $\sqrt{3}a \sin C - c \cos A - \sin C = 0$ ，可以求出 A ;

(2) 有三角形面积以及余弦定理，可以求出 b, c .

【解答】解：(1) $c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A$ ，由正弦定理有：

$$\sqrt{3} \sin A \sin C - \sin C \cos A - \sin C = 0, \text{ 即 } \sin C \cdot (\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1) = 0,$$

又， $\sin C \neq 0$,

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin A - \cos A - 1 = 0, \text{ 即 } 2 \sin \left(A - \frac{\pi}{6} \right) = 1,$$

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{3}, \text{ 所以 } bc = 4,$$

$$a=2, \text{ 由余弦定理得: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ 即 } 4 = b^2 + c^2 - bc,$$

$$\text{即有 } \begin{cases} bc=4 \\ b^2 + c^2 - bc=4 \end{cases},$$

解得 $b=c=2$.

【点评】本题综合考查了三角公式中的正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式的综合应用，诱导公式与辅助角公式在三角函数化简中的应用是求解的基础，解题的关键是熟练掌握基本公式

18. (12分) 某花店每天以每枝5元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝10元的价格出售. 如果当天卖不完，剩下的玫瑰花做垃圾处理.

(I) 若花店一天购进17枝玫瑰花，求当天的利润 y （单位：元）关于当天需求量 n （单位：枝， $n \in \mathbb{N}$ ）的函数解析式.

(II) 花店记录了100天玫瑰花的日需求量（单位：枝），整理得如表：

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

(i) 假设花店在这100天内每天购进17枝玫瑰花，求这100天的日利润（单位：元）的平均数；

(ii) 若花店一天购进17枝玫瑰花，以100天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率，求当天的利润不少于75元的概率.

【考点】36：函数解析式的求解及常用方法；BB：众数、中位数、平均数；CS：概率的应用.

【专题】15：综合题；5I：概率与统计.

【分析】(I) 根据卖出一枝可得利润5元，卖不出一枝可得赔本5元，即可建立分段函数；

(II) (i) 这100天的日利润的平均数，利用100天的销售量除以100即可得到结论；

(ii) 当天的利润不少于75元，当且仅当日需求量不少于16枝，故可求当天的利润不少于75元的概率.

【解答】解：(I) 当日需求量 $n \geq 17$ 时，利润 $y=85$ ；当日需求量 $n < 17$ 时，利润 $y=10n - 85$ ；（4分）

$\therefore$ 利润 y 关于当天需求量 n 的函数解析式 $y = \begin{cases} 10n-85, & n < 17 \\ 85, & n \geq 17 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (6分)$

(II) (i) 这100天的日利润的平均数为 $\frac{55 \times 10 + 65 \times 20 + 75 \times 16 + 85 \times 54}{100} = 76.4$ 元；（9分）

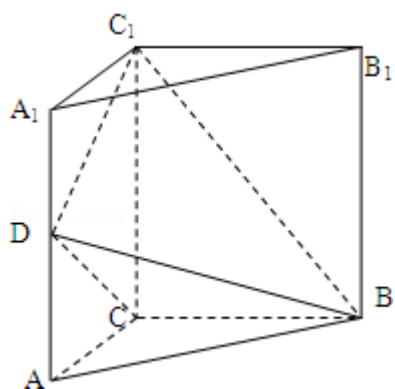
(ii) 当天的利润不少于75元，当且仅当日需求量不少于16枝，故当天的利润不少于75元的概率为 $P=0.16+0.16+0.15+0.13+0.1=0.7$. （12分）

【点评】 本题考查函数解析式的确定，考查概率知识，考查利用数学知识解决实际问题，属于中档题.

19. (12分) 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧棱垂直底面, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$
 $=\frac{1}{2}AA_1$, D是棱 AA_1 的中点.

(I) 证明: 平面 $BDC_1 \perp$ 平面 BDC

(II) 平面 BDC_1 分此棱柱为两部分, 求这两部分体积的比.



【考点】L2: 棱柱的结构特征; LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积; LY: 平面与平面垂直.

【专题】11: 计算题; 14: 证明题.

【分析】(I) 由题意易证 $DC_1 \perp$ 平面 BDC , 再由面面垂直的判定定理即可证得平面 $BDC_1 \perp$ 平面 BDC ;

(II) 设棱锥 $B - DACC_1$ 的体积为 V_1 , $AC=1$, 易求 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1+2}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积 $V=1$, 于是可得 $(V - V_1) : V_1 = 1 : 1$, 从而可得答案.

【解答】证明: (1) 由题意知 $BC \perp CC_1$, $BC \perp AC$, $CC_1 \cap AC = C$,

$\therefore BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又 $DC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

$\therefore DC_1 \perp BC$.

由题设知 $\angle A_1DC_1 = \angle ADC = 45^\circ$,

$\therefore \angle CDC_1 = 90^\circ$, 即 $DC_1 \perp DC$, 又 $DC \cap BC = C$,

$\therefore DC_1 \perp$ 平面 BDC , 又 $DC_1 \subset$ 平面 BDC_1 ,

$\therefore$ 平面 $BDC_1 \perp$ 平面 BDC ;

(2) 设棱锥 $B - DACC_1$ 的体积为 V_1 , $AC=1$, 由题意得 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1+2}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$,

又三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积 $V=1$,

$$\therefore (V - V_1) : V_1 = 1 : 1,$$

$\therefore$ 平面 BDC_1 分此棱柱两部分体积的比为 $1 : 1$.

【点评】 本题考查平面与平面垂直的判定，着重考查线面垂直的判定定理的应用与棱柱、棱锥的体积，考查分析，表达与运算能力，属于中档题.

20. (12分) 设抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 准线为 l , $A \in C$, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B, D 两点;

(1) 若 $\angle BFD = 90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;

(2) 若 A, B, F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m, n 距离的比值.

【考点】 J1: 圆的标准方程; K8: 抛物线的性质; KI: 圆锥曲线的综合.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】 (1) 由对称性知: $\triangle BFD$ 是等腰直角 $\triangle$, 斜边 $|BD| = 2p$ 点 A 到准线 l 的距离 $d = |FA| = |FB| = \sqrt{2}p$, 由 $\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD} = 4\sqrt{2}$, 知 $\frac{1}{2} \times BD \times d = \frac{1}{2} \times 2p \times \sqrt{2}p = 4\sqrt{2}$, 由此能求出圆 F 的方程.

(2) 由对称性设 $A(x_0, \frac{x_0^2}{2p})$ ($x_0 > 0$), 则 $F(0, \frac{p}{2})$ 点 A, B 关于点 F 对称得:

$$B(-x_0, p - \frac{x_0^2}{2p}) \Rightarrow p - \frac{x_0^2}{2p} = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x_0^2 = 3p^2, \text{ 得: } A(\sqrt{3}p, \frac{3p}{2}), \text{ 由此能求出坐}$$

标原点到 m, n 距离的比值.

【解答】 解: (1) 由对称性知: $\triangle BFD$ 是等腰直角 $\triangle$, 斜边 $|BD| = 2p$ 点 A 到准线 l 的距离 $d = |FA| = |FB| = \sqrt{2}p$,

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积 } S_{\triangle ABD} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times BD \times d = \frac{1}{2} \times 2p \times \sqrt{2}p = 4\sqrt{2},$$

解得 $p = 2$, 所以 F 坐标为 $(0, 1)$,

$\therefore$ 圆 F 的方程为 $x^2 + (y - 1)^2 = 8$.

(2) 由题设 $A(x_0, \frac{x_0^2}{2p})$ ($x_0 > 0$), 则 $F(0, \frac{p}{2})$,

∵A, B, F三点在同一直线m上,

又AB为圆F的直径, 故A, B关于点F对称.

由点A, B关于点F对称得: $B(-x_0, p - \frac{x_0^2}{2p}) \Rightarrow p - \frac{x_0^2}{2p} = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x_0^2 = 3p^2$

得: $A(\sqrt{3}p, \frac{3p}{2})$, 直线m: $y = \frac{\frac{3p}{2} - p}{\frac{\sqrt{3}p}{2}}x + \frac{p}{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}p}{2} = 0$,

$x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p} \Rightarrow y' = \frac{x}{p} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}p \Rightarrow$ 切点 $P(\frac{\sqrt{3}p}{3}, \frac{p}{6})$

直线n: $y - \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\sqrt{3}p}{3}) \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{6}p = 0$

坐标原点到m, n距离的比值为 $\frac{\frac{\sqrt{3}p}{2}}{\frac{\sqrt{3}p}{6}} = 3$.

【点评】 本题考查抛物线与直线的位置关系的综合应用, 具体涉及到抛物线的简单性质、圆的性质、导数的应用, 解题时要认真审题, 仔细解答, 注意合理地进行等价转化.

21. (12分) 设函数 $f(x) = e^x - ax - 2$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $a=1$, k 为整数, 且当 $x>0$ 时, $(x-k)f'(x) + x + 1 > 0$, 求 k 的最大值.

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题; 32: 分类讨论; 35: 转化思想.

【分析】 (I) 求函数的单调区间, 可先求出函数的导数, 由于函数中含有字母 a , 故应按 a 的取值范围进行分类讨论研究函数的单调性, 给出单调区间;

(II) 由题设条件结合 (I), 将不等式, $(x-k)$

$f'(x) + x + 1 > 0$ 在 $x>0$ 时成立转化为 $k < \frac{x+1}{e^x-1} + x$ ($x>0$) 成立, 由此问题转

化为求 $g(x) = \frac{x+1}{e^x-1} + x$ 在 $x>0$ 上的最小值问题, 求导, 确定出函数的最小值

, 即可得出 k 的最大值;

【解答】 解: (I) 函数 $f(x) = e^x - ax - 2$ 的定义域是 $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - a$,

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) = e^x - a \geq 0$, 所以函数 $f(x) = e^x - ax - 2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调

递增.

若 $a > 0$, 则当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) = e^x - a < 0$;

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) = e^x - a > 0$;

所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(II) 由于 $a=1$, 所以, $(x-k)f'(x) + x + 1 = (x-k)(e^x - 1) + x + 1$

故当 $x > 0$ 时, $(x-k)f'(x) + x + 1 > 0$ 等价于 $k < \frac{x+1}{e^x-1} + x$ ($x > 0$) ①

$$\text{令 } g(x) = \frac{x+1}{e^x-1} + x, \text{ 则 } g'(x) = \frac{-xe^x-1}{(e^x-1)^2} + 1 = \frac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}$$

由(I)知, 当 $a=1$ 时, 函数 $h(x) = e^x - x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $h(1) < 0$, $h(2) > 0$,

所以 $h(x) = e^x - x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的零点,

故 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的零点, 设此零点为 α , 则有 $\alpha \in (1, 2)$

当 $x \in (0, \alpha)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\alpha, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$;

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $g(\alpha)$.

又由 $g'(\alpha) = 0$, 可得 $e^\alpha = \alpha + 2$ 所以 $g(\alpha) = \alpha + 1 \in (2, 3)$

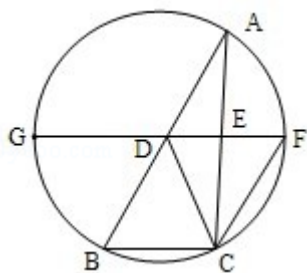
由于①式等价于 $k < g(\alpha)$, 故整数 k 的最大值为2.

【点评】 本题考查利用导数求函数的最值及利用导数研究函数的单调性, 解题的关键是第一小题应用分类的讨论的方法, 第二小题将问题转化为求函数的最小值问题, 本题考查了转化的思想, 分类讨论的思想, 考查计算能力及推理判断的能力, 综合性强, 是高考的重点题型, 难度大, 计算量也大, 极易出错.

22. (10分) 如图, D, E分别为 $\triangle ABC$ 边AB, AC的中点, 直线DE交 $\triangle ABC$ 的外接圆于F, G两点, 若 $CF \parallel AB$, 证明:

(1) $CD = BC$;

(2) $\triangle BCD \sim \triangle GBD$.



【考点】N4：相似三角形的判定．

【专题】14：证明题．

【分析】（1）根据D，E分别为 $\triangle ABC$ 边AB，AC的中点，可得 $DE \parallel BC$ ，证明四边形ADCF是平行四边形，即可得到结论；

（2）证明两组对应角相等，即可证得 $\triangle BCD \sim \triangle GBD$ ．

【解答】证明：（1） $\because$ D，E分别为 $\triangle ABC$ 边AB，AC的中点

$\therefore DE \parallel BC$ ， $AD = DB$

$\because AB \parallel CF$ ， $\therefore$ 四边形BDFC是平行四边形

$\therefore CF \parallel BD$ ， $CF = BD$

$\therefore CF \parallel AD$ ， $CF = AD$

$\therefore$ 四边形ADCF是平行四边形

$\therefore AF = CD$

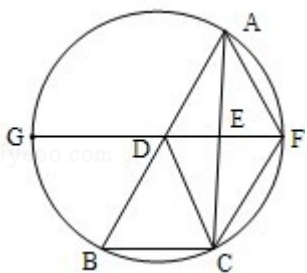
$\because \widehat{BC} = \widehat{AF}$ ， $\therefore BC = AF$ ， $\therefore CD = BC$ ．

（2）由（1）知 $\widehat{BC} = \widehat{AF}$ ，所以 $\widehat{BF} = \widehat{AC}$ ．

所以 $\angle BGD = \angle DBC$ ．

因为 $GF \parallel BC$ ，所以 $\angle BDG = \angle ADF = \angle DBC = \angle BDC$ ．

所以 $\triangle BCD \sim \triangle GBD$ ．



【点评】 本题考查几何证明选讲，考查平行四边形的证明，考查三角形的相似

，属于基础题.

23. 选修4-4：坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=2\cos\phi \\ y=3\sin\phi \end{cases}$ (ϕ 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴的

正半轴为极轴建立坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$ ，正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上，且 A, B, C, D 依逆时针次序排列，点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$.

(1) 求点 A, B, C, D 的直角坐标；

(2) 设 P 为 C_1 上任意一点，求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

【考点】 Q4：简单曲线的极坐标方程；Q8：点的极坐标和直角坐标的互化；QL：椭圆的参数方程.

【专题】 15：综合题；16：压轴题.

【分析】 (1) 确定点 A, B, C, D 的极坐标，即可得点 A, B, C, D 的直角坐标；

(2) 利用参数方程设出 P 的坐标，借助于三角函数，即可求得 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

【解答】 解：(1) 点 A, B, C, D 的极坐标为

$$(2, \frac{\pi}{3}), (2, \frac{5\pi}{6}), (2, \frac{4\pi}{3}), (2, \frac{11\pi}{6})$$

点 A, B, C, D 的直角坐标为 $(1, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 1), (-1, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, -1)$

(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $\begin{cases} x_0=2\cos\phi \\ y_0=3\sin\phi \end{cases}$ (ϕ 为参数)

$$t = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4x^2 + 4y^2 + 16 = 32 + 20\sin^2\phi$$

$$\because \sin^2\phi \in [0, 1]$$

$$\therefore t \in [32, 52]$$

【点评】 本题考查极坐标与直角坐标的互化，考查圆的参数方程的运用，属于中档题.

24. 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-2|$

- ①当 $a = -3$ 时，求不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集；
 ② $f(x) \leq |x - 4|$ 若的解集包含 $[1, 2]$ ，求 a 的取值范围.

【考点】R5：绝对值不等式的解法.

【专题】17：选作题；59：不等式的解法及应用；5T：不等式.

【分析】①不等式等价于 $\begin{cases} x \leq 2 \\ 3-x+2-x \geq 3 \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3-x+x-2 \geq 3 \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3+x-2 \geq 3 \end{cases}$ ，
 求出每个不等式组的解集，再取并集即得所求.

②原命题等价于 $-2 - x \leq a \leq 2 - x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立，由此求得求 a 的取值范围.

【解答】解：（1）当 $a = -3$ 时， $f(x) \geq 3$ 即 $|x - 3| + |x - 2| \geq 3$ ，即

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 3-x+2-x \geq 3 \end{cases}, \text{ 可得 } x \leq 1; \\ \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3-x+x-2 \geq 3 \end{cases}, \text{ 可得 } x \in \emptyset; \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x-3+x-2 \geq 3 \end{cases}, \text{ 可得 } x \geq 4.$$

取并集可得不等式的解集为 $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$.

（2）原命题即 $f(x) \leq |x - 4|$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立，等价于 $|x+a| + 2 - x \leq 4 - x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立，

等价于 $|x+a| \leq 2$ ，等价于 $-2 \leq x+a \leq 2$ ， $-2 - x \leq a \leq 2 - x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立.

故当 $1 \leq x \leq 2$ 时， $-2 - x$ 的最大值为 $-2 - 1 = -3$ ， $2 - x$ 的最小值为0，

故 a 的取值范围为 $[-3, 0]$.

【点评】本题主要考查绝对值不等式的解法，关键是去掉绝对值，化为与之等价的不等式组来解，体现了分类讨论的数学思想，属于中档题.