

2005 年北京高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 9 页，共 150 分。考试时间 120 分钟。考试结束，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题共 40 分）

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。不能答在试卷上。

一、本大题共 8 小题。每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 设全集 $U=\mathbb{R}$ ，集合 $M=\{x \mid x > 1\}$ ， $P=\{x \mid x^2 > 1\}$ ，则下列关系中正确的是

- (A) $M=P$ (B) $P \supset M$ (C) $M \supset P$ (D) $M \cap P = \emptyset$

(2) “ $m = \frac{1}{2}$ ” 是 “直线 $(m+2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$ 相互垂直” 的

- (A) 充分必要条件 (B) 充分而不必要条件
(C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

(3) 若 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ ，且 $\vec{c} \perp \vec{a}$ ，则向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为

- (A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 150°

(4) 从原点向圆 $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$ 作两条切线，则该圆夹在两条切线间的劣弧长为

- (A) π (B) 2π (C) 4π (D) 6π

(5) 对任意的锐角 α, β ，下列不等关系中正确的是

- (A) $\sin(\alpha + \beta) > \sin \alpha + \sin \beta$ (B) $\sin(\alpha + \beta) > \cos \alpha + \cos \beta$
(C) $\cos(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$ (D) $\cos(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$

(6) 在正四面体 $P-ABC$ 中， D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点，下面四个结论中不成立的是

- (A) $BC \parallel$ 平面 PDF (B) $DF \perp$ 平面 PAE
(C) 平面 $PDF \perp$ 平面 ABC (D) 平面 $PAE \perp$ 平面 ABC

(7) 北京《财富》全球论坛期间，某高校有 14 名志愿者参加接待工作。若每天排早、中、晚三班，每班 4 人，每人每天最多值一班，则开幕式当天不同的排班种数为

- (A) $C_{14}^{12}C_{12}^4C_8^4$ (B) $C_{14}^{12}A_{12}^4A_8^4$ (C) $\frac{C_{14}^{12}C_{12}^4C_8^4}{A_3^3}$ (D) $C_{14}^{12}C_{12}^4C_8^4A_3^3$

(8) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\cos x}$

- (A) 在 $[0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上递增, 在 $[\pi, \frac{3\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上递减
 (B) 在 $[0, \frac{\pi}{2}), [\pi, \frac{3\pi}{2})$ 上递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi], (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上递减
 (C) 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi], (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上递增, 在 $[0, \frac{\pi}{2}), [\pi, \frac{3\pi}{2})$ 上递减
 (D) 在 $[\pi, \frac{3\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上递增, 在 $[0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上递减

二、填空题：本大题共 6 小题；每小题 5 分，共 30 分。把答案填在题中横线上。

(9) 若 $z_1 = a + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$, 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

(10) 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2$, 则 $\tan \alpha$ 的值为_____, $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值为_____.

(11) $(x - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中的常数项是_____ (用数字作答)

(12) 过原点作曲线 $y = e^x$ 的切线, 则切点的坐标为_____, 切线的斜率为_____.

(13) 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), 有如下结论:

① $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$; ② $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$; ③ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$; ④

$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

当 $f(x) = \lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是_____.

(14) 已知 n 次多项式 $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$,

如果在一种算法中, 计算 x_0^k ($k=2, 3, 4, \dots, n$) 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法, 3 次加法), 那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x) = a_0, P_{k+1}(x) = xP_k(x) + a_{k+1}$ ($k=0, 1,$

2, ..., n-1). 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算, 计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要_____次运算.

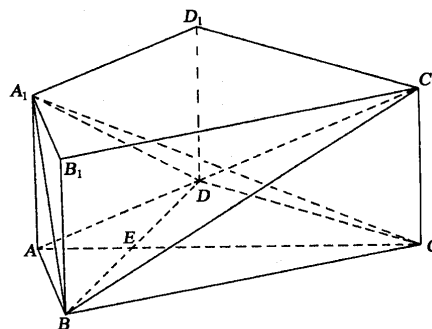
三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

(15) (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + a$,

(I) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.



(16) (本小题共 14 分)

如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2$, $DC=2\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{3}$, $AD \perp DC$, $AC \perp BD$, 垂足为 E ,

(I) 求证: $BD \perp A_1C$;

(II) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小;

(III) 求异面直线 AD 与 BC_1 所成角的大小.

(17) (本小题共 13 分)

甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率 $\frac{2}{3}$,

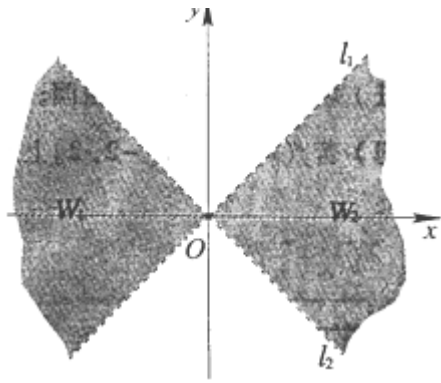
(I) 记甲击中目标的次数为 ξ , 求 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$;

(II) 求乙至多击中目标 2 次的概率;

(III) 求甲恰好比乙多击中目标 2 次的概率.

(18) (本小题共 14 分)

如图, 直线 $l_1: y=kx$ ($k>0$) 与直线 $l_2: y=-kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W , 其左半部分记为 W_1 , 右半部分记为 W_2 .



- (I) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2 ;
- (II) 若区域 W 中的动点 $P(x, y)$ 到 l_1, l_2 的距离之积等于 d^2 , 求点 P 的轨迹 C 的方程;
- (III) 设不过原点 O 的直线 l 与 (II) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点. 求证 $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.

(19) (本小题共 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a \neq \frac{1}{4}$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & n \text{ 为奇数} \\ a_n + \frac{1}{4} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$,

记 $b_n = a_{2n-1} - \frac{1}{4}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

- (I) 求 a_2, a_3 ;
- (II) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;
- (III) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$.

(20) (本小题共 14 分)

设 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数, 若存在 $x^* \in (0, 1)$, 使得 $f(x)$ 在 $[0, x^*]$ 上单调递增, 在 $[x^*, 1]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的单峰函数, x^* 为峰点, 包含峰点的区间为含峰区间.

对任意的 $[0, 1]$ 上的单峰函数 $f(x)$, 下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

- (I) 证明: 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, $x_1 < x_2$, 若 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则 $(0, x_2)$ 为含峰区间; 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则 $(x_1, 1)$ 为含峰区间;
- (II) 对给定的 r ($0 < r < 0.5$), 证明: 存在 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 满足 $x_2 - x_1 \geq 2r$, 使得由 (I) 所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5 + r$;
- (III) 选取 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, $x_1 < x_2$, 由 (I) 可确定含峰区间为 $(0, x_2)$ 或 $(x_1, 1)$, 在所

得的含峰区间内选取 x_3 , 由 x_3 与 x_1 或 x_3 与 x_2 类似地可确定一个新的含峰区间. 在第一次确定的含峰区间为 $(0, x_2)$ 的情况下, 试确定 x_1, x_2, x_3 的值, 满足两两之差的绝对值不小于 0.02, 且使得新的含峰区间的长度缩短到 0.34. (区间长度等于区间的右端点与左端点之差)

参考答案

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

(1) C (2) B (3) C (4) B (5) D (6) C (7) A (8) A

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(9) $\frac{8}{3}$ (10) $-\frac{4}{3}; -\frac{1}{7}$ (11) 15 (12) (1, e); e

(13) ②③ (14) $\frac{1}{2}n(n+3); 2n$

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80 分)

(15) (共 13 分)

解: (I) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$. 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 3$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1), (3, +\infty)$.

(II) 因为 $f(-2) = 8 + 12 - 18 + a = 2 + a$, $f(2) = -8 + 12 + 18 + a = 22 + a$,

所以 $f(2) > f(-2)$. 因为在 $(-1, 3)$ 上 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增, 又由于 $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减, 因此 $f(2)$ 和 $f(-1)$ 分别是 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值, 于是有 $22 + a = 20$, 解得 $a = -2$.

故 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$, 因此 $f(-1) = 1 + 3 - 9 - 2 = -7$,

即函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最小值为 -7 .

(16) (共 14 分)

(I) 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

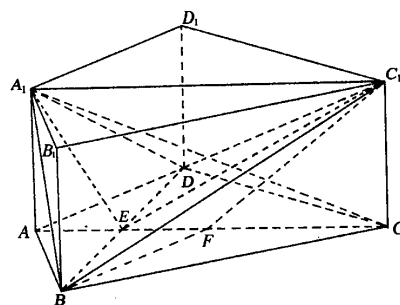
$\because AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$. $\therefore AC$ 是 A_1C 在平面 $ABCD$ 上的射影.

$\because BD \perp AC$. $\therefore BD \perp A_1C$;

(II) 连结 A_1E, C_1E, A_1C_1 .

与 (I) 同理可证 $BD \perp A_1E, BD \perp C_1E$,

$\therefore \angle A_1EC_1$ 为二面角 A_1-BD-C_1 的平面角. $\because AD \perp DC$, $\therefore \angle A_1D_1C_1 = \angle ADC = 90^\circ$,



又 $A_1D_1=AD=2$, $D_1C_1=DC=2\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{3}$ 且 $AC\perp BD$,

$\therefore A_1C_1=4$, $AE=1$, $EC=3$, $\therefore A_1E=2$, $C_1E=2\sqrt{3}$,

在 $\triangle A_1EC_1$ 中, $A_1C_1^2=A_1E^2+C_1E^2$, $\therefore \angle A_1EC_1=90^\circ$,

即二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 90° .

(III) 过 B 作 $BF\parallel AD$ 交 AC 于 F, 连结 FC_1 ,

则 $\angle C_1BF$ 就是 AD 与 BC_1 所成的角. $\because AB=AD=2$, $BD\perp AC$, $AE=1$, $\therefore BF=2$, EF

$=1$, $FC=2$, $BC=DC$, $\therefore FC_1=\sqrt{7}$, $BC_1=\sqrt{15}$,

在 $\triangle BFC_1$ 中, $\cos \angle C_1BF = \frac{15+4-7}{1\cdot 2\cdot \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, $\therefore \angle C_1BF = \arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$

即异面直线 AD 与 BC_1 所成角的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

解法二:

(I) 同解法一.

(II) 如图, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系.

连结 A_1E, C_1E, A_1C_1 .

与 (I) 同理可证, $BD \perp A_1E, BD \perp C_1E$,

$\therefore \angle A_1EC_1$ 为二面角 A_1-BD-C_1 的平面角.

由 $A_1(2, 0, \sqrt{3}), C_1(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$E(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$,

得 $\overrightarrow{EA_1} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}), \overrightarrow{EC_1} = (-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EC_1} = -\frac{3}{4} - \frac{9}{4} + 3 = 0$,

$\therefore \overrightarrow{EA_1} \perp \overrightarrow{EC_1}$, 即 $EA_1 \perp EC_1$.

\therefore 二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 90° .

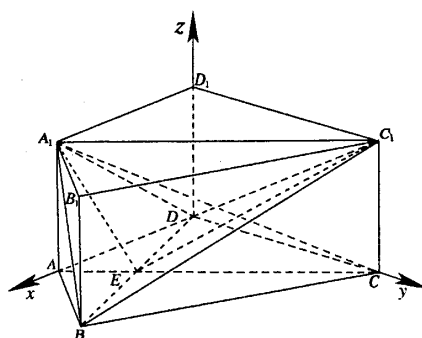
(III) 如图, 由 $D(0, 0, 0), A(2, 0, 0), C_1(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{3}), B(3, \sqrt{3}, 0)$,

得 $\overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{BC_1} = (-3, \sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 6, |\overrightarrow{AD}| = 2, |\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{15}$,

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{6}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$,

\therefore 异面直线 AD 与 BC_1 所成角的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.



解法三:

(I) 同解法一.

(II) 如图, 建立空间直角坐标系, 坐标原点为 E .

连结 A_1E, C_1E, A_1C_1 .

与 (I) 同理可证, $BD \perp A_1E, BD \perp C_1E$,

$\therefore \angle A_1EC_1$ 为二面角 A_1-BD-C_1 的平面角.

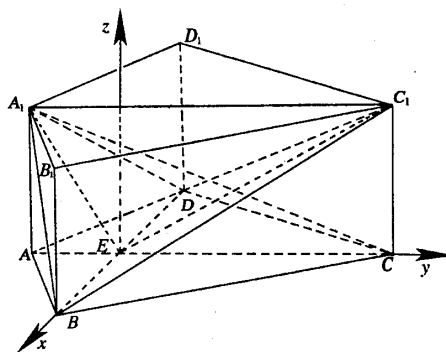
由 $E(0, 0, 0), A_1(0, -1, \sqrt{3}), C_1(0, 3, \sqrt{3})$,

得 $\overrightarrow{EA_1} = (0, -1, \sqrt{3}), \overrightarrow{EC_1} = (0, 3, \sqrt{3})$.

$\therefore \overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EC_1} = -3 + 3 = 0$,

$\therefore \overrightarrow{EA_1} \perp \overrightarrow{EC_1}$, 即 $EA_1 \perp EC_1$,

\therefore 二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 90° .



(17) (共 13 分)

解: (I) $P(\xi = 0) = C_3^0 (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}, P(\xi = 1) = C_3^1 (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}, P(\xi = 2) = C_3^2 (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$,

$P(\xi = 3) = C_3^3 (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$,

ξ 的概率分布如下表:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E\xi$

=

$$0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5, \quad (\text{或 } E\xi = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1.5);$$

$$(II) \text{ 乙至多击中目标 2 次的概率为 } 1 - C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27};$$

(III) 设甲恰比乙多击中目标 2 次为事件 A, 甲恰击中目标 2 次且乙恰击中目标 0 次为事件 B_1 , 甲恰击中目标 3 次且乙恰击中目标 1 次为事件 B_2 , 则 $A = B_1 + B_2$,

B_1, B_2 为互斥事件.

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{24}$$

所以, 甲恰好比乙多击中目标 2 次的概率为 $\frac{1}{24}$.

(18) (共 14 分)

解: (I) $W_1 = \{(x, y) \mid kx < y < -kx, x < 0\}$, $W_2 = \{(x, y) \mid -kx < y < kx, x > 0\}$,

(II) 直线 $l_1: kx - y = 0$, 直线 $l_2: kx + y = 0$, 由题意得

$$\frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2 + 1}} \cdot \frac{|kx + y|}{\sqrt{k^2 + 1}} = d^2, \quad \text{即 } \frac{|k^2 x^2 - y^2|}{k^2 + 1} = d^2,$$

由 $P(x, y) \in W$, 知 $k^2 x^2 - y^2 > 0$,

$$\text{所以 } \frac{k^2 x^2 - y^2}{k^2 + 1} = d^2, \quad \text{即 } k^2 x^2 - y^2 - (k^2 + 1)d^2 = 0,$$

所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $k^2 x^2 - y^2 - (k^2 + 1)d^2 = 0$;

(III) 当直线 l 与 x 轴垂直时, 可设直线 l 的方程为 $x = a$ ($a \neq 0$). 由于直线 l , 曲线 C 关于 x 轴对称, 且 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称, 于是 $M_1 M_2, M_3 M_4$ 的中点坐标都为 $(a, 0)$, 所以 $\triangle O M_1 M_2, \triangle O M_3 M_4$ 的重心坐标都为 $(\frac{2}{3}a, 0)$, 即它们的重心重合,

当直线 l_1 与 x 轴不垂直时, 设直线 l 的方程为 $y = mx + n$ ($n \neq 0$).

$$\text{由 } \begin{cases} k^2 x^2 - y^2 - (k^2 + 1)d^2 = 0 \\ y = mx + n \end{cases}, \text{ 得 } (k^2 - m^2)x^2 - 2mnx - n^2 - k^2 d^2 - d^2 = 0$$

由直线 l 与曲线 C 有两个不同交点, 可知 $k^2 - m^2 \neq 0$ 且

$$\Delta = (2mn)^2 + 4(k^2 - m^2) \times (n^2 + k^2 d^2 + d^2) > 0$$

设 M_1, M_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2mn}{k^2 - m^2}, \quad y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) + 2n,$$

设 M_3, M_4 的坐标分别为 $(x_3, y_3), (x_4, y_4)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = kx \\ y = mx + n \end{cases} \stackrel{1/4^\circ}{\sim} \begin{cases} y = -kx \\ y = mx + n \end{cases} \text{得 } x_3 = \frac{n}{k-m}, x_4 = \frac{-n}{k+m}$$

$$\text{从而 } x_3 + x_4 = \frac{2mn}{k^2 - m^2} = x_1 + x_2,$$

$$\text{所以 } y_3 + y_4 = m(x_3 + x_4) + 2n = m(x_1 + x_2) + 2n = y_1 + y_2,$$

于是 $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心也重合.

(19) (共 12 分)

$$\text{解: (I) } a_2 = a_1 + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} a + \frac{1}{8};$$

$$\text{(II) } \because a_4 = a_3 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} a + \frac{3}{8}, \quad \text{所以 } a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{4} a + \frac{3}{16},$$

$$\text{所以 } b_1 = a_1 - \frac{1}{4} = a - \frac{1}{4}, \quad b_2 = a_3 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} (a - \frac{1}{4}), \quad b_3 = a_5 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (a - \frac{1}{4}),$$

猜想: $\{b_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

证明如下:

$$\text{因为 } b_{n+1} = a_{2n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} a_{2n} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} (a_{2n-1} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} b_n, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 $a - \frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$$\text{(III) } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2(a - \frac{1}{4}).$$

(20) (共 14 分)

(I) 证明: 设 x^* 为 $f(x)$ 的峰点, 则由单峰函数定义可知, $f(x)$ 在 $[0, x^*]$ 上单调递增, 在 $[x^*, 1]$ 上单调递减.

当 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 时, 假设 $x^* \notin (0, x_2)$, 则 $x_1 < x_2 < x^*$, 从而 $f(x^*) \geq f(x_2) > f(x_1)$,

这与 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 矛盾, 所以 $x^* \in (0, x_2)$, 即 $(0, x_2)$ 是含峰区间.

当 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 时, 假设 $x^* \notin (x_2, 1)$, 则 $x^* \leq x_1 < x_2$, 从而 $f(x^*) \geq f(x_1) > f(x_2)$,

这与 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 矛盾, 所以 $x^* \in (x_1, 1)$, 即 $(x_1, 1)$ 是含峰区间.

(II) 证明: 由 (I) 的结论可知:

当 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 时, 含峰区间的长度为 $l_1 = x_2$;

当 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 时, 含峰区间的长度为 $l_2 = 1 - x_1$;

对于上述两种情况, 由题意得

$$\begin{cases} x_2 \leq 0.5+r \\ 1-x_1 \leq 0.5+r \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

由①得 $1+x_2-x_1 \leq 1+2r$, 即 $x_2-x_1 \leq 2r$.

又因为 $x_2-x_1 \geq 2r$, 所以 $x_2-x_1=2r$, $\textcircled{2}$

将②代入①得

$$x_1 \leq 0.5-r, \quad x_2 \geq 0.5+r, \quad \textcircled{3}$$

由①和③解得 $x_1=0.5-r, \quad x_2=0.5+r$.

所以这时含峰区间的长度 $l_1=l_1=0.5+r$, 即存在 x_1, x_2 使得所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5+r$.

(III) 解: 对先选择的 $x_1; x_2, x_1 < x_2$, 由 (II) 可知

$$x_1+x_2=1, \quad \textcircled{4}$$

在第一次确定的含峰区间为 $(0, x_2)$ 的情况下, x_3 的取值应满足

$$x_3+x_1=x_2, \quad \textcircled{5}$$

$$\text{由④与⑤可得} \begin{cases} x_2=1-x_1 \\ x_3=1-2x_1 \end{cases},$$

当 $x_1 > x_3$ 时, 含峰区间的长度为 x_1 .

由条件 $x_1-x_3 \geq 0.02$, 得 $x_1-(1-2x_1) \geq 0.02$, 从而 $x_1 \geq 0.34$.

因此, 为了将含峰区间的长度缩短到 0.34 , 只要取

$$x_1=0.34, \quad x_2=0.66, \quad x_3=0.32.$$