

2012 年高考湖北理科数学试卷解析（教师版）

【试卷总评】

试题紧扣 2012 年《考试大纲》，题目新颖，难度适中。本卷注重对基础知识和数学思想方法的全面考查，同时又强调考查学生的基本能力。选择题与填空题主要体现了基础知识与数学思想方法的考查；第 17、18、19、20、21、22 题分别从三角函数、立体几何、数列、解析几何、函数与导数等重点知识进行了基础知识、数学思想方法及基本能力的考查。第 14 与 15 题考查了选学讲内容，试卷整体体现坚持注重基础知识，全面考查了理解能力、推理能力、分析解决问题的能力。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 方程 $x^2 + 6x + 13 = 0$ 的一个根是()

A $-3+2i$ B $3+2i$ C $-2+3i$ D $2+3i$

【答案】A

【解析】由求根公式得 $\frac{-6 \pm \sqrt{52 - 36i}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$ ，故选 A.

【考点定位】本小题考查复系数方程的根的求法。复数是高考的一个热点问题，年年必考，以选择或填空题的形式考查，主要复数的定义、运算以及复数的几何意义，难度不大。

2. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{C}_R \mathbb{Q}, x_0^3 \in \mathbb{Q}$ ”的否定是()

A $\exists x_0 \notin \mathbb{C}_R \mathbb{Q}, x_0^3 \in \mathbb{Q}$ B $\exists x_0 \in \mathbb{C}_R \mathbb{Q}, x_0^3 \notin \mathbb{Q}$

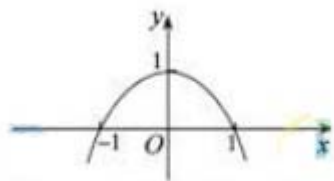
C $\forall x_0 \notin \mathbb{C}_R \mathbb{Q}, x_0^3 \in \mathbb{Q}$ D $\forall x_0 \in \mathbb{C}_R \mathbb{Q}, x_0^3 \notin \mathbb{Q}$

【答案】D

【解析】存在性命题的否定是全称命题： $\forall x_0 \in \mathbb{C}_R \mathbb{Q}, x_0^3 \notin \mathbb{Q}$ ，故选 D.

【考点定位】本小题考查存在性命题的否定是全称命题。这两种特殊命题的否定是高考的热点问题之一，几乎年年必考，同学们必须熟练掌握。

3. 已知二次函数 $y = f(x)$ 的图像如图所示，则它与 x 轴所围图形的面积为()



第3题图

- A. $\frac{2\pi}{5}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】B

【解析】由题意知，二次函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴所围图形

$$\left(-\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}, \text{ 所以选 B.}$$

【考点定位】本小题考查利用定积分求平面图形的面积问题，不难。定积分是理科生高考的热点分问题之一，几乎年年必考，熟练其基础知识是解决好本类题目的关键。

4. 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为 ()

- A. $\frac{8\pi}{3}$ B. 3π C. $\frac{10\pi}{3}$ D. 6π

【答案】B

【解析】由三视图可知，该几何体为一底面半径为 1 且高为 2 的圆柱与一圆锥组合而成，所以其体积为 $2\pi + \pi = 3\pi$ ，故选 B。

【考点定位】本小题考查立体几何中的三视图。三视图是新课标新增内容，是高考的重点和热点，年年必考，一般以选择或填空题的形式出现，经常与表面积、体积相结合来考查。

5. 设 $a \in \mathbb{Z}$ ，且 $0 \leq a \leq 13$ ，若 $51^{2012} + a$ 能被 13 整除，则 $a = ()$

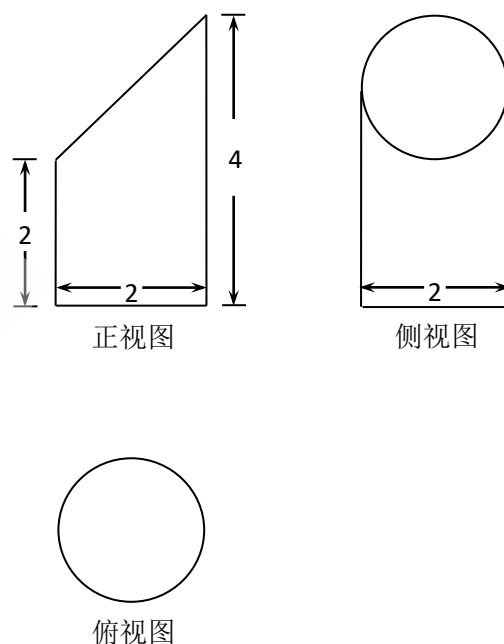
- A. 0 B. 1 C. 11 D. 12

【答案】D

【解析】因为 51^{2012} 的个位数是 1，且 $a \in \mathbb{Z}$ ， $0 \leq a \leq 13$ ， $51^{2012} + a$ 能被 13 整除，所以 $a = 12$ ，故选 D。

【考点定位】本小题考查整除问题，属中档题。

6. 设 a, b, c, x, y, z 是正数，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 10, x^2 + y^2 + z^2 = 40, ax + by + cz = 20$ ，则 $\frac{a+b+c}{x+y+z} = ()$



第4题图

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】由于 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$, 等号成立当且仅当

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = t$, 则 $a=tx$ $b=ty$ $c=tz$, $t^2(x^2+y^2+z^2) = 10$, 所以由题知 $t = 1/2$, 又

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a+b+c}{x+y+z}$, 所以 $\frac{a+b+c}{x+y+z} = t = 1/2$, 答案选 C.

【考点定位】本题主要考察了柯西不等式的使用以及其取等条件.

7. 定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列, 则称 $f(x)$ 为“保等比数列函数”. 现有定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +$

$\infty)$ 上的如下函数: ① $f(x) = x^2$; ② $f(x) = 2^x$; ③ $f(x) = \sqrt{|x|}$; ④ $f(x) = \ln|x|$.

则其中是“保等比数列函数”的 $f(x)$ 的序号为 ()

- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ②④

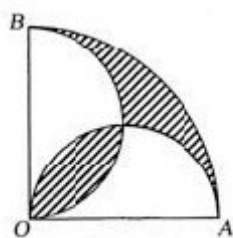
【答案】C

【解析】若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则数列 $\{a_n^2\}$ 也是等比数列, 故①是“保等比数列函数”;

同理③对应的函数也是等比数列, 故选 C.

【考点定位】本小题以数列为载体, 给出了新定义的题目, 考查了同学们利用所学问题分析问题和解决问题的能力, 近几年的高考对这类问题的考查越来越重视, 应引起我们的重视.

8. 如图, 在圆心角为直角的扇形 OAB 中, 分别以 OA , OB 为直径作两个半圆. 在扇形 OAB 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率是 ()



第 8 题图

- A. $1 - \frac{2}{\pi}$ B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$ C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

【答案】 A

【解析】 设以 OA , OB 为直径作两个半圆的半径为 r , 则扇形 OAB 的半径为 $2r$, 则左下方的阴影区域面积为 $2(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2) = (\frac{1}{2}\pi - 1)r^2$, 右上方阴影区域面积为 $\frac{1}{4}\pi \cdot 4r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 - [\frac{1}{2}r^2 - (\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2)] = \frac{1}{2}\pi r^2 - r^2$, 所以阴影部分的面积为 $\pi r^2 - 2r^2$, 又因为扇形 OAB 的面积为 $\frac{1}{4}\pi \cdot 4r^2 = \pi r^2$, 所以阴影部分的概率为 $\frac{\pi r^2 - 2r^2}{\pi r^2} = 1 - \frac{2}{\pi}$, 故选 A.

【考点定位】 本小题考查几何概型, 对文科来说, 几何概型与古典概型是概率部分的重点内容, 是高考的热点内容, 年年必考, 熟练这两种模型是解答好本类题目的关键.

9. 函数 $f(x) = x \cos x^2$ 在区间 $[0, 4]$ 上的零点个数为()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】 C

【解析】 令 $f(x) = x \cos x^2 = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\cos x^2 = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x^2 = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $x \in [0, 4]$, 所以 $x = 0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}, \sqrt{\frac{7\pi}{2}}, \sqrt{\frac{9\pi}{2}}$, 共有 6 个零点, 故选

C.

【考点定位】 本小题考查函数的零点求解. 函数的零点即方程 $f(x) = 0$ 的根, 是高考的热点问题之一, 年年必考, 掌握求函数零点的几种方法(解方程法、画图象法等).

10. 我国古代数学名著《九章算术》中“开立圆术”曰: 置积尺数, 以十六乘之, 九而一, 所得开立方除之, 即立圆径, “开立圆术”相当于给出了已知球的体积 V , 求其直径 d 的一个近似公式 $d \approx \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$. 人们还用过一些类似的近似公式. 根据 $\pi = 3.14159 \dots$ 判断, 下列近似

公式中最精确的一个是()

A. $d \approx \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$ B. $d \approx \sqrt[3]{2V}$ C. $d \approx \sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$ D. $d \approx \sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

【答案】 D

【解析】

由 $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3$, 得 $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$, 设选项中常数为 $\frac{a}{b}$, 则 $\pi = \frac{6b}{a}$; A中代入得 $\pi = \frac{6 \times 9}{16} = 3.375$,

B中代入得 $\pi = \frac{6 \times 1}{2} = 3$, C中代入得 $\pi = \frac{6 \times 157}{300} = 3.14$, D中代入得 $\pi = \frac{6 \times 11}{21} = 3.142857$,

由于D中值最接近 π 的真实值, 故选择D.

【考点定位】 本小题考查球的有关问题. 球问题也是高考的一个重点问题之一, 熟练球的基础知识是解决好本题的关键.

二、填空题: 本大题共 6 小题, 考试共需作答 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请将答案填在答题卡对应题号的位置上. 答错位置, 书写不清, 模棱两可均不得分.

(一) 必考题 (11-14 题)

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C, 所对的边分别是 a, b, c. 若 $(a+b-c)(a+b+c) = ab$,

则角 C = _____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

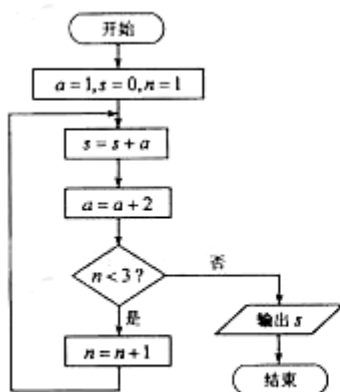
【解析】 因为 $(a+b-c)(a+b+c) = ab$, 所以 $(a+b)^2 - c^2 = ab$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 = -ab$,

所以由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$, 又因为角 c 是三角形的一个内角,

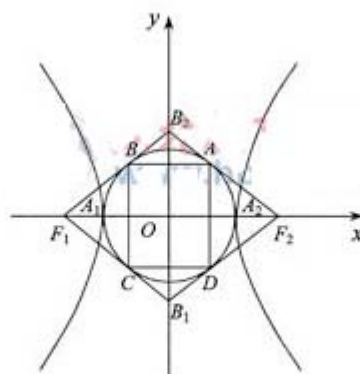
所以角 $C = \frac{2\pi}{3}$.

【考点定位】 本小题考查三角形中余弦定理的应用. 正余弦定理的应用是高考的重点和热点, 几乎年年必考, 可能以选择或填空题的形式单独考查, 也可能与三角函数相结合在解答题中考查, 属于中低档题.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果 $s =$ _____.



第 12 题图



第 14 题图

【答案】9

【解析】当 $a=1, n=1$ 时, 计算出的 $s=1$; 当 $a=3, n=2$ 时, 计算出的 $s=4$; 当 $a=5, n=3$ 时, 计算出的 $s=9$, 此时输出的结果 $s=9$.

【考点定位】本小题考查框图的基本知识. 框图是高考的热点内容之一, 年年必考, 经常以选择或填空题的形式出现一个, 难度不大, 熟练基本算法以及算到哪一步是解决好本类问题的关键.

13. 回文数是指从左到右与从右到左读都一样的正整数. 如 22, 11, 3443, 94249 等. 显然 2 位回文数有 9 个: 11, 22, 33, ..., 99. 3 位回文数有 90 个: 101, 111, 121, ..., 191, 202, ..., 999. 则

(I) 4 位回文数有 _____ 个;

(II) $2n+1$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 位回文数有 _____ 个.

【答案】(I) 90; (II) $9 \cdot 10^n$

【解析】(I) 由题意知, 4 位回文数有 1001, 1111, 1221, ..., 1991, 2002, 2112, ..., 9999, 共 90 个; (II) 因为 3 位回文数有 90 个, 5 位回文数有 900 个, ..., 所以 $2n+1$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 位回文数有 $9 \cdot 10^n$ 个.

【考点定位】本小题考查归纳推理. 推理归纳与类比, 是近几年高考的一个热点问题之一, 几乎年年必考, 一般以选择或填空题的形式考查, 应熟练基础知识.

14. 如图, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的两顶点为 A_1, A_2 , 虚轴两端点为 B_1, B_2 , 两焦点为 F_1, F_2 . 若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 切点分别为 A, B, C, D. 则

(I) 双曲线的离心率 $e =$ _____;

(II) 菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的面积 S_1 与矩形 ABCD 的面积 S_2 的比值 $\frac{S_1}{S_2} =$ _____.

【答案】 (I) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; (II) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$

【解析】 (I) 在 ΔF_1OB_1 中, $a \cdot \sqrt{b^2+c^2} = bc$, 整理得 $c^4 - 3a^2c^2 + a^4 = 0$, 即

$e^4 - 3e^2 + 1 = 0$, 解得 $e^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 即 $e = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; (II) 由图分析可知, 面积之比为

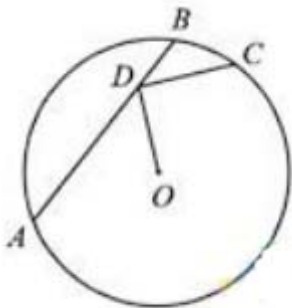
$$\frac{bc}{a^2} = \sqrt{\frac{(c^2 - a^2)c^2}{a^4}} = \sqrt{e^4 - e^2} = \frac{\sqrt{5}+2}{2}.$$

【考点定位】 本小题考查双曲线离心率的求解, 考查直线与圆相切等基础知识, 考查了同学们分析问题和解决问题的能力.

(二) 选考题 (请考生在第 15、16 两题中任选一题作答, 请先在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框用 2B 铅笔涂黑, 如果全选, 则按第 15 题作答结果计分.)

15. (选修 4-1: 几何证明选讲)

如图, 点 D 在 $\odot O$ 的弦 AB 上移动, $AB=4$, 连接 OD, 过点 D 作 OD 的垂线交 $\odot O$ 于点 C, 则 CD 的最大值为_____.



第 15 题图

【答案】 2

【解析】 因为 CD 垂直 OD, 且圆的半径一定, 所以要使 CD 最大, 只须 OD 最小即可, 而当 OD 垂直 AB 时, OD 最小, 此时 $OD = \sqrt{r^2 - 4}$ (r 为圆的半径), 所以 CD 的最大值为 $\sqrt{r^2 - (r^2 - 4)} = 2$.

【考点定位】 本小题考查直线与圆有关知识. 直线与圆是解析几何中重点内容之一, 也是高考的一个热点问题.

16. (选修 4-4: 坐标系与参数方程)

在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$

与曲线 $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = (t - 1)^2 \end{cases}$ (t 为参数) 相较于 A, B 来两点，则线段 AB 的中点的直角坐标为_____.

【答案】 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

【解析】 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 在直角坐标系下的一般方程为 $y = x (x \in R)$ ，将参数方程 $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = (t - 1)^2 \end{cases}$ (t 为

参数) 转化为直角坐标系下的一般方程为 $y = (t - 1)^2 = (x - 1 - 1)^2 = (x - 2)^2$ 表示一条抛物线，联立上面两个方程消去 y 有 $x^2 - 5x + 4 = 0$ ，设 A, B 两点及其中点 P 的横坐标分

别为 x_A, x_B, x_0 ，则有韦达定理 $x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5}{2}$ ，又由于点 P 点在直线 $y = x$ 上，因此

AB 的中点 $P(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

【考点定位】 本小题考查坐标系与参数方程，属选学内容之一，熟练掌握基础知识是解决好本题目的关键.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

已知向量 $\mathbf{a} = (\cos \omega x - \sin \omega x, \sin \omega x)$ ， $\mathbf{b} = (-\cos \omega x - \sin \omega x, 2\sqrt{3} \cos \omega x)$ ，设函数

$f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \lambda$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称，其中 ω, λ 为常数，且 $\omega \in (\frac{1}{2}, 1)$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 若 $y = f(x)$ 的图像经过点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ ，求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{5}]$ 上的取值范围。

【解析】 (1) 因为 $f(x) = \sin^2 \omega x - \cos^2 \omega x + 2\sqrt{3} \sin \omega x \cdot \cos \omega x + \lambda$

$= -\cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x + \lambda = 2 \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) + \lambda$ ，所以

由直线 $x = \pi$ 是 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴，可得 $\sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) = \pm 1$ ，

所以 $2\omega x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，即 $\omega = \frac{k}{2} + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}$ ，又因为 $\omega \in (\frac{1}{2}, 1), k \in \mathbf{Z}$ ，

所以 $k = 1$ ，故 $\omega = \frac{5}{6}$ ，所以 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{6\pi}{5}$ 。

(2) 由 $y = f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ ，得 $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ ，

即 $\lambda = -2\sin(\frac{5}{6} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = -2\sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$, 即 $\lambda = -\sqrt{2}$, 故 $f(x) = 2\sin(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{2}$,

由 $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{5}$ 得 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$,

得 $-1 - \sqrt{2} \leq 2\sin(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{2} \leq 2 - \sqrt{2}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{5}]$ 上的取值范围为 $[-1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}]$.

【考点定位】 本题考查三角函数的化简与求值, 考查三角函数的基本性质等基础知识, 考查考生分析问题与解决问题的能力.

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 前三项的和为 -3, 前三项的积为 8.

(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 a_2, a_3, a_1 成等比数列, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项的和.

【解析】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$,

$$\text{由题意得 } \begin{cases} 3a_1 + 3d = -3 \\ a_1(a_1 + d)(a_1 + 2d) = 8 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = -4 \\ d = 3 \end{cases},$$

所以由等差数列通项公式可得: $a_n = 3n + 5$ 或 $a_n = 3n - 7$.

(2) 当 $a_n = 3n + 5$ 时, a_2, a_3, a_1 分别为 $-1, -4, 2$, 不成等比数列;

当 $a_n = 3n - 7$ 时, a_2, a_3, a_1 分别为 $-1, 2, -4$, 成等比数列, 满足条件, 所以

$$|a_n| = |3n - 7| = \begin{cases} -3n + 7, n = 1, 2 \\ 3n - 7, n \geq 3 \end{cases}, \text{ 设数列 } \{|a_n|\} \text{ 的前 } n \text{ 项的和为 } S_n, \text{ 则}$$

当 $n = 1$ 时, $S_1 = |a_1| = 4$; 当 $n = 2$ 时, $S_2 = |a_1| + |a_2| = 5$;

当 $n \geq 3$ 时, $S_n = S_2 + |a_3| + |a_4| + \dots + |a_n| = 5 + (3 \times 3 - 7) + (3 \times 4 - 7) + \dots + (3n - 7)$

$$= 5 + \frac{(n-2)[2 + (3n-7)]}{2} = \frac{3}{2}n^2 - \frac{11}{2}n + 10, \text{ 当 } n = 2 \text{ 时, 满足上式,}$$

$$\text{综上, } S_n = \begin{cases} 4, n = 1 \\ \frac{3}{2}n^2 - \frac{11}{2}n + 10, n \geq 2 \end{cases}.$$

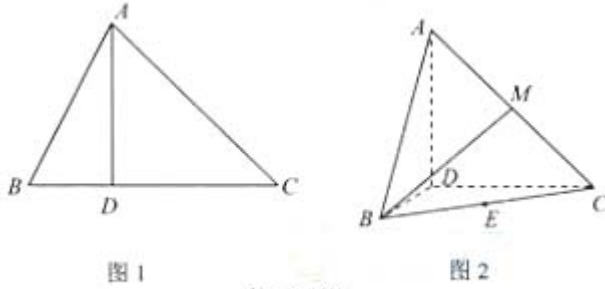
【考点定位】 本小题考查等差数列的通项公式的求解, 考查等比数列等基础知识, 考查分类讨论的数学思想方法, 考查同学们运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

19. (本小题满分 12 分)

如图 1, $\angle ACB=45^\circ$, $BC=3$, 过动点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足 D 在线段 BC 上且异于点 B, 连接 AB, 沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC=90^\circ$ (如图 2 所示),

(1) 当 BD 的长为多少时, 三棱锥 A-BCD 的体积最大;

(2) 当三棱锥 A-BCD 的体积最大时, 设点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点, 试在棱 CD 上确定一点 N, 使得 $EN \perp BM$, 并求 EN 与平面 BMN 所成角的大小



第 19 题图

【解析】

(I) **解法 1:** 在如图 1 所示的 $\triangle ABC$ 中, 设 $BD = x$ ($0 < x < 3$), 则 $CD = 3 - x$.

由 $AD \perp BC$, $\angle ACB = 45^\circ$ 知, $\triangle ADC$ 为等腰直角三角形, 所以 $AD = CD = 3 - x$.

由折起前 $AD \perp BC$ 知, 折起后 (如图 2), $AD \perp DC$, $AD \perp BD$, 且 $BD \cap DC = D$,

所以 $AD \perp$ 平面 BCD . 又 $\angle BDC = 90^\circ$, 所以 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot CD = \frac{1}{2}x(3-x)$. 于是

$$V_{A-BCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3}(3-x) \cdot \frac{1}{2}x(3-x) = \frac{1}{12} \cdot 2x(3-x)(3-x)$$

$$\leq \frac{1}{12} \left[\frac{2x + (3-x) + (3-x)}{3} \right]^3 = \frac{2}{3},$$

当且仅当 $2x = 3 - x$, 即 $x = 1$ 时, 等号成立,

故当 $x = 1$, 即 $BD = 1$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大.

解法 2:

同解法 1, 得 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3}(3-x) \cdot \frac{1}{2}x(3-x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x)$.

令 $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x)$, 由 $f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3) = 0$, 且 $0 < x < 3$, 解得 $x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值.

故当 $BD = 1$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大.

(II) **解法 1:** 以 D 为原点, 建立如图 a 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

由 (I) 知, 当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, $BD=1$, $AD=CD=2$.

于是可得 $D(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $A(0, 0, 2)$, $M(0, 1, 1)$, $E(\frac{1}{2}, 1, 0)$,

且 $\overline{BM} = (-1, 1, 1)$.

设 $N(0, \lambda, 0)$, 则 $\overline{EN} = (-\frac{1}{2}, \lambda-1, 0)$. 因为 $EN \perp BM$ 等价于 $\overline{EN} \cdot \overline{BM} = 0$, 即

$$(-\frac{1}{2}, \lambda-1, 0) \cdot (-1, 1, 1) = \frac{1}{2} + \lambda - 1 = 0, \text{ 故 } \lambda = \frac{1}{2}, N(0, \frac{1}{2}, 0).$$

所以当 $DN = \frac{1}{2}$ (即 N 是 CD 的靠近点 D 的一个四等分点) 时, $EN \perp BM$.

设平面 BMN 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \perp \overline{BN}, \\ \mathbf{n} \perp \overline{BM}, \end{cases}$ 及 $\overline{BN} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$,

$$\text{得 } \begin{cases} y = 2x, \\ z = -x. \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{n} = (1, 2, -1).$$

设 EN 与平面 BMN 所成角的大小为 θ , 则由 $\overline{EN} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$, 可得

$$\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overline{EN}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overline{EN}|} = \frac{|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|}{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \theta = 60^\circ.$$

故 EN 与平面 BMN 所成角的大小为 60° .

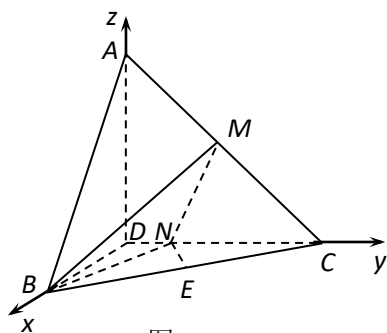


图 a

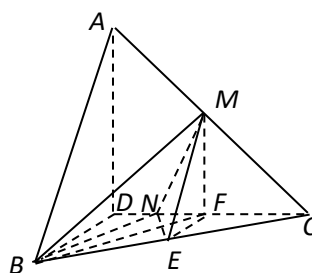


图 b

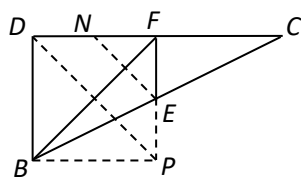


图 c

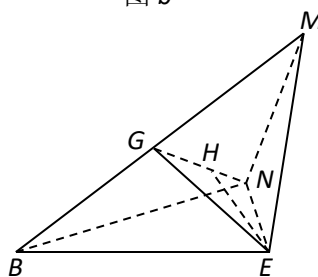


图 d

第 19 题解答图

解法 2: 由 (I) 知, 当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, $BD=1$, $AD=CD=2$.

如图 b, 取 CD 的中点 F , 连结 MF , BF , EF , 则 $MF \parallel AD$.

由 (I) 知 $AD \perp$ 平面 BCD , 所以 $MF \perp$ 平面 BCD .

如图 c, 延长 FE 至 P 点使得 $FP=DB$, 连 BP , DP , 则四边形 $DBPF$ 为正方形,

所以 $DP \perp BF$. 取 DF 的中点 N , 连结 EN , 又 E 为 FP 的中点, 则 $EN \parallel DP$,

所以 $EN \perp BF$. 因为 $MF \perp$ 平面 BCD , 又 $EN \subset$ 面 BCD , 所以 $MF \perp EN$.

又 $MF \cap BF = F$, 所以 $EN \perp$ 面 BMF . 又 $BM \subset$ 面 BMF , 所以 $EN \perp BM$.

因为 $EN \perp BM$ 当且仅当 $EN \perp BF$, 而点 F 是唯一的, 所以点 N 是唯一的.

即当 $DN = \frac{1}{2}$ (即 N 是 CD 的靠近点 D 的一个四等分点), $EN \perp BM$.

连接 MN , ME , 由计算得 $NB = NM = EB = EM = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

所以 $\triangle NMB$ 与 $\triangle EMB$ 是两个共底边的全等的等腰三角形,

如图 d 所示, 取 BM 的中点 G , 连接 EG , NG ,

则 $BM \perp$ 平面 EGN . 在平面 EGN 中, 过点 E 作 $EH \perp GN$ 于 H ,

则 $EH \perp$ 平面 BMN . 故 $\angle ENH$ 是 EN 与平面 BMN 所成的角.

在 $\triangle EGN$ 中, 易得 $EG = GN = NE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\triangle EGN$ 是正三角形,

故 $\angle ENH = 60^\circ$, 即 EN 与平面 BMN 所成角的大小为 60° .

【考点定位】 本小题考查空间线线与线面的位置关系, 考查同学们的空间想象能力、逻辑推理能力、分析问题与解决问题的能力.

20. (本小题满分12分)

根据以往的经验, 某工程施工期间的将数量 X (单位: mm) 对工期的影响如下表:

降水量 X	$X < 300$	$300 \leq X < 700$	$700 \leq X < 900$	$X \geq 900$
工期延误天数 Y	0	2	6	10

历年气象资料表明, 该工程施工期间降水量 X 小于 300, 700, 900 的概率分别为 0.3, 0.7, 0.9, 求:

(I) 工期延误天数 Y 的均值与方差;

(II) 在降水量 X 至少是 300 的条件下, 工期延误不超过 6 天的概率.

【解析】

(I) 由已知条件和概率的加法公式有:

$$P(X < 300) = 0.3, P(300 \leq X < 700) = P(X < 700) - P(X < 300) = 0.7 - 0.3 = 0.4,$$

$$P(700 \leq X < 900) = P(X < 900) - P(X < 700) = 0.9 - 0.7 = 0.2.$$

$$P(X \geq 900) = 1 - P(X < 900) = 1 - 0.9 = 0.1.$$

所以 Y 的分布列为:

Y	0	2	6	10
P	0.3	0.4	0.2	0.1

于是, $E(Y) = 0 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 6 \times 0.2 + 10 \times 0.1 = 3$;

$$D(Y) = (0-3)^2 \times 0.3 + (2-3)^2 \times 0.4 + (6-3)^2 \times 0.2 + (10-3)^2 \times 0.1 = 9.8.$$

故工期延误天数 Y 的均值为 3, 方差为 9.8.

(II) 由概率的加法公式, $P(X \geq 300) = 1 - P(X < 300) = 0.7$,

$$\text{又 } P(300 \leq X < 900) = P(X < 900) - P(X < 300) = 0.9 - 0.3 = 0.6.$$

$$\text{由条件概率, 得 } P(Y \leq 6 | X \geq 300) = P(X < 900 | X \geq 300) = \frac{P(300 \leq X < 900)}{P(X \geq 300)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}.$$

故在降水量 x 至少是 300 mm 的条件下, 工期延误不超过 6 天的概率是 $\frac{6}{7}$.

【考点定位】 本小题考查概率与统计的基础知识. 概率统计是高考的一个热点问题, 几乎年年必考, 熟练基础知识是解决好类题目的关键.

21. (本小题满分13分)

设 A 是单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的任意一点, i 是过点 A 与 x 轴垂直的直线, D 是直线 i 与 x 轴的交点, 点 M 在直线 i 上, 且满足 $|DM| = m|DA|$ ($m > 0$, 且 $m \neq 1$). 当点 A 在圆上运动时, 记点 M 的轨迹为曲线 C .

(I) 求曲线 C 的方程, 判断曲线 C 为何种圆锥曲线, 并求焦点坐标;

(II) 过原点且斜率为 k 的直线交曲线 C 于 P 、 Q 两点, 其中 P 在第一象限, 它在 y 轴上的射影为点 N , 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H , 是否存在 m , 使得对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

【解析】

(I) 如图 1, 设 $M(x, y)$, $A(x_0, y_0)$, 则由 $|DM| = m|DA|$ ($m > 0$, 且 $m \neq 1$),

$$\text{可得 } x = x_0, |y| = m|y_0|, \text{ 所以 } x_0 = x, |y_0| = \frac{1}{m}|y|. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{因为 } A \text{ 点在单位圆上运动, 所以 } x_0^2 + y_0^2 = 1. \quad \textcircled{2}$$

将①式代入②式即得所求曲线 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1$ ($m > 0$, 且 $m \neq 1$).

因为 $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 所以

当 $0 < m < 1$ 时, 曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆,

两焦点坐标分别为 $(-\sqrt{1-m^2}, 0)$, $(\sqrt{1-m^2}, 0)$;

当 $m > 1$ 时, 曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆,

两焦点坐标分别为 $(0, -\sqrt{m^2-1})$, $(0, \sqrt{m^2-1})$.

(II) 解法 1: 如图 2、3, $\forall k > 0$, 设 $P(x_1, kx_1)$, $H(x_2, y_2)$, 则 $Q(-x_1, -kx_1)$, $N(0, kx_1)$,

直线 QN 的方程为 $y = 2kx + kx_1$, 将其代入椭圆 C 的方程并整理可得

$$(m^2 + 4k^2)x^2 + 4k^2x_1x + k^2x_1^2 - m^2 = 0.$$

依题意可知此方程的两根为 $-x_1$, x_2 , 于是由韦达定理可得

$$-x_1 + x_2 = -\frac{4k^2x_1}{m^2 + 4k^2}, \text{ 即 } x_2 = \frac{m^2x_1}{m^2 + 4k^2}.$$

因为点 H 在直线 QN 上, 所以 $y_2 - kx_1 = 2kx_2 = \frac{2km^2x_1}{m^2 + 4k^2}$.

于是 $\overrightarrow{PQ} = (-2x_1, -2kx_1)$, $\overrightarrow{PH} = (x_2 - x_1, y_2 - kx_1) = (-\frac{4k^2x_1}{m^2 + 4k^2}, \frac{2km^2x_1}{m^2 + 4k^2})$.

而 $PQ \perp PH$ 等价于 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PH} = \frac{4(2-m^2)k^2x_1^2}{m^2 + 4k^2} = 0$,

即 $2-m^2 = 0$, 又 $m > 0$, 得 $m = \sqrt{2}$,

故存在 $m = \sqrt{2}$, 使得在其对应的椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$.

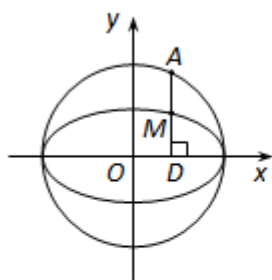


图 1

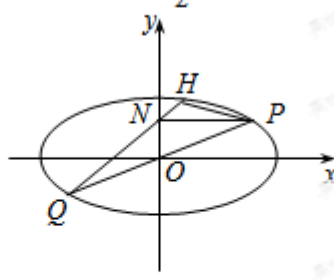


图 2 ($0 < m < 1$)

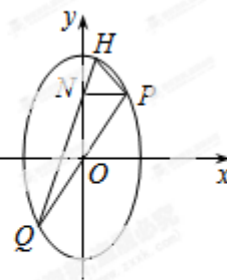


图 3 ($m > 1$)

解法 2: 如图 2、3, $\forall x_1 \in (0, 1)$, 设 $P(x_1, y_1)$, $H(x_2, y_2)$, 则 $Q(-x_1, -y_1)$, $N(0, y_1)$,

因为 P, H 两点在椭圆 C 上, 所以 $\begin{cases} m^2x_1^2 + y_1^2 = m^2, \\ m^2x_2^2 + y_2^2 = m^2, \end{cases}$ 两式相减可得

$$m^2(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0. \quad \text{③}$$

依题意, 由点 P 在第一象限可知, 点 H 也在第一象限, 且 P, H 不重合,

故 $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0$. 于是由③式可得

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = -m^2 \quad \text{④}$$

又 Q, N, H 三点共线, 所以 $k_{QN} = k_{QH}$, 即 $\frac{2y_1}{x_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$.

于是由④式可得 $k_{PQ} \cdot k_{PH} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = -\frac{m^2}{2}$.

而 $PQ \perp PH$ 等价于 $k_{PQ} \cdot k_{PH} = -1$, 即 $-\frac{m^2}{2} = -1$, 又 $m > 0$, 得 $m = \sqrt{2}$,

故存在 $m = \sqrt{2}$, 使得在其对应的椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$.

【考点定位】 本小题考查直线与圆以及圆锥曲线等基础知识, 考查函数与方程思想、分类讨论思想、数形结合思想等数学思想方法, 考查同学们分析问题和解决问题的能力.

22.(本小题满分 14 分)

(I) 已知函数 $f(x) = rx - x^r + (1-r)$ ($x > 0$), 其中 r 为有理数, 且 $0 < r < 1$. 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 试用 (I) 的结果证明如下命题:

设 $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, b_1, b_2$ 为正有理数, 若 $b_1 + b_2 = 1$, 则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$;

(III) 请将 (II) 中的命题推广到一般形式, 并用数学归纳法证明你所推广的命题. 注: 当 α 为正有理数时, 有求道公式 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

【解析】

(I) $f'(x) = r - rx^{r-1} = r(1 - x^{r-1})$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内是减函数;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内是增函数.

故函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值 $f(1) = 0$.

(II) 由 (I) 知, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 有 $f(x) \geq f(1) = 0$, 即 $x \leq rx + (1-r)$ ①

若 a_1, a_2 中有一个为 0, 则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$ 成立;

若 a_1, a_2 均不为 0, 又 $b_1 + b_2 = 1$, 可得 $b_2 = 1 - b_1$, 于是

在①中令 $x = \frac{a_1}{a_2}, r = b_1$, 可得 $(\frac{a_1}{a_2})^{b_1} \leq b_1 \cdot \frac{a_1}{a_2} + (1 - b_1)$,

即 $a_1^{b_1} a_2^{1-b_1} \leq a_1 b_1 + a_2 (1 - b_1)$, 亦即 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$.

综上, 对 $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, b_1, b_2$ 为正有理数且 $b_1 + b_2 = 1$, 总有 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$. ②

(III) (II) 中命题的推广形式为:

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为非负实数, b_1, b_2, \dots, b_n 为正有理数.

若 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1$, 则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. ③

用数学归纳法证明如下:

(1) 当 $n=1$ 时, $b_1 = 1$, 有 $a_1 \leq a_1$, ③成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时, ③成立, 即若 a_1, a_2, \dots, a_k 为非负实数, b_1, b_2, \dots, b_k 为正有理数,

且 $b_1 + b_2 + \dots + b_k = 1$, 则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_k^{b_k} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k$.

当 $n=k+1$ 时, 已知 $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ 为非负实数, $b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}$ 为正有理数,

且 $b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1} = 1$, 此时 $0 < b_{k+1} < 1$, 即 $1 - b_{k+1} > 0$, 于是

$$a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_k^{b_k} a_{k+1}^{b_{k+1}} = (a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_k^{b_k}) a_{k+1}^{b_{k+1}} = (a_1^{\frac{b_1}{1-b_{k+1}}} a_2^{\frac{b_2}{1-b_{k+1}}} \dots a_k^{\frac{b_k}{1-b_{k+1}}})^{1-b_{k+1}} a_{k+1}^{b_{k+1}}.$$

因 $\frac{b_1}{1-b_{k+1}} + \frac{b_2}{1-b_{k+1}} + \dots + \frac{b_k}{1-b_{k+1}} = 1$, 由归纳假设可得

$$a_1^{\frac{b_1}{1-b_{k+1}}} a_2^{\frac{b_2}{1-b_{k+1}}} \dots a_k^{\frac{b_k}{1-b_{k+1}}} \leq a_1 \cdot \frac{b_1}{1-b_{k+1}} + a_2 \cdot \frac{b_2}{1-b_{k+1}} + \dots + a_k \cdot \frac{b_k}{1-b_{k+1}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k}{1-b_{k+1}},$$

$$\text{从而 } a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_k^{b_k} a_{k+1}^{b_{k+1}} \leq \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k}{1-b_{k+1}} \right)^{1-b_{k+1}} a_{k+1}^{b_{k+1}}.$$

又因 $(1-b_{k+1}) + b_{k+1} = 1$, 由②得

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k}{1-b_{k+1}} \right)^{1-b_{k+1}} a_{k+1}^{b_{k+1}} &\leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k}{1-b_{k+1}} \cdot (1-b_{k+1}) + a_{k+1} b_{k+1} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1}, \end{aligned}$$

$$\text{从而 } a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_k^{b_k} a_{k+1}^{b_{k+1}} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1}.$$

故当 $n=k+1$ 时, ③成立.

由 (1) (2) 可知, 对一切正整数 n , 所推广的命题成立.

说明: (III) 中如果推广形式中指出③式对 $n \geq 2$ 成立, 则后续证明中不需讨论 $n=1$ 的情况.

【考点定位】本小题考查导数的应用、数学归纳法, 分类讨论等知识, 考查同学们分类讨论等数学思想, 考查了同学们分析问题和解决问题的能力.