2007年湖北高考理科数学真题及答案

本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上指定位置．

2．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号，答在试题卷上无效．

3．将填空题和解答题用0.5毫米的黑色墨水签字笔或黑色墨水钢笔直接答在答题卡上每题对应的答题区域内．答在试题卷上无效．

4．考试结束，请将本试题卷和答题卡一并上交．

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．如果$\left(3x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^n$的展开式中含有非零常数项，则正整数$n$的最小值为（　　）

A．3　　B．5　　C．6　　D．10

2．将$y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象按向量$\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{\pi}{4},-2\right)$平移，则平移后所得图象的解析式为（　　）

A．$y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)-2$　　B．$y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

C．$y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)-2$　　D．$y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)+2$

3．设P和Q是两个集合，定义集合$P-Q=\{x\,|\,x\in P,\ 且x\notin Q\}$，如果$P=\{x\,|\log_2 x<1\}$，$Q=\{x\,||x-2|<1\}$，那么$P-Q$等于（　　）

A．$\{x\,|\,0<x<1\}$　　B．$\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$

C．$\{x\,|\,1\leqslant x<2\}$　　D．$\{x\,|\,2\leqslant x<3\}$

4．平面α外有两条直线m和n，如果m和n在平面α内的射影分别是m'和n'，给出下列四个命题：

①$m'\perp n'\Rightarrow m\perp n$；

②$m\perp n\Rightarrow m'\perp n'$；

③m'与n'相交$\Rightarrow$ m与n相交或重合；

④m'与n'平行$\Rightarrow$ m与n平行或重合．

其中不正确的命题个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．已知 p 和 q 是两个不相等的正整数，且 $q \geqslant 2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{p}-1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{q}-1}=$（　　）

A．0　　B．1　　C．$\dfrac{p}{q}$　　D．$\dfrac{p-1}{q-1}$

6．若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=p$（$p$ 为正常数，$n\in\mathbf{N}^*$），则称 $\{a_n\}$ 为“等方比数列”.

甲：数列 $\{a_n\}$ 是等方比数列；　　乙：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则（　　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7．双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左准线为 l，左焦点和右焦点分别为 F_1 和 F_2；抛物线 C_2 的准线为 l，焦点为 F_2；C_1 与 C_2 的一个交点为 M，则 $\dfrac{|F_1F_2|}{|MF_1|}-\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}$ 等于（　　）

A．-1　　B．1　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

8．已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n，且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$，则使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

9．连掷两次骰子得到的点数分别为 m 和 n，记向量 $\boldsymbol{a}=(m,\ n)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$ 的夹角为 θ，则 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的概率是（　　）

A．$\dfrac{5}{12}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{7}{12}$　　D．$\dfrac{5}{6}$

10．已知直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a$，$b$ 是非零常数）与圆 $x^2+y^2=100$ 有公共点，且公共点的横坐标和纵坐标均为整数，那么这样的直线共有（　　）

A．60 条　　B．66 条　　C．72 条　　D．78 条

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在答题卡相应位置上．

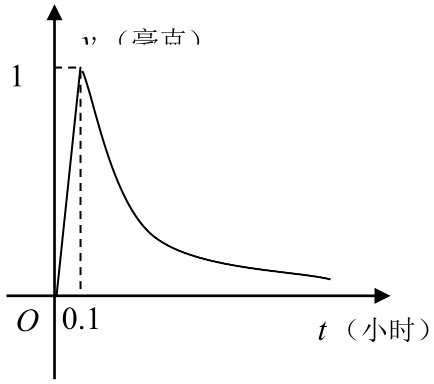
11．已知函数 $y=2x-a$ 的反函数是 $y=bx+3$，则 $a=$________；$b=$________.

12．复数 $z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq 0$，若 z^2-4bz 是实数，则有序实数对 $(a,\ b)$ 可以是__________．（写出一个有序实数对即可）

13．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 0, \\ -2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$ 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为_____________．

14．某篮运动员在三分线投球的命中率是 $\dfrac{1}{2}$，他投球 10 次，恰好投进 3 个球的概率____________________．（用数值作答）

15．为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒．已知药物释放过程中，室内每立方米空气中的含药量 y（毫克）与时间 t（小时）成正比；药物释放完毕后，y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-a}$（$a$ 为常数），如图所示．据图中提供的信息，回答下列问题：



（I）从药物释放开始，每立方米空气中的含药量 y（毫克）与时间 t（小时）之间的函数关系式为______________；

（II）据测定，当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时，学生方可进教室，那么药物释放开始，至少需要经过__________________小时后，学生才能回到教室．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16．（本小题满分 12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的面积为 3，且满足 $0\leqslant\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}\leqslant 6$，设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ．

（I）求 θ 的取值范围；

（II）求函数 $f(\theta)=2\sin^2\left(\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{4}+\theta\right)-\sqrt{3}\cos 2\theta$ 的最大值与最小值．

17．（本小题满分 12 分）

在生产过程中，测得纤维产品的纤度（表示纤维粗细的一种量）共有 100 个数据，将数据分组如右表：

分组	频数
[1.30,1.34)	4
[1.34,1.38)	25
[1.38,1.42)	30
[1.42,1.46)	29
[1.46,1.50)	10
[1.50,1.54)	2
合计	100

（I）在答题卡上完成频率分布表，并在给定的坐标系中画出频率分布直方图；

（II）估计纤度落在 $[1.38,1.50)$ 中的概率及纤度小于 1.40 的概率是多少？

（III）统计方法中，同一组数据常用该组区间的中点值

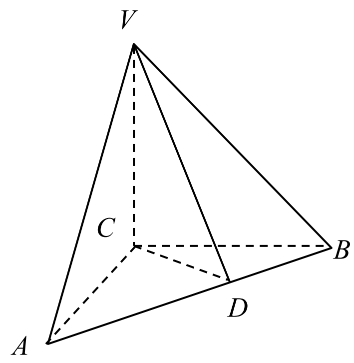
（例如区间$[1.30,1.34)$的中点值是1.32）作为代表．据此，估计纤度的期望．

18．（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥$V-ABC$中，$VC\perp$底面ABC，$AC\perp BC$，D是AB的中点，且$AC=BC=a$，$\angle VDC=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

（I）求证：平面$VAB\perp VCD$；

（II）当解θ变化时，求直线BC与平面VAB所成的角的取值范围．

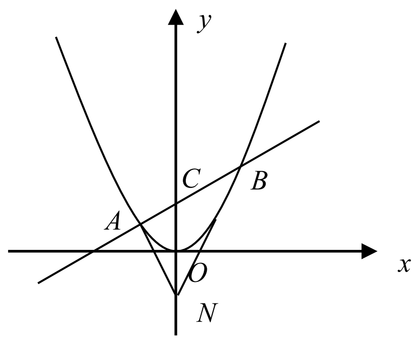


19．（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系xOy中，过定点$C(0,p)$作直线与抛物线$x^2=2py$（$p>0$）相交于A,B两点．

（I）若点N是点C关于坐标原点O的对称点，求$\triangle ANB$面积的最小值；

（II）是否存在垂直于y轴的直线l，使得l被以AC为直径的圆截得的弦长恒为定值？若存在，求出l的方程；若不存在，说明理由．



（此题不要求在答题卡上画图）

20．（本小题满分 13 分）

已知定义在正实数集上的函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax$，$g(x)=3a^2\ln x+b$，其中$a>0$．设两曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$有公共点，且在该点处的切线相同．

（I）用a表示b，并求b的最大值；

（II）求证：$f(x) \geqslant g(x)$（$x > 0$）.

21．（本小题满分 14 分）
已知m，n为正整数，

（I）用数学归纳法证明：当$x > -1$时，$(1+x)^m \geqslant 1+mx$；

（II）对于$n \geqslant 6$，已知$\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^m < \dfrac{1}{2}$，求证$\left(1-\dfrac{m}{m+3}\right)^m < \dfrac{1}{2}$，

求证$\left(1-\dfrac{m}{n+3}\right)^m < \left(\dfrac{1}{2}\right)^m$，$m = 1,2,\cdots$，$n$；

（III）求出满足等式$3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^m$的所有正整数$n$.

2007 年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数学（理工农医类）试题参考答案

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 50 分．

1．B	2．A	3．B	4．D	5．C
6．B	7．A	8．D	9．C	10．A

二、填空题：本题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 25 分．

11．$6; \dfrac{1}{2}$　　12．$(2,1)$（或满足$a = 2b$的任一组非零实数对$(a,\ b)$）

13．$-\dfrac{3}{2}$　　14．$\dfrac{15}{128}$　　15．$y = \begin{cases} 10t, \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{10}\right), \\ \left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}, \left(t > \dfrac{1}{10}\right) \end{cases}$；0.6

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．

16．本小题主要考查平面向量数量积的计算、解三角形、三角公式、三角函数的性质等基本知识，考查推理和运算能力．

解：（Ⅰ）设$\triangle ABC$中角$A,\ B,\ C$的对边分别为$a,\ b,\ c$，

则由$\dfrac{1}{2}bc\sin\theta = 3$，$0 \leqslant bc\cos\theta \leqslant 6$，可得$0 \leqslant \cot\theta \leqslant 1$，$\therefore \theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

（Ⅱ）$f(\theta) = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right) - \sqrt{3}\cos 2\theta = \left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right)\right] - \sqrt{3}\cos 2\theta$

$= (1+\sin 2\theta) - \sqrt{3}\cos 2\theta = \sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta + 1 = 2\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$.

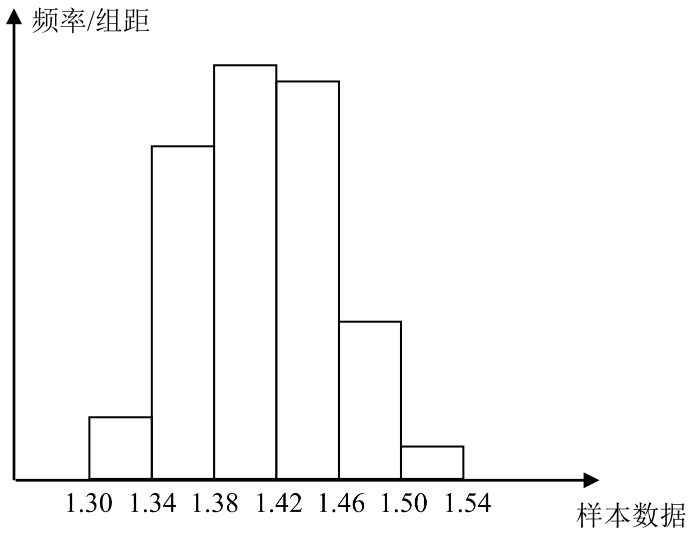
$\because \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$，$2\theta - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore 2 \leqslant 2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \leqslant 3$.

即当 $\theta = \frac{5\pi}{12}$ 时，$f(\theta)_{\max} = 3$；当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，$f(\theta)_{\min} = 2$.

17．本小题主要考查频率分布直方图、概率、期望等概念和用样本频率估计总体分布的统计方法，考查运用概率统计知识解决实际问题的能力．

解：（Ⅰ）

分组	频数	频率
$[1.30, 1.34)$	4	0.04
$[1.34, 1.38)$	25	0.25
$[1.38, 1.42)$	30	0.30
$[1.42, 1.46)$	29	0.29
$[1.46, 1.50)$	10	0.10
$[1.50, 1.54)$	2	0.02
合计	100	1.00



（Ⅱ）纤度落在 $[1.38, 1.50)$ 中的概率约为 $0.30 + 0.29 + 0.10 = 0.69$，纤度小于 1.40 的概率约为 $0.04 + 0.25 + \frac{1}{2} \times 0.30 = 0.44$.

（Ⅲ）总体数据的期望约为

$1.32 \times 0.04 + 1.36 \times 0.25 + 1.40 \times 0.30 + 1.44 \times 0.29 + 1.48 \times 0.10 + 1.52 \times 0.02 = 1.4088$.

18．本小题主要考查线面关系、直线与平面所成角的有关知识，考查空间想象能力和推理运算能力以及应用向量知识解决数学问题的能力．

解法 1：（Ⅰ）$\because AC=BC=a$，$\therefore \triangle ACB$ 是等腰三角形，又 D 是 AB 的中点，

$\therefore CD\perp AB$，又 $VC\perp$ 底面 ABC．$\therefore VC\perp AB$．于是 $AB\perp$ 平面 VCD．

又 $AB\subset$ 平面 VAB，$\therefore$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD．

（Ⅱ） 过点 C 在平面 VCD 内作 $CH\perp VD$ 于 H，则由（Ⅰ）知 $CD\perp$ 平面 VAB．

连接 BH，于是 $\angle CBH$ 就是直线 BC 与平面 VAB 所成的角．

在 $\mathbf{Rt}\triangle CHD$ 中，$CH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sin\theta$；

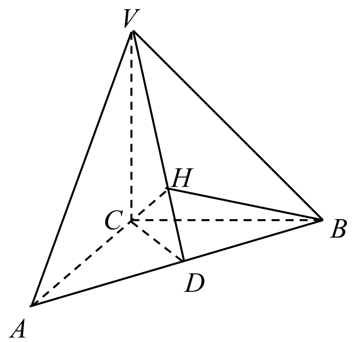
设 $\angle CBH=\varphi$，在 $\mathbf{Rt}\triangle BHC$ 中，$CH=a\sin\varphi$，$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta=\sin\varphi$．

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore 0<\sin\theta<1$，$0<\sin\varphi<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

又 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$．

即直线 BC 与平面 VAB 所成角的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$．



解法 2：（Ⅰ）以 $CA,\ CB,\ CV$ 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,\ a,0)$，$D\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$，$V\left(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，

于是，$\overrightarrow{VD}=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,\ a,0)$．

从而 $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{CD}=(-a,\ a,0)\cdot\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a^2+0=0$，即 $AB\perp CD$．

同理 $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{VD}=(-a,\ a,0)\cdot\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a^2+0=0$，

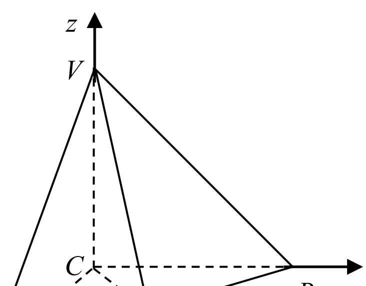
即 $AB\perp VD$．又 $CD\cap VD=D$，$\therefore AB\perp$ 平面 VCD．

又 $AB\subset$ 平面 VAB．

$\therefore$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD．

（Ⅱ）设直线 BC 与平面 VAB 所成的角为 φ，平面 VAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则由 $\boldsymbol{n}\ \overrightarrow{AB}=0,\ \ \boldsymbol{n}\ \overrightarrow{VD}=0$．



得$\begin{cases}-ax+ay=0,\\ \dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}az\tan\theta=0.\end{cases}$

可取$\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2}\cot\theta)$，又$\overrightarrow{BC}=(0,-a,0)$，

于是$\sin\varphi=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\ \overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}|\ |\overrightarrow{BC}|}\right|=\dfrac{a}{a\ \sqrt{2+2\cot^2\theta}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$，

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\sin\theta<1$，$0<\sin\varphi<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又$0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$.

即直线BC与平面VAB所成角的取值范围为$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解法 3：（Ⅰ）以点D为原点，以$DC,\ DB$所在的直线分别为x轴、y轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则$D(0,0,0)$，$A\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$B\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$V\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，于是$\overrightarrow{DV}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2}a,0)$.

从而$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{2}a,0)\ \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)=0$，即$AB\perp DC$.

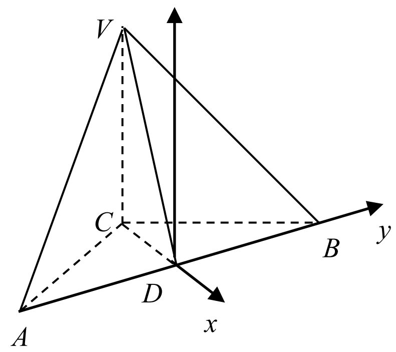
同理$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{DV}=(0,\sqrt{2}a,0)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)=0$，即$AB\perp DV$.

又$DC\cap DV=D$，$\therefore AB\perp$平面VCD.
又$AB\subset$平面VAB，
$\therefore$平面$VAB\perp$平面VCD.

（Ⅱ）设直线BC与平面VAB所成的角为φ，平面VAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则由$\boldsymbol{n}\ \overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{n}\ \overrightarrow{DV}=0$，得$\begin{cases}\sqrt{2}ay=0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}ax+\dfrac{\sqrt{2}}{2}az\tan\theta=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(\tan\theta,0,1)$，又 $\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，



于是 $\sin\varphi=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{BC}|}\right|=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta}{a\sqrt{1+\tan\theta}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$，

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\sin\theta<1$，$0<\sin\varphi<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

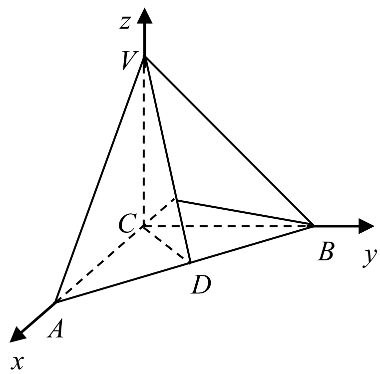
又 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$，

即直线 BC 与平面 VAB 所成角的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解法4：以 CA，CB，CV 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$D\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$.

设 $V(0,0,t)(t>0)$.

（Ⅰ）$\overrightarrow{CV}=(0,0,t)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,a,0)$，



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CV}=(-a,a,0)\cdot(0,0,t)=0+0+0=0$，

即 $AB\perp CV$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-a,a,0)\cdot\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)=-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}+0=0$，

即 $AB\perp CD$.

又 $CV\cap CD=C$，$\therefore AB\perp$ 平面 VCD.

又 $AB\subset$ 平面 VAB，

$\therefore$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD.

（Ⅱ）设直线 BC 与平面 VAB 所成的角为 φ，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 VAB 的一个非零法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(x,y,z)\cdot(-a,a,0)=-ax+ay=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AV}=(x,y,z)\cdot(-a,0,t)=-ax+tz=0,\end{cases}$ 取 $z=a$，得 $x=y=t$.

可取 $\boldsymbol{n}=(t,t,a)$，又 $\overrightarrow{CB}=(0,a,0)$，

于是 $\sin\varphi=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\ \overrightarrow{CB}}{|\boldsymbol{n}|\ |\overrightarrow{CB}|}\right|=\dfrac{|ta|}{|a|\ \sqrt{t^2+t^2+a^2}}=\dfrac{t}{\sqrt{2t^2+a}}=\dfrac{1}{\sqrt{2+\left(\dfrac{a}{t}\right)^2}}$，

$\because t\in(0,+\infty)$，$\sin\varphi$ 关于 t 递增.

$\therefore 0<\sin\varphi<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore \varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

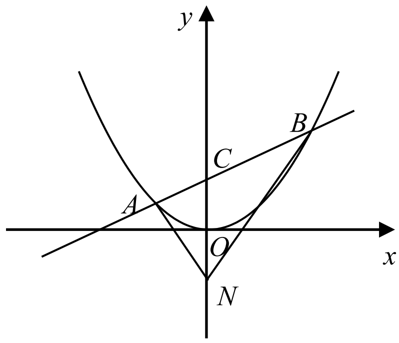
即直线 BC 与平面 VAB 所成角的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

19．本小题主要考查直线、圆和抛物线等平面解析几何的基础知识，考查综合运用数学知识进行推理运算的能力和解决问题的能力.

解法 1：（Ⅰ）依题意，点 N 的坐标为 $N(0,-p)$，可设 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$，

直线 AB 的方程为 $y=kx+p$，与 $x^2=2py$ 联立得 $\begin{cases}x^2=2py,\\ y=kx+p.\end{cases}$ 消去 y 得

$x^2-2pkx-2p^2=0$.



由韦达定理得 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-2p^2$.

于是 $S_{\triangle ABN}=S_{\triangle BCN}+S_{\triangle ACN}=\dfrac{1}{2}\ 2p|x_1-x_2|$.

$=p|x_1-x_2|=p\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

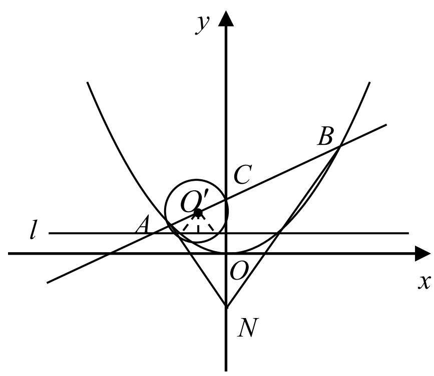
$=p\sqrt{4p^2k^2+8p^2}=2p^2\sqrt{k^2+2}$，

$\therefore$ 当 $k=0$ 时，$(S_{\triangle ABN})_{\min}=2\sqrt{2}p^2$.

（Ⅱ）假设满足条件的直线 l 存在，其方程为 $y=a$，

AC 的中点为 O'，l 与 AC 为直径的圆相交于点 P，$Q,\ PQ$ 的中点为 H，

则 $O'H\perp PQ$，Q' 点的坐标为 $\left(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{y_1+p}{2}\right)$.



$\because |O'P|=\dfrac{1}{2}|AC|=\dfrac{1}{2}\sqrt{x_1^2+(y_1-p)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{y_1^2+p^2}$，

$|O'H|=\left|a-\dfrac{y_1+p}{2}\right|=\dfrac{1}{2}|2a-y_1-p|$，

$\therefore |PH|^2=|O'P|^2-|O'H|^2=\frac{1}{4}(y_1^2+p^2)-\frac{1}{4}(2a-y_1-p)^2$

$=\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)$，

$\therefore |PQ|^2=(2|PH|)^2=4\left[\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)\right]$.

令 $a-\frac{p}{2}=0$，得 $a=\frac{p}{2}$，此时 $|PQ|=p$ 为定值，故满足条件的直线 l 存在，其方程为 $y=\frac{p}{2}$，

即抛物线的通径所在的直线.

解法 2：（Ⅰ）前同解法 1，再由弦长公式得

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4p^2k^2+8p^2}$

$=2p\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+2}$，

又由点到直线的距离公式得 $d=\frac{2p}{\sqrt{1+k^2}}$.

从而 $S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot 2p\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+2}\cdot\frac{2p}{\sqrt{1+k^2}}=2p^2\sqrt{k^2+2}$，

$\therefore$ 当 $k=0$ 时，$(S_{\triangle ABN})_{\min}=2\sqrt{2}p^2$.

（Ⅱ）假设满足条件的直线 l 存在，其方程为 $y=a$，则以 AC 为直径的圆的方程为

$(x-0)(x-x_1)-(y-p)(y-y_1)=0$，

将直线方程 $y=a$ 代入得 $x^2-x_1x+(a-p)(a-y_1)=0$，

则 $\triangle=x_1^2-4(a-p)(a-y_1)=4\left[\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)\right]$.

设直线 l 与以 AC 为直径的圆的交点为 $P(x_3,\ y_3)$，$Q(x_4,\ y_4)$，

则有 $|PQ|=|x_3-x_4|=\sqrt{4\left[\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)\right]}=2\sqrt{\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)}$.

令 $a-\frac{p}{2}=0$，得 $a=\frac{p}{2}$，此时 $|PQ|=p$ 为定值，故满足条件的直线 l 存在，其方程为 $y=\frac{p}{2}$，

即抛物线的通径所在的直线.

20．本小题主要考查函数、不等式和导数的应用等知识，考查综合运用数学知识解决问题的能力.

解：（Ⅰ）设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)(x>0)$ 在公共点 $(x_0,\ y_0)$ 处的切线相同.

$\because f'(x)=x+2a$， $g'(x)=\dfrac{3a^2}{x}$，由题意 $f(x_0)=g(x_0)$， $f'(x_0)=g'(x_0)$.

即 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x_0^2+2ax_0=3a^2\ln x_0+b,\\ x_0+2a=\dfrac{3a^2}{x_0},\end{cases}$ 由 $x_0+2a=\dfrac{3a^2}{x_0}$ 得：$x_0=a$，或 $x_0=-3a$（舍去）.

即有 $b=\dfrac{1}{2}a^2+2a^2-3a^2\ln a=\dfrac{5}{2}a^2-3a^2\ln a$.

令 $h(t)=\dfrac{5}{2}t^2-3t^2\ln t(t>0)$，则 $h'(t)=2t(1-3\ln t)$. 于是

当 $t(1-3\ln t)>0$，即 $0<t<e^{\frac{1}{3}}$ 时， $h'(t)>0$；

当 $t(1-3\ln t)<0$，即 $t>e^{\frac{1}{3}}$ 时， $h'(t)<0$.

故 $h(t)$ 在 $\left(0,\ e^{\frac{1}{3}}\right)$ 为增函数，在 $\left(e^{\frac{1}{3}},+\infty\right)$ 为减函数，

于是 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值为 $h\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\dfrac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$.

（Ⅱ）设 $F(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax-3a^2\ln x-b(x>0)$，

则 $F'(x)=x+2a-\dfrac{3a^2}{x}=\dfrac{(x-a)(x+3a)}{x}(x>0)$.

故 $F(x)$ 在 $(0,\ a)$ 为减函数，在 $(a,+\infty)$ 为增函数，

于是函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值是 $F(a)=F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$.

故当 $x>0$ 时，有 $f(x)-g(x)\geqslant 0$，即当 $x>0$ 时， $f(x)\geqslant g(x)$.

21．本小题主要考查数学归纳法、数列求和、不等式等基础知识和基本的运算技能，考查分析问题能力和推理能力.

解法 1：（Ⅰ）证：用数学归纳法证明：

（ⅰ）当 $m=1$ 时，原不等式成立；当 $m=2$ 时，左边 $=1+2x+x^2$，右边 $=1+2x$，

因为 $x^2\geqslant 0$，所以左边 $\geqslant$ 右边，原不等式成立；

（ⅱ）假设当$m=k$时，不等式成立，即$(1+x)^k \geqslant 1+kx$，则当$m=k+1$时，

∵$x>-1$，∴$1+x>0$，于是在不等式$(1+x)^k \geqslant 1+kx$两边同乘以$1+x$得

$(1+x)^k\ (1+x) \geqslant (1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$，

所以$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$．即当$m=k+1$时，不等式也成立.

综合（ⅰ）（ⅱ）知，对一切正整数m，不等式都成立.

（Ⅱ）证：当$n \geqslant 6,\ m \leqslant n$时，由（Ⅰ）得$\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^m \geqslant 1-\dfrac{m}{n+3}>0$，

于是$\left(1-\dfrac{m}{n+3}\right)^n \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^{nm}=\left[\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n\right]^m<\left(\dfrac{1}{2}\right)^m$，$m=1,2,\cdots,\ n$．

（Ⅲ）解：由（Ⅱ）知，当$n \geqslant 6$时，

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2^n}<1,$$

$$\therefore \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{3}{n+3}\right)^n<1.$$

即$3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n<(n+3)^n$．即当$n \geqslant 6$时，不存在满足该等式的正整数$n$．

故只需要讨论$n=1,2,3,4,5$的情形：

当$n=1$时，$3 \neq 4$，等式不成立；

当$n=2$时，$3^2+4^2=5^2$，等式成立；

当$n=3$时，$3^3+4^3+5^3=6^3$，等式成立；

当$n=4$时，$3^4+4^4+5^4+6^4$为偶数，而7^4为奇数，故$3^4+4^4+5^4+6^4 \neq 7^4$，等式不成立；

当$n=5$时，同$n=4$的情形可分析出，等式不成立.

综上，所求的n只有$n=2,3$．

解法2：（Ⅰ）证：当$x=0$或$m=1$时，原不等式中等号显然成立，下用数学归纳法证明：

当$x>-1$，且$x \neq 0$时，$m \geqslant 2$，$(1+x)^m>1+mx$．　　①

（ⅰ）当$m=2$时，左边$=1+2x+x^2$，右边$=1+2x$，因为$x \neq 0$，所以$x^2>0$，即左边$>$右边，不等式①成立；

（ⅱ）假设当$m=k(k \geqslant 2)$时，不等式①成立，即$(1+x)^k>1+kx$，则当$m=k+1$时，

因为$x>-1$，所以$1+x>0$．又因为$x \neq 0,\ k \geqslant 2$，所以$kx^2>0$．

于是在不等式$(1+x)^k>1+kx$两边同乘以$1+x$得

$$(1+x)^k\cdot(1+x)>(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x,$$

所以$(1+x)^{k+1}>1+(k+1)x$．即当$m=k+1$时，不等式①也成立．

综上所述，所证不等式成立．

（Ⅱ）证：当$n\geqslant 6$，$m\leqslant n$时，$\because\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}$，$\therefore\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^m\right]^n<\left(\frac{1}{2}\right)^m$，

而由（Ⅰ），$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^m\geqslant 1-\frac{m}{n+3}>0$，

$$\therefore\left(1-\frac{m}{n+3}\right)^n\leqslant\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^m\right]^n<\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

（Ⅲ）解：假设存在正整数$n_0\geqslant 6$使等式$3^{n_0}+4^{n_0}+\cdots+(n_0+2)^{n_0}=(n_0+3)^{n_0}$成立，

即有$\left(\frac{3}{n_0+3}\right)^{n_0}+\left(\frac{4}{n_0+3}\right)^{n_0}+\cdots+\left(\frac{n_0+2}{n_0+3}\right)^{n_0}=1$．　　　　②

又由（Ⅱ）可得$\left(\frac{3}{n_0+3}\right)^{n_0}+\left(\frac{4}{n_0+3}\right)^{n_0}+\cdots+\left(\frac{n_0+2}{n_0+3}\right)^{n_0}$

$$=\left(1-\frac{n_0}{n_0+3}\right)^{n_0}+\left(1-\frac{n_0-1}{n_0+3}\right)^{n_0}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n_0+3}\right)^{n_0}$$

$$<\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0-1}+\cdots+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^{n_0}}<1,$$与②式矛盾．

故当$n\geqslant 6$时，不存在满足该等式的正整数n．

下同解法 1．