2023年上海高考数学真题及答案

考生注意:

1. 本试卷共5页,21道试题,满分150分.考试时间120分钟.
2. 本考试分设试卷和答题纸.试卷包括试题与答题要求.作答必须涂(选择题)或写（非选择题）在答题纸上,在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前,务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面消楚地填写姓名、准考证号,并将核对后的条形码粘在指定位置上,在答题纸反面清超地填写姓名.

一、填空题（本大题共有12题,满分54分,第 $1\sim6$ 题每题4分,第 $7\sim12$ 题每题5分)考生应在答题纸的相应位置填写结果.

1. 不等式 $|x-2|<1$ 的解集为 ________________ ；

2. 已知 $\vec{a}=(-2,3),\vec{b}=(1,2)$, 求 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ________________ ；

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列,且 $a_1=3,q=2$, 求 $s_6=$ ________________ ；

4. 已知 $\tan\alpha=3$, 求 $\tan2\alpha=$ ________________ ；

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x,x>0\\1,x\le0\end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域是 ________________ ；

6. 已知当 $z=1+i$, 则 $|1-i\cdot z|=$ ________________ ；

7. 已知 $x^2+y^2-4y-m=0$ 的面积为 π, 求 $m=$ ________________ ；

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4,b=5,c=6$, 求 $\sin A=$ ________________ ；

9. 国内生产总值(GDP)是衡量地区经济状况的最佳指标,根据统计数据显示,某市在2020年间经济高质量增长,GDP稳步增长,第一季度和第四季度的GDP分别为231和242,且四个季度GDP的中位数与平均数相等,则2020年GDP总额为 ________________ ；

10. 已知$(1+2023x)^{100}+(2023-x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}$, 其中$a_0,a_1,a_2\cdots a_{100}\in R$, 若$0\le k\le 100$且$k\in N$, 当$a_k<0$时, k的最大值是________________ ;

11. 公园修建斜坡, 假设斜坡起点在水平面上, 斜坡与水平面的夹角为θ, 斜坡终点距离水平面的垂直高度为4米, 游客每走一米消耗的体能为$(1.025-\cos\theta)$, 要使游客从斜坡底走到斜坡顶端所消耗的总体能最少, 则$\theta=$________________ ;

12. 空间内存在三点A、B、C, 满足$AB=AC=BC=1$, 在空间内取不同两点(不计顺序), 使得这两点与A、B、C可以组成正四棱锥, 求方案数为________________ ;

二、选择题（本题共有4题, 满分18分, 13、14每题4分, 15、16题每题5分）每题有且只有一个正确选项, 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

13. 已知$P=\{1,2\}$, $Q=\{2,3\}$, 若$M=\{x|x\in P$且$x\notin Q\}$, 则$M=($ $)$.

A. $\{1\}$

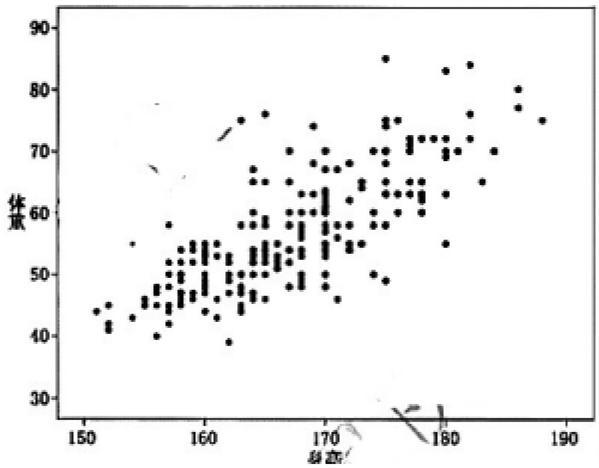
B. $\{2\}$

C. $\{1,2\}$

D. $\{1,2,3\}$

14. 根据身高和体重散点图, 下列说法正确的是().
A. 身高越高, 体重越重
B. 身高越高, 体重越轻

C.身高与体重成正相关



D.身高与体重成负相关

15.设$a>0$,函数$y=\sin x$在区间$[a,2a]$上的最小值为s_a,在$[2a,3a]$上的最小值为t_a,当$\mathbf{a}$变化时,以下不可能的情形是().

A.$s_\theta>0$且$t_\sigma>0$

B.$s_q<0$且$t_a<0$

C.$s_q>0$且$t_a<0$

D.$s_q<0$且$t_q>0$

16.在平面上,若曲线Γ具有如下性质:存在点M,使得对于任意点$P\in\Gamma$,都有$Q\in\Gamma$使得$|PM|\cdot|QM|=1$.则称这条曲线为″自相关曲线″.判断下列两个命题的真假().

(1)所有椭圆都是“自相关曲线″.

(2)存在是“自相关曲线”的双曲线.

A.(1)假命题;(2)真命题

B.(1)真命题;(2)假命题

C.(1)真命题;(2)真命题

D.(1)假命题;(2)假命题

三、解答题(本大题共有5题,满分78分)解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17.(本题满分14分)本题共有2个小题,第1小邀满分6分,第2小题满分8分.

直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1, AB \parallel DC, AB \perp AD, AB=2, AD=3, DC=4$.

(1)求证:$A_1B \perp$面DCC_1D

(2)若四棱柱体积为36,求二面角A_1-BD-A的大小

18.(本题满分14分)本题共有2个小题,第1小题满分6分,第2小题满分8分.

函数$f(x)=\frac{x^2+(3a+1)x+c}{x+a}(a,c\in R)$

(1)当$a=0$是,是否存在实数c,使得$f(x)$为奇函数

(2)函数$f(x)$的图像过点$(1,3)$,且$f(x)$的图像x轴负半轴有两个交点求实数a的取值范围

19. **(本题满分14分)本题共有2个小题,第1小题满分2分,第2小题满分6分,第3小题满分8分.**

21世纪汽车博览会在上海2023年6月7日在上海举行,下表为某汽车模型公司共有25个汽车模型,其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1)若小明从这些模型中随机拿一个模型,记事件A为小明取到的模型为红色外观,事件B取到模型有棕色内饰

求$P(B)$、$P(B/A)$,并据此判断事件A和事件B是否独立

(2)该公司举行了一个抽奖活动,规定在一次抽奖中,每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型,给出以下假设:1、拿到的两个模型会出现三种结果,即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色;2、按结果的可能性大小,概率越小奖项越高;(3)奖金额为一

等奖600元,二等奖300元,三等奖150元,请你分析奖项对应的结果,设 X 为奖金额,写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望

20. (本题满分16分)本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分6分,第3小题满分6分.

曲线 $\Gamma: y^2 = 4x$,第一象限内点 A 在 Γ 上, A 的纵坐标是 a.

(1)若 A 到准线距离为3,求 a;

(2)若 $a = 4, B$ 在 x 轴上, AB 中点在 Γ 上,求点 B 坐标和坐标原点 O 到 AB 距离;

(3)直线 $l: x =- 3$,令 P 是第一象限 Γ 上异于 A 的一点,直线 PA 交 l 于 Q, H 是 P 在 l 上的投影,若点 A 满足“对于任意 P 都有 $|HQ| > 4$”求 a 的取值范围.

21. (本题满分18分)本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分6分,第3小题满分8分.

令 $f(x) = \ln x$,取点 $(a_1 f(a_1))$ 过其曲线 $y = f(x)$ 做切线交 y 轴于 $(0, a_2)$,取点 $(a_2 f(a_2))$ 过其做切线交 y 轴于 $(0, a_3)$,若 $a_3 < 0$ 则停止,以此类推,得到数列 $\{a_n\}$.

(1)若正整数$m \geq 2$,证明$a_m = \ln a_{m-1} - 1$;

(2)若正整数$m \geq 2$,试比较a_m与$a_{m-1} - 2$大小;

(3)若正整数$k \geq 3$,是否存在k使得$a_1, a_2 \cdots a_k$依次成等差数列?若存在,求出k的所有取值,若不存在,试说明理由.

参考答案

1、（1,3）

2、4

3、189

4、$-\frac{3}{4}$

5、$[1,+\infty)$

6、$\sqrt{5}$

7、-3

8、$\frac{\sqrt{7}}{4}$

9、946

10、49

11、$\arccos\frac{40}{41}$

12、9

13、A

14、C

15、D

16、B

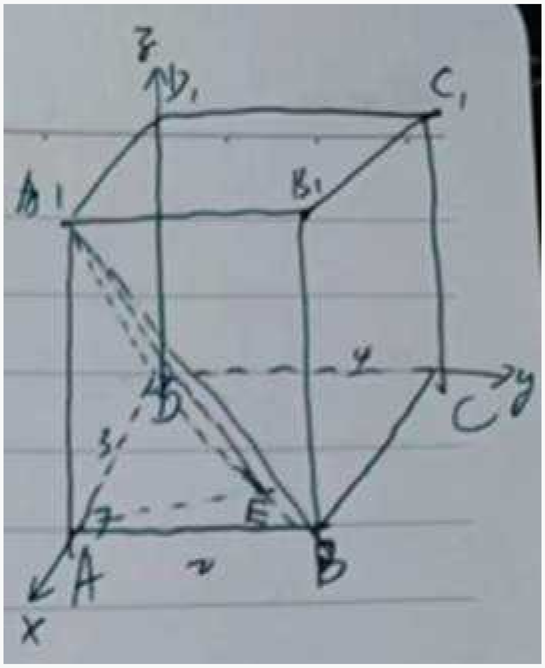
17、

（1）因为AB平行于CD，所以AB与平面CDC_1D_1平行

又因为AA_1平行DD_1，所以AA1平行与平面CDC_1D_1平行

因为 AA_1 与AB相交于点A，所以平面 ABB_1A_1 与平面 CDC_1D_1 平行

因为 A_1B 属于平面 ABB_1A_1，所以 A_1B 平行于平面 CDC_1D_1



（2）因为四棱柱体积为36，设AA1=h

所以 $$sh = 36 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (2+4) \cdot 3h = 36 \Rightarrow h = 4$$

在底面内作AE垂直BD与E，连 A_1E

因为BD垂直AE，BD垂直于 AA_1，所以BD垂直平面 AA_1E，所以BD垂直 A_1E

所以 $\angle A_1EA$ 即为所求二面角的平面角

在直角三角形 A_1AE 中，AA_1=4，$$AE = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

所以

$$\tan\angle A_1EA=\frac{AA_1}{AE}=\frac{2\sqrt{13}}{3}\Rightarrow\cos\angle A_1EA=\frac{3\sqrt{61}}{61}$$

18、

（1）当a=0时，$f(x)=\frac{x^2+x+c}{x}$

定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

假设$f(x)$为奇函数，则$f(-x)=-f(x)$

所以$\frac{x^2-x+c}{x}=-\frac{x^2+x+c}{x}$，此方程无解，故$f(x)$不可能为奇函数

所以不存在实数c，使得$f(x)$为奇函数

（2）因为$f(x)$图像过（1,3），所以$f(1)=3,\text{即}\frac{1+3a+1+c}{1+a}=3$

所以c=1

所以$f(x)=\frac{x^2+(3a+1)x+1}{x+a}$

令$f(x)$=0，则$x^2+(3a+1)x+1$=0（x不等于-a）

因为$f(x)$图像与x轴负半轴有2个交点

$$\begin{cases}\Delta = (3a+1)^2 - 4 > 0 \\ x_1 + x_2 = -(3a+1) < 0 \\ a^2 - a(3a+1) + 1 \neq 0\end{cases}$$

所以

$$a > \frac{1}{3} 且 a \neq \frac{1}{2}$$

所以

所以a的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$

19、

（1）

$\because P(A)=\frac{15}{25}, P(B)=\frac{20}{25}, P(AB)=\frac{12}{25}$

$\therefore P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$

$\because P(B \mid A) \neq P(B)$

$\therefore A$，B不独立

（2）设三种结果：内外均同，内同或外同，内外均不同分别为事件 A_1,A_2,A_3，则

$$P(A_1)=\frac{C_{12}^2+C_8^2+C_2^2+C_3^2}{C_{25}^2}=\frac{98}{300}$$

$$P(A_2)=\frac{C_{12}^1C_2^1+C_8^1C_3^1+C_{12}^2C_8^1+C_2^1C_3^1}{C_{25}^2}=\frac{150}{300}$$

$$P(A_3)=\frac{C_{12}^1C_3^1+C_2^1C_8^1}{C_{25}^2}=\frac{52}{300}$$

$\because$ 概率越小奖金越高

$\therefore P(X=600)=P(A_3)=\frac{52}{300}$

$P(X=300)=P(A_1)=\frac{98}{300}$

$P(X=150)=P(A_2)=\frac{150}{300}$

分布列

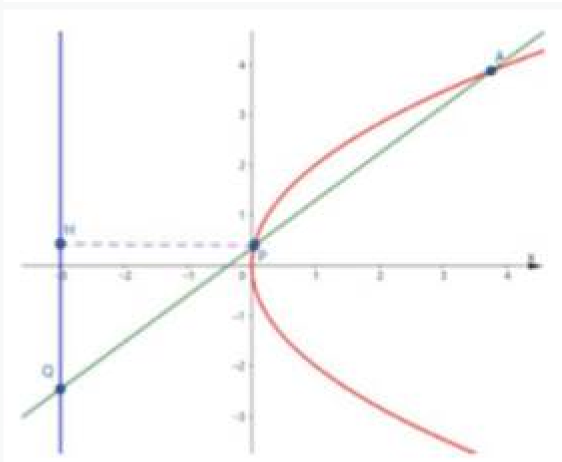
X	600	300
P	$\frac{52}{300}$	$\frac{98}{300}$

$$E(X)=600\cdot\frac{52}{300}+300\cdot\frac{98}{300}+150\cdot\frac{150}{300}=277(\text{元})$$

20、

（1）由题意得 $a>0$，$A(\frac{a^2}{4},a)$，准线 $x=-1$，则

$$\frac{a^2}{4}-(-1)=3\Rightarrow a^2=8\Rightarrow a=2\sqrt{2}$$；



当 $a=4$ 时，$A(4,4)$，B在x轴上，设 $B(t,0)$，则线段AB的中点为 $C(\frac{4+t}{2},2)$ 在 $\Gamma: y^2=4x$ 上，则有 $2^2=4\cdot\frac{4+t}{2}$，

解得 $t=-2$，即 $B(-2,0)$，则直线AB的斜率

$k_{AB}=\frac{4-0}{4-(-2)}=\frac{2}{3}$，直线

AB：$y=\frac{2}{3}(x+2)$，一般式为 $2x-3y+4=0$

，则原点O到AB的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$；

（3）设 $P=\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right),A\left(\frac{a^2}{4},a\right)$

由已知：$H(-3,\ y_0)\quad k_{PA}=\frac{4}{y_0+a}$

$$PA:\quad y-a=\frac{4}{y_0+a}\left(x-\frac{a^2}{4}\right)$$

令x=-3，

$y_Q=a-\frac{12+a^2}{y_0+a}$ $\therefore Q\left(-3,\ a-\frac{12+a^2}{y_0+a}\right)$

$\because |HQ|>4$

$\therefore y_H-y_Q>4$，即$y_0-a+\frac{12+a^2}{y_0+a}>4$

即 $4a<y_0^2-4y_0+12=(y_0-2)^2+8\le 8$

故 $4a<8$

$\therefore a<2$ 即a的取值范围为$(-\infty,\ 2)$

21、

（1）由$f(x)=\ln x$，则$f'(x)=\frac{1}{x}$，当$m\ge 2$时，曲线在$(a_{m-1},f(a_{m-1}))$处的切线方程为：

$y-\ln a_{m-1}=\frac{1}{a_{m-1}}(x-a_{m-1})=\frac{x}{a_{m-1}}-1$，由题意令$x=0$，得$y=a_m=\ln a_{m-1}-1$，命题得证；

（2）a_m与$a_{m-1}-2$

即 a_{m+1} 与 a_m-2 即 $\ln a_{m-1}$ 与 a_m-2

$\ln a_m-1-(a_m-2)=\ln a_m-a_m+1$

令 $g(x)=\ln x-x+1$

$g'(x)=\frac{1}{x}-1$ $(0,1)\uparrow$ $(1,+\infty)\downarrow$

X=1时 $g(1)=0$

$\therefore g(x)\le 0$

$\therefore a_{m+1}\le a_m-2$

（3）假设存在k,使得 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 依次成等差数列，所以公差

$d=a_k-a_{k-1}=\ln a_{k-1}-1-a_{k-1}$，构造函数

$h(x)=\ln x-x-1$，函数的定义域 $(0,+\infty)$，则

$h'(x)=\frac{1}{x}-1$，易得 $x\in(0,1)$，$h'(x)>0$，

$h(x)$ 严格递增；$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 严格递减；所以 $h(x)_{\min}=h(1)=\ln 1-1-1=-2$，所以

$h(x)\le -2$，即 $d\le -2$，即

$a_k - a_{k-1} = \ln a_{k-1} - 1 - a_{k-1} \le -2$，计算

$a_2 = \ln a_1 - 1 \Rightarrow a_1 = e^{a_2+1}$， $a_3 = \ln a_2 - 1$

，若 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 成等差，则 $a_1 + a_3 = 2a_2$，即

$2a_2 = e^{a_2+1} + \ln a_2 - 1$，整理

$e^{a_2+1} - 2a_2 + \ln a_2 - 1 = 0$，令

$m(x) = e^{x+1} - 2x + \ln x - 1 = 0$，$x > 0$，

$m'(x) = e^{x+1} + \frac{1}{x} - 2$， 因为

$m'(x) > m'(0) = e - 2 > 0$，即 $m(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上递增，

结合数列的单调性，因为

$x \to 0$， $m(x) < 0$， $m(1) = e^2 - 3 > 0$，则

函数 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上必有唯一的零点 $x_0 = a_2$，结合

$a_1 = e^{a_2+1} > 0$， $a_3 = \ln a_2 - 1 < 0$，运算停止，即存

在 a_1, a_2, a_3 成等差数列，此时 $k = 3$