2001年黑龙江高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第II卷3至9页。共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题　60分）

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$$

其中c'、c分别表示上、下底面周长，l表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V_{台体}=\frac{1}{3}\left(S'+\sqrt{S'S}+S\right)h$$

其中S'、S分别表示上、下底面积，h表示高

一、 选择题：本大题共12小题；第每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）　若$\sin\theta\cos\theta>0$，则θ在

（A）第一、二象限　（B）第一、三象限　（C）第一、四象限　（D）第二、四象限

（2）过点$A(1,-1)$、$B(-1,1)$且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的方程是

（A）$(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　（B）$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

（C）$(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　（D）$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

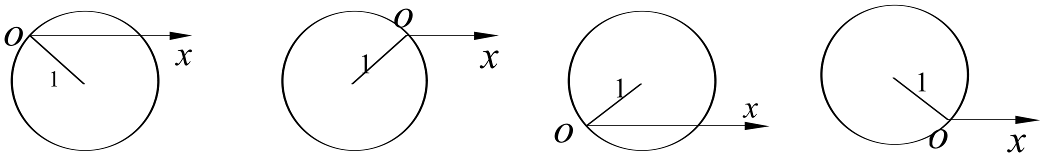
（3）设$\{a_n\}$是递增等差数列，前三项的和为12，前三项的积为48，则它的首项是

（A）1　　（B）2　　（C）4　　（D）6

（4）若定义在区间$(-1,0)$内的函数$f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足$f(x)>0$，则a的取值范围是

（A）（0，$\frac{1}{2}$）　　（B）（0，$\frac{1}{2}$]　　（C）（$\frac{1}{2}$，$+\infty$）　　（D）（0，$+\infty$）

(5) 极坐标方程$\rho=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$的图形是



（A）　　　　（B）　　　　（C）　　　　（D）

（6）函数$y=\cos x+1(-\pi\le x\le 0)$的反函数是

（A）$y=-\arccos(x-1)(0\le x\le 2)$　　（B）$y=\pi-\arccos(x-1)(0\le x\le 2)$

（C）$y=\arccos(x-1)(0\le x\le 2)$　　（D）$y=\pi+\arccos(x-1)(0\le x\le 2)$

（7）若椭圆经过原点，且焦点为$F_1(1,0),F_2(3,0)$，则其离心率为

（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

（8）若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则

（A）$a<b$　（B）$a>b$　（C）$ab<1$　（D）$ab>2$

（9）在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，若$AB=\sqrt{2}BB_1$，则AB_1与C_1B所成的角的大小为

（A）60°　　（B）90°　　（C）105°　　（D）75°

（10）设$f(x)$、$g(x)$都是单调函数，有如下四个命题：

①若$f(x)$单调递增，$g(x)$单调递增，则$f(x)-g(x)$单调递增；

②若$f(x)$单调递增，$g(x)$单调递减，则$f(x)-g(x)$单调递增；

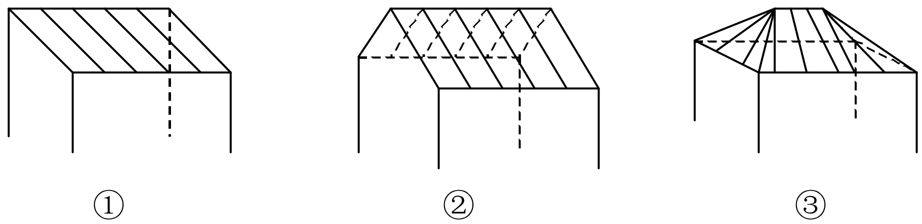
③若$f(x)$单调递减，$g(x)$单调递增，则$f(x)-g(x)$单调递减；

④若$f(x)$单调递减，$g(x)$单调递减，则$f(x)-g(x)$单调递减；

其中，正确的命题是

（A）①③　（B）①④　（C）②③　（D）②④

（11）一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法：①单向倾斜；②双向倾斜；③四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为P_1、P_2、P_3.



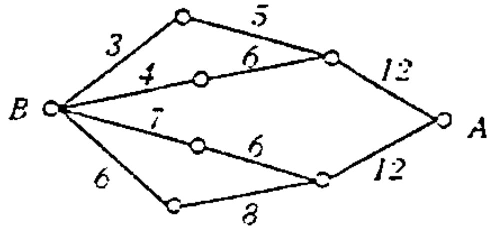
若屋顶斜面与水平面所成的角都是α，则

（A）$P_3 > P_2 > P_1$（B）$P_3 > P_2 = P_1$（C）$P_3 = P_2 > P_1$（D）$P_3 = P_2 = P_1$

（12）如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联。连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量。现从结点A向结点B传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递。则单位时间内传递的最大信息量为

（A）26　（B）24

（C）20　（D）19



第 II 卷（非选择题　90 分）

注意事项：

1．第 II 卷共 7 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚。

二．填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

（13）若一个椭圆的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个椭圆的侧面积是_____

（14）双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的两个焦点为$F_1$、$F_2$，点$P$在双曲线上.若$PF_1 \perp PF_2$，则点$P$到 x 轴的距离为__________.

（15）设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，S_n是它的前 n 项和.若$\{S_n\}$是等差数列，则$q=$_________ .

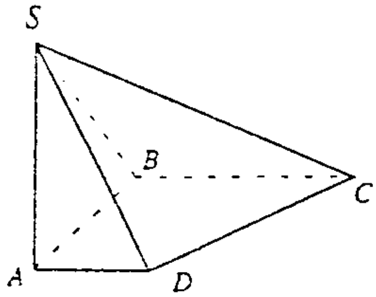
（16）圆周上有 2n 个等分点（$n>1$），以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题；共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或

演算步骤。

(17)(本小题满分 12 分)

如图，在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$SA\perp$ 面 $ABCD$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$.



(Ⅰ)求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积；

(Ⅱ)求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.

(18)(本小题满分 12 分)

已知复数 $z_1=i(1-i)^3$.

(Ⅰ)求 $\arg z_1$ 及 $|z_1|$；

(Ⅱ)当复数 z 满足 $|z|=1$，求 $|z-z_1|$ 的最大值.

(19)(本小题满分 12 分)

设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，经过点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点. 点 C 在抛物线的准线上，且 $BC\ /\!/$ x 轴. 证明直线 AC 经过原点 O.

(20)(本小题满分 12 分)

已知 i,m,n 是正整数，且 $1<i\le m<n$.

(Ⅰ)证明 $n^iP_m^i<m^iP_n^i$；

(Ⅱ)证明 $(1+m)^n>(1+n)^m$.

(21)(本小题满分 12 分)

从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业. 根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少 $\frac{1}{5}$. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 $\frac{1}{4}$.

(Ⅰ)设 n 年内（本年度为第一年）总投入为 a_n 万元，旅游业总收入为 b_n 万元. 写出 a_n,b_n 的表达式；

(Ⅱ)至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入?

(22)(本小题满分 14 分)

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$，都有

$f(x_1+x_2)=f(x_1)\bullet f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

(Ⅰ)求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$；

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 是周期函数；

(Ⅲ)记 $a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

参考解答及评分标准

说明：

一. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生物解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定部分的给分，但不得超过该部分正确解答得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四. 只给整数分数．选择题和填空题不给中间分.

一. 选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 60 分.

（1）B	（2）C	（3）B	（4）A	（5）C
（6）A	（7）C	（8）A	（9）B	（10）C
（11）D	（12）D			

二. 填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 4 分，满分 16 分.

（13）2π　　（14）$\frac{16}{5}$　　（15）1　　（16）$2n(n-1)$

三. 解答题：

（17）本小题考查线面关系和棱锥体积计算，以及空间想象能力和逻辑推理能力．满分 12 分.

解：（Ⅰ）直角梯形 $ABCD$ 的面积是

$$M_{底面}=\frac{1}{2}\left(BC+AD\right)\cdot AB=\frac{1+0.5}{2}\times 1=\frac{3}{4},$$ ……2 分

∴ 四棱锥 S—$ABCD$ 的体积是

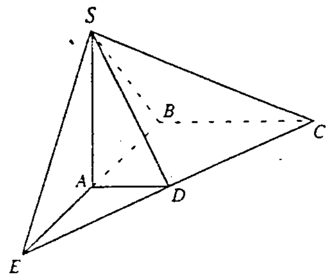
$$V=\frac{1}{3}\times SA\times M_{底面}$$

$$=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{4}.$$ ……4 分

（Ⅱ）延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE 则 SE 是所求二面角的棱．……6 分

∵ $AD // BC$，$BC = 2AD$，



∴ $EA = AB = SA$，∴ $SE\perp SB$，

∵ $SA\perp$ 面 $ABCD$，得 $SEB\perp$ 面 EBC，EB 是交线，

又 $BC\perp EB$，∴ $BC\perp$ 面 SEB，

故 SB 是 CS 在面 SEB 上的射影，

∴ $CS\perp SE$，

所以∠BSC 是所求二面角的平面角．……10 分

∵ $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{2}$，$BC=1$，$BC\perp SB$，

∴ $\tan\angle BSC=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

即所求二面角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．……12 分

（18）本小题考查复数基本性质和基本运算，以及分析问题和解决问题的能力．满分 12 分．

解：（Ⅰ）$z_1 = i\,(1-i)^3 = 2-2i$，

将 z_1 化为三角形式，得

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$

∴ $\arg z_1=\dfrac{7\pi}{4}$，$\left|z_1\right|=2\sqrt{2}$．……6 分

（Ⅱ）设 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，则

$z-z_1=(\cos\alpha-2)+(\sin\alpha+2)\,i$，

$$|z-z_1|^2=(\cos\alpha-2)^2+(\sin\alpha+2)^2$$

$$=9+4\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4}),$$ ……9 分

当 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=1$ 时，$|z-z_1|^2$ 取得最大值 $9+4\sqrt{2}$．

从而得到 $|z-z_1|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}+1$．……12 分

（19）本小题考查抛物线的概念和性质，直线的方程和性质，运算能力和逻辑推理能力．满分 12 分．

证明一：因为抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 $F(\frac{p}{2},0)$，所以经过点 F 的直线的方程可设为

$$x=my+\frac{p}{2};$$ ……4 分

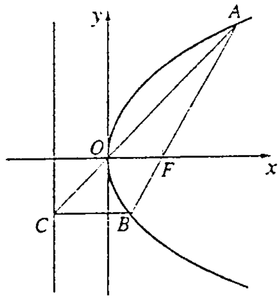
代入抛物线方程得

$y^2-2pmy-p^2=0$，

若记 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 y_1，y_2 是该方程的两个根，所以

$$y_1y_2=-p^2.$$ ……8 分

因为 $BC//x$ 轴，且点 c 在准线 $x=-\frac{p}{2}$ 上，所以点 c 的坐标为 $(-\frac{p}{2},y_2)$，



故直线 CO 的斜率为

$$k=\frac{y_2}{-\frac{p}{2}}=\frac{2p}{y_1}=\frac{y_1}{x_1}.$$

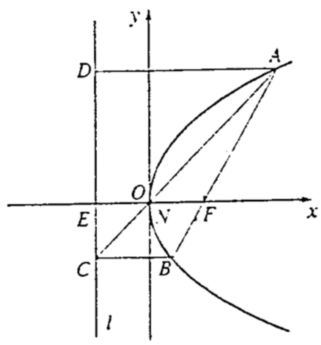
即 k 也是直线 OA 的斜率，所以直线 AC 经过原点 O．

……12 分

证明二：如图，记 x 轴与抛物线准线 l 的交点为 E，过 A 作 $AD\perp l$，D 是垂足．则

$AD//FE//BC$．……2 分

连结 AC，与 EF 相交于点 N，则



$$\frac{|EN|}{|AD|}=\frac{|CN|}{|AC|}=\frac{|BF|}{|AB|},$$

$$\frac{|NF|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AB|},$$ ……6 分

根据抛物线的几何性质，$|AF|=|AD|$，

$|BF|=|BC|$，……8 分

$$\therefore\ |EN|=\frac{|AD|\cdot|BF|}{|AB|}=\frac{|AF|\cdot|BC|}{|AB|}=|NF|,$$

即点 N 是 EF 的中点，与抛物线的顶点 O 重合，所以直线 AC 经过原点 O． ……12 分

（20）本小题考查排列、组合、二项式定理、不等式的基本知识和逻辑推理能力．满分 12 分．

（Ⅰ）证明： 对于 $1<i\leqslant m$ 有

$$p_m^i=m\cdot\cdots\cdot(m-i+1),$$

$$\frac{p_m^i}{m^i}=\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\cdots\cdot\frac{m-i+1}{m},$$

同理 $\frac{p_n^i}{n^i}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-i+1}{n}$， ……4 分

由于 $m<n$，对整数 $k=1,2\cdots,i-1$，有 $\frac{n-k}{n}>\frac{m-k}{m}$，

所以 $\frac{p_n^i}{n^i}>\frac{p_m^i}{m^i}$，即 $m^ip_n^i>n^ip_m^i$． ……6 分

（Ⅱ）证明由二项式定理有

$$(1+m)^n=\sum_{i=0}^{n}m^iC_n^i,$$

$$(1+n)^m=\sum_{i=0}^{m}n^iC_m^i,$$ ……8 分

由（Ⅰ）知 $m^ip_n^i>n^ip_m^i$（$1<i\leqslant m<n$=，

而 $C_m^i=\frac{p_m^i}{i!}$，$C_n^i=\frac{p_n^i}{i!}$， ……10 分

所以，$m^iC_n^i>n^iC_m^i$（$1<i\leqslant m<n$=．

因此，$\sum_{i=2}^{m}m^iC_n^i>\sum_{i=2}^{m}n^iC_m^i$．

又 $m^0C_n^0=n^0C_m^0=1$，$mC_n^1=nC_m^1=mn$，$m^iC_n^i>0(m<i\leq n)$．

$$\therefore\ \sum_{i=0}^{n}m^iC_n^i>\sum_{i=0}^{m}n^iC_m^i.$$

即 $(1+m)^n>(1+n)^m$. ……12 分

（21）本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识；考查综合运用数学知识解决实际问题的能力．满分 12 分．

解：（Ⅰ）第 1 年投入为 800 万元，第 2 年投入为 $800\times(1-\frac{1}{5})$ 万元，……，第 n 年投入为 $800\times(1-\frac{1}{5})^{n-1}$ 万元．

所以，n 年内的总投入为

$$a_n=800+800\times(1-\frac{1}{5})+\cdots+800\times(1-\frac{1}{5})^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}800\times(1-\frac{1}{5})^{k-1}$$

$$=4000\times[1-(\frac{4}{5})^n];$$ ……3 分

第 1 年旅游业收入为 400 万元，第 2 年旅游业收入为 $400\times(1+\frac{1}{4})$ 万元，……，第 n 年旅游业收入为 $400\times(1+\frac{1}{4})^{n-1}$ 万元．

所以，n 年内的旅游业总收入为

$$b_n=400+400\times(1+\frac{1}{4})+\cdots+400\times(1+\frac{1}{4})^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}400\times(\frac{5}{4})^{k-1}$$

$$=1600\times[(\frac{4}{5})^n-1].$$ ……6 分

（Ⅱ）设至少经过 n 年旅游业的总收入才能超过总投入，由此

$b_n-a_n>0$，

即 $1600\times[(\frac{5}{4})^n-1]-4000\times[1-(\frac{4}{5})^n]>0$.

化简得 $5\times(\frac{4}{5})^n+2\times(\frac{4}{5})^n-7>0$， ……9 分

设 $x=(\frac{4}{5})^n$，代入上式得

$5x^2-7x+2>0$，

解此不等式，得

$x<\frac{2}{5}$，$x>1$(舍去)．

即　　　　　　　　　　$\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{2}{5}$，

由此得　　　　　　　　$n\geqslant 5$．

答：至少经过 5 年旅游业的总收入才能超过总投入．　　　　　　　　……12 分

（22）本小题主要考查函数的概念、图像，函数的奇偶性和周期性以及数列极限等基础知识；考查运算能力和逻辑思维能力．满分 14 分．

（Ⅰ）解：因为对 x_1，$x_2\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，所以

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0,\ x\in[0,\ 1].$$

$$\because\ f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$　　　　……3 分

$$f(1)=a>0,$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}},\ f\left(\frac{1}{4}\right)=a^{\frac{1}{4}}.$$　　　　……6 分

（Ⅱ）证明：依题设 $y=f(x)$关于直线 $x=1$ 对称，

故 $f(x)=f(1+1-x)$，

即 $f(x)=f(2-x)$，$x\in\mathrm{R}$．　　　　……8 分

又由 $f(x)$是偶函数知 $f(-x)=f(x)$，$x\in\mathrm{R}$，

$\therefore$ $f(-x)=f(2-x)$，$x\in\mathrm{R}$，

将上式中 $-x$ 以 x 代换，得

$f(x)=f(x+2)$，$x\in\mathrm{R}$．

这表明 $f(x)$是 R 上的周期函数，且 2 是它的一个周期．　　　　……10 分

（Ⅲ）解：由（Ⅰ）知 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[0,\ 1]$．

$$\because\ f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(n\cdot\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}+(n-1)\cdot\frac{1}{2n}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot f\left((n-1)\cdot\frac{1}{2n}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot\cdots\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^n,$$

$f(\frac{1}{2}) = a^{\frac{1}{2}}$，

∴ $f(\frac{1}{2n}) = a^{\frac{1}{2n}}$.

∵ $f(x)$的一个周期是 2，

∴ $f(2n+\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n})$，因此 $a_n = a^{\frac{1}{2n}}$，……12 分

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}\ln a) = 0$.……14 分