

1999年青海高考理科数学真题及答案

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目、试卷类型 (A 或 B) 用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后。再选涂其它答案, 不能答在试题卷上。
3. 考试结束。监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式:

三角函数的积化和差公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] & \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] & \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]\end{aligned}$$

正棱台、圆台的侧面积公式:

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l \quad \text{其中 } c', c \text{ 分别表示上、下底面周长, } l \text{ 表示斜高或母线长.}$$

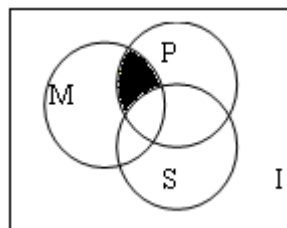
球的体积公式: $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, 其中 R 表示球的半径.

台体的体积公式: $V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$, 其中 S' , S 分别表示上下底面积, h 表示高.

一、选择题: 本大题共 14 小题; 第 1—10 题每小题 4 分, 第 11—14 题每小题 5 分, 共 60 分在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

(1) 如图, I 是全集, M 、 P 、 S 是 I 的 3 个子集, 由阴影部分所表示的集合是 ()

- (A) $(M \cap N) \cap S$ (B) $(M \cap P) \cup S$
(C) $(M \cap P) \cap \bar{S}$ (D) $(M \cap P) \cup \bar{S}$



(2) 已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中, 集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中

元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a \in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $\{a\}$, 则集合 B 中元素的个数是 ()

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

(3) 若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$, $f(a)=b$, $ab \neq 0$, 则 $g(b)$ 等于 ()

- (A) a (B) a^{-1} (C) b (D) b^{-1}

(4) 函数 $f(x)=M\sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[a, b]$ 上是增函数, 且 $f(a)=-M$, $f(b)=M$, 则函数 $g(x)=M\cos(\omega x + \phi)$ 在 $[a, b]$ 上 ()

- (A) 是增函数 (B) 是减函数
(C) 可以取得最大值 M (D) 可以取得最小值 $-M$

(5) 若 $f(x)\sin x$ 是周期为 π 的奇函数, 则 $f(x)$ 可以是

- (A) $\sin x$ (B) $\cos x$ (C) $\sin 2x$ (D) $\cos 2x$

(6) 在极坐标系中, 曲线 $\rho = 4\sin(\theta - \frac{\pi}{3})$ 关于 ()

- (A) 直线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 对称 (B) 直线 $\theta = \frac{5}{6}\pi$ 轴对称
(C) 点 $(2, \frac{\pi}{3})$ 中心对称 (D) 极点中心对称

(7) 若干毫升水倒入底面半径为 2 cm 的圆柱形器皿中, 量得水面的高度为 6 cm , 若将这些水倒入轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中, 则水面的高度是 ()

- (A) $6\sqrt{3}\text{ cm}$ (B) 6 cm (C) $2\sqrt[3]{18}\text{ cm}$ (D) $3\sqrt[3]{12}\text{ cm}$

(8) 若 $(2x + \sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$ 的值为 ()

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

(9) 直线 $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ 截圆 $x^2 + y^2 = 4$ 得的劣弧所对的圆心角为 ()

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(10) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形 $EF \parallel AB$



$F = \frac{3}{2}$, EF 与面 AC 的距离为 2, 则该多面体的体积 ()

- (A) $\frac{9}{2}$ (B) 5 (C) 6 (D) $\frac{15}{2}$

(11) 若 $\sin \alpha > \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{ctg} \alpha$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 则 $\alpha \in$ ()

- (A) $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ (B) $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ (C) $(0, \frac{\pi}{4})$ (D) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

(12) 如果圆台的上底面半径为 5, 下底面半径为 R , 中截面把圆台分为上、下两个圆台, 它们的侧面积的比为 1:2, 那么 $R =$ ()

- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25

(13) 已知丙点 $M(1, \frac{5}{4})$ 、 $N(-4, -\frac{5}{4})$, 给出下列曲线方程: $4x+2y-1=0$ ② $x^2 + y^2 = 3$

③ $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ④ $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 在曲线上存在点 P 满足 $|MP| = |NP|$ 的所有曲线方程是

- (A) ①③ (B) ②④ (C) ①②③ (D) ②③④

(14) 某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘。根据需要, 软件至少买 3 片, 磁盘至少买 2 盒, 则不同的选购方式共有 ()

- (A) 5 种 (B) 6 种 (C) 7 种 (D) 8 种

二、填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分。把答案填在题中横线上。

(15) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F_1 , 右准线为 L_2 . 若过 F_1 且垂直于 x

轴的弦的长等于点 F_1 到 L_1 的距离, 则椭圆的离心率是_____。

(16) 在一块并排 10 垄的田地中, 选择 2 垄分别种植 A、B 两种作物, 每种作物种植一垄, 为有利于作物生长, 要求 A、B 两种作物的间隔不小于 6 垄, 则不同的选垄方法共有_____种 (用数字作答)

(17) 若正数 a 、 b 满足 $ab = a + b + 3$, 则 ab 的取值范围是_____

(18) α 、 β 是两个不同的平面, m 、 n 是平面 α 、 β 之外的两条直线。给出四个论断:

① $m \perp n$ ② $\alpha \perp \beta$ ③ $n \perp \beta$ ④ $m \perp \alpha$ 以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：_____

三. 解答题：本大题共 6 小题；共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(19) (本小题满分 10)

解不等式 $\sqrt{3\log_a x - 2} < 2\log_a x - 1$ ($a > 0, a \neq 1$)

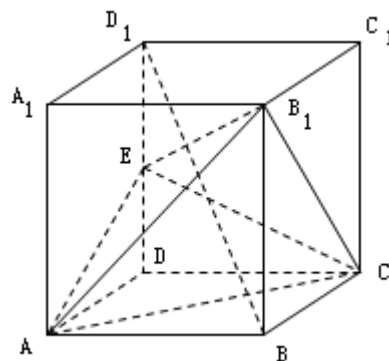
(20) (本小题满分 12 分)

设复数 $z = 3\cos\theta + i \cdot 2\sin\theta$. 求函数 $y = \theta - \arg z$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 的最大值以及对应的 θ 值

(21) (本小题满分 12 分)

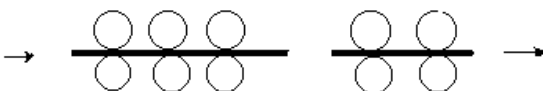
如图：已知正四棱锥 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 点 E 在棱 D_1D 上, 截面 $EAC \parallel D_1B$, 且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45° , $AB = a$

- (1) 求截面 EAC 的面积;
- (2) 求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离;
- (3) 求三棱锥 $B_1 - EAC$ 的体积。



(22) (本小题满分 12 分)

右图为一台冷轧机的示意图。冷轧机由若干对轧辊组成,带钢从一端输入,经过各对轧辊逐步减薄后输出。



(1) 输入钢带的厚度为 α , 输出钢带的厚度为 β ,

若每对轧辊的减薄率不超过 r_0 , 问冷轧机至少需要安装多少对轧辊?

(一对轧辊减薄率 = $\frac{\text{输入该对的带钢厚度} - \text{从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}$)

(2) 已知一台冷轧机共有 4 台减薄率为 20% 的轧辊, 所有轧辊周长均为 1600mm。若第 k 对轧辊有缺陷, 每滚动一周在带钢上压出一个疵点, 在冷轧机输出的带钢上, 疵点的间距为 L_k . 为了便于检修, 请计算 L_1, L_2, L_3 并填入下表 (轧钢过程中, 带钢宽度不变, 且不考虑损耗)

轧钢序列号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k (单位 mm)				1600

(23) (本小题满分 14 分)

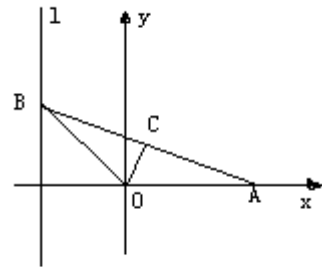
已知函数 $y=f(x)$ 的图象是自原点出发的一条折线。当

$n \leq y \leq n+1 (n=0,1,2,\dots)$ 时, 该图象是斜率为 b^n 的线段 (其中正常数 $b \neq 1$), 设数列 $\{x_n\}$ 由 $f(x_n) = n (n=1,2,\dots)$ 定义。

- (1) 求 x_1, x_2 和 x_n 的表达式;
- (2) 求 $f(x)$ 的表达式, 并写出其定义域;
- (3) 证明: $y = f(x)$ 的图象与 $y = x$ 的图象没有横坐标大于1的交点

(24) (本小题满分 14 分)

如图, 给出定点 $A(a, 0)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 和直线 $l: x = -1$, B 是直线 l 上的动点, $\angle BOA$ 的角平分线交 AB 于 C 点, 求点 C 的轨迹方程, 并讨论方程表示的曲线类型与 a 值的关系。



参考答案

说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力, 并给了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分解答应得分数的一半, 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分。

三、解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数, 选择题和填空题不给中间分。

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算。第(1)—第(10)题每小题4分, 第(11)—(14)题每小题5分, 满分60分。

- (1) C (2) A (3) A (4) C (5) B

(6) B (7) B (8) A (9) C (10) D

(11) B (12) D (13) D (14) C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分

(15) $\frac{1}{2}$ (16) 12 (17) $[9, +\infty)$

(18) $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \perp \beta \Rightarrow m \perp n$; 或 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

三.

(19) 本小题主要考查对数函数的性质，对数不等式、无理不等式解法等基础知识，考查分类论的思想，满分 10 分

解：原不等式等价于

$$\begin{cases} 3 \log_a x - 2 \geq 0 \\ 3 \log_a x - 2 < (2 \log_a x - 1)^2 \\ 2 \log_a x - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{可解得:}$$

当 $a > 1$ 时得所求的解集是： $\{x \mid a^{\frac{2}{3}} \leq x < a^{\frac{3}{4}}\} \cup \{x \mid x > a\}$

当 $0 < a < 1$ 时得所求的解集是： $\{x \mid a^{\frac{3}{4}} < x \leq a^{\frac{2}{3}}\} \cup \{x \mid 0 < x < a\}$

(20) 本小题主要考查复数的基本概念、三角公式和不等式等基础知识，考查综合运用所学数学知识解决问题的能力，满分 12 分。

由 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 得 $\operatorname{tg} \theta > 0$

由 $z = 3 \cos \theta + i 2 \sin \theta$, 得 $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ 及 $\operatorname{tg}(\arg z) = \frac{2 \sin \theta}{3 \cos \theta} = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \theta$

$$\text{故 } \operatorname{tgy} = \operatorname{tg}(\theta - \arg z) = \frac{\operatorname{tg} \theta - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \theta}{1 + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{\frac{2}{\operatorname{tg} \theta} + 2 \operatorname{tg} \theta}$$

$$\therefore \frac{3}{\operatorname{tg} \theta} + 2 \operatorname{tg} \theta \geq 2\sqrt{6} \quad \therefore \frac{1}{\frac{3}{\operatorname{tg} \theta} + 2 \operatorname{tg} \theta} \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$$

当且仅当 $\frac{3}{\operatorname{tg} \theta} = 2 \operatorname{tg} \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 时, 即 $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, 上式取等号

故 $L_3 = \frac{1600}{0.8} = 2000(\text{mm})$ 同理 $L_2 = \frac{L_3}{0.8} = 2500(\text{mm})$ $L_1 = \frac{L_2}{0.8} = 3125(\text{mm})$

填表如下:

轧钢序列号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k (单位 mm)	3125	2500	2000	1600

(23) 本小题主要考查函数的基本概念、等比数列、数列极限的基础知识, 考查归纳、推理和综合的能力。满分 14 分。

(1) 依题意

$f(0) = 0$, 又由 $f(x_1) = 1$, 当 $0 \leq y \leq 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象是斜率为 $b^0 = 1$ 的线段, 故由 $\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = 1$ 得 $x_1 = 1$. 又由 $f(x_2) = 2$, 当 $1 \leq y \leq 2$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象是

斜率为 b 的线段, 故由 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = b$, 即 $x_2 - x_1 = \frac{1}{b}$ 得 $x_2 = 1 + \frac{1}{b}$

记 $x_0 = 0$ 由函数 $y = f(x)$ 图象中第 n 段线段的斜率为 b^{n-1} , 故得

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = b^{n-1} \quad \text{又 } f(x_n) = n, f(x_{n-1}) = n-1, \text{ 故 } x_n - x_{n-1} = \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

由此知数列 $\{x_n - x_{n-1}\}$ 为等比数列, 其首项为 1, 公比为 $\frac{1}{b}$ 由 $b \neq 1$, 得

$$x_n = 1 + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b^{n-1}} = \frac{b - \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}}{b-1}$$

(2) 当 $0 \leq y \leq 1$, 从(1)知 $y = x$, 即当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$

当 $n \leq y \leq n+1$ 时, 即当 $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ 时, 由(1)知

$$f(x) = n + b^n(x - x_n), (x_n \leq x \leq x_{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots)$$

为求 $f(x)$ 的定义域, 须对 $x_n = \frac{b - \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}}{b-1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 进行讨论.

$$\text{当 } b > 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - (\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1} = \frac{b}{b-1}$$

当 $0 < b < 1$ 时, $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow \infty$

综上所述: 当 $b > 1$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $[0, \frac{b}{b-1})$

当 $0 < b < 1$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$

(3) 先证明当 $b > 1, 1 < x < \frac{b}{b-1}$ 时, 恒有 $f(x) < x$ 成立.

对任意的 $x \in (1, \frac{b}{b-1})$, 存在 x_n , 使 $x_n < x \leq x_{n+1}$, 此时有

$$f(x) - f(x_n) = b^n(x - x_n) > x - x_n \quad (n \geq 1)$$

$$\Rightarrow f(x) - x > f(x_n) - x_n \quad \text{又 } f(x_n) = n > 1 + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b^{n-1}} = x_n$$

故 $f(x_n) - x_n > 0$, 所以 $f(x) - x > f(x_n) - x_n > 0$, 即有 $f(x) > x$ 成立

其次, 当 $b < 1$ 时, 仿上述证明, 可知当 $x > 1$ 时, 恒有 $f(x) < x$ 成立

故函数 $f(x)$ 的图象与 $y = x$ 的图象没有横坐标大于 1 的交点.

(24) 本小题主要考查曲线与方程, 直线和圆锥曲线等基础知识, 以及求动点轨迹的基本技能和综合运用数学知识解决问题的能力。满分 14 分。

依题意, 记 $(-1, b)$ ($b \in R$), 则直线 OA 和 OB 的方程分别为 $y=0$ 和 $y=-bx$. 设点 $C(x, y)$, 则有 0

$\leq x < a$, 由 OC 平分 $\angle AOB$, 知点 C 到 OA, OB 距离相等, 根据点到直线的距离公式得

$$|y| = \frac{|y + bx|}{\sqrt{1 + b^2}} \quad \text{①}$$

依题意设, 点 C 在直线 AB 上, 故有 $y = -\frac{b}{1+a}(x-a)$

$$\text{由 } x - a \neq 0 \Rightarrow b = -\frac{(1+a)y}{x-a} \quad \text{②}$$

将②代入①得

$$y^2 \left[1 + \frac{(1+a)^2 y^2}{(x-a)^2} \right] = \left[y - \frac{(1+a)xy}{x-a} \right]^2 \Rightarrow y [(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2] = 0$$

若 $y \neq 0$, 则 $(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2 = 0$ ($0 < x < b$)

若 $y=0$, 则 $b=0$, $\angle AOB = \pi$, 点 C 的坐标为 $(0, 0)$, 满足上式.

综上所述得出点 C 的轨迹方程为

$$(1-a)x^2 - 2ax + (1+a)y^2 = 0 \quad (0 \leq x < a)$$

$$(i) \text{ 当 } a=1 \text{ 时, 轨迹方程化为 } y^2 = x \quad (0 \leq x < a) \quad \text{③}$$

(ii) 当 $a \neq 1$ 时, 轨迹方程化为
$$\frac{(x - \frac{a}{1-a})^2}{(\frac{a}{1-a})^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{1-a^2}} = 1 \quad (0 \leq x < a) \quad \textcircled{4}$$

所以, 当 $0 < a < 1$ 时, 方程③表示椭圆弧段;

当 $a > 1$ 时, 方程④表示双曲线一支的弧段.