

2013年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题共12小题. 每小题5分, 共60分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的一项.

1. (5分) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | x = n^2, n \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()
- A. $\{1, 4\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{9, 16\}$ D. $\{1, 2\}$

【考点】1E: 交集及其运算.

【专题】5J: 集合.

【分析】由集合A中的元素分别平方求出x的值, 确定出集合B, 找出两集合的公共元素, 即可求出交集.

【解答】解: 根据题意得: $x = 1, 4, 9, 16$, 即 $B = \{1, 4, 9, 16\}$,

$$\because A = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\therefore A \cap B = \{1, 4\}.$$

故选: A.

【点评】此题考查了交集及其运算, 熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2. (5分) $\frac{1+2i}{(1-i)^2} =$ ()

A. $-1 - \frac{1}{2}i$ B. $-1 + \frac{1}{2}i$ C. $1 + \frac{1}{2}i$ D. $1 - \frac{1}{2}i$

【考点】A5: 复数的运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用分式的分母平方, 复数分母实数化, 运算求得结果.

【解答】解: $\frac{1+2i}{(1-i)^2} = \frac{1+2i}{-2i} = \frac{(1+2i)i}{-2i \cdot i} = \frac{-2+i}{2} = -1 + \frac{1}{2}i.$

故选: B.

【点评】本题考查复数代数形式的混合运算, 复数的乘方运算, 考查计算能力.

3. (5分) 从1, 2, 3, 4中任取2个不同的数, 则取出的2个数之差的绝对值为2的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

【考点】 CC: 列举法计算基本事件数及事件发生的概率.

【专题】 5I: 概率与统计.

【分析】 本题是一个等可能事件的概率, 试验发生包含的事件是从4个不同的数中随机的抽2个, 共有 C_4^2 种结果, 满足条件的事件是取出的数之差的绝对值等于2的有两种, 得到概率.

【解答】 解: 由题意知本题是一个等可能事件的概率, 试验发生包含的事件是从4个不同的数中随机的抽2个, 共有 $C_4^2=6$ 种结果, 满足条件的事件是取出的数之差的绝对值等于2, 有2种结果, 分别是 (1, 3), (2, 4),

∴要求的概率是 $\frac{2}{C_4^2} = \frac{1}{3}$.

故选: B.

【点评】 本题考查等可能事件的概率, 是一个基础题, 本题解题的关键是事件数是一个组合数, 若都按照排列数来理解也可以做出正确的结果.

4. (5分) 已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则C的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{1}{4}x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 由离心率和abc的关系可得 $b^2=4a^2$, 而渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 代入可得

答案.

【解答】解：由双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$),

则离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 即 $4b^2 = a^2$,

故渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{2}x$,

故选: D.

【点评】本题考查双曲线的简单性质, 涉及的渐近线方程, 属基础题.

5. (5分) 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, 2^x < 3^x$; 命题 $q: \exists x \in \mathbb{R}, x^3 = 1 - x^2$, 则下列命题中为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $\neg p \wedge q$ C. $p \wedge \neg q$ D. $\neg p \wedge \neg q$

【考点】2E: 复合命题及其真假.

【专题】21: 阅读型; 5L: 简易逻辑.

【分析】举反例说明命题 p 为假命题, 则 $\neg p$ 为真命题. 引入辅助函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 1$, 由函数零点的存在性定理得到该函数有零点, 从而得到命题 q 为真命题, 由复合命题的真假得到答案.

【解答】解: 因为 $x = -1$ 时, $2^{-1} > 3^{-1}$, 所以命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, 2^x < 3^x$ 为假命题, 则 $\neg p$ 为真命题.

令 $f(x) = x^3 + x^2 - 1$, 因为 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$. 所以函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ 在 $(0, 1)$ 上存在零点,

即命题 $q: \exists x \in \mathbb{R}, x^3 = 1 - x^2$ 为真命题.

则 $\neg p \wedge q$ 为真命题.

故选: B.

【点评】本题考查了复合命题的真假, 考查了指数函数的性质及函数零点的判断方法, 解答的关键是熟记复合命题的真值表, 是基础题.

6. (5分) 设首项为1, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 ()

- A. $S_n=2a_n - 1$ B. $S_n=3a_n - 2$ C. $S_n=4 - 3a_n$ D. $S_n=3 - 2a_n$

【考点】89：等比数列的前n项和.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】由题意可得数列的通项公式，进而可得其求和公式，化简可得要求的关系式.

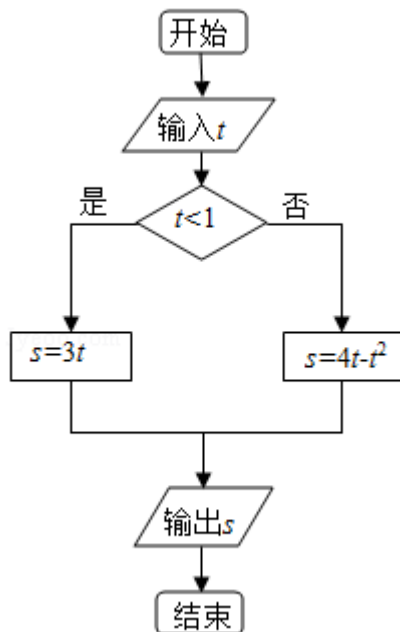
【解答】解：由题意可得 $a_n=1 \times (\frac{2}{3})^{n-1} = (\frac{2}{3})^{n-1}$,

$$\therefore S_n = \frac{1 \times (1 - (\frac{2}{3})^n)}{1 - \frac{2}{3}} = 3 - 3 \times (\frac{2}{3})^n = 3 - 2 (\frac{2}{3})^{n-1} = 3 - 2a_n,$$

故选：D.

【点评】本题考查等比数列的求和公式和通项公式，涉及指数的运算，属中档题.

7. (5分) 执行程序框图，如果输入的 $t \in [-1, 3]$ ，则输出的s属于 ()



- A. $[-3, 4]$ B. $[-5, 2]$ C. $[-4, 3]$ D. $[-2, 5]$

【考点】3B：分段函数的解析式求法及其图象的作法；EF：程序框图.

【专题】27：图表型；5K：算法和程序框图.

【分析】 本题考查的知识点是程序框图，分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是计算一个分段函数的函数值，由条件为 $t < 1$ 我们可得，分段函数的分类标准，由分支结构中是否两条分支上对应的语句行，我们易得函数的解析式。

【解答】 解：由判断框中的条件为 $t < 1$ ，可得：

函数分为两段，即 $t < 1$ 与 $t \geq 1$ ，

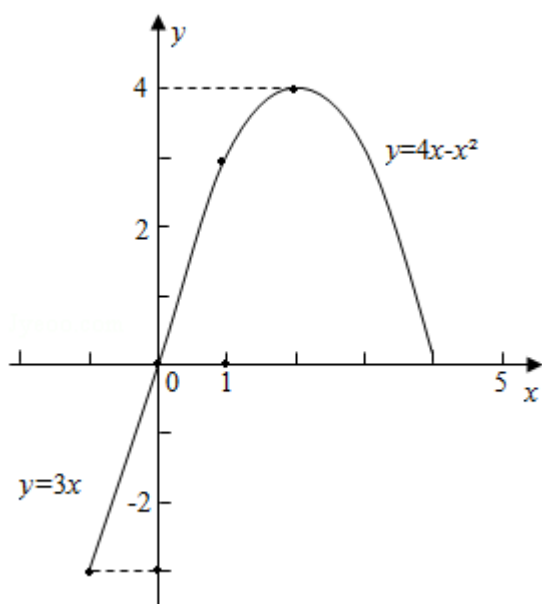
又由满足条件时函数的解析式为： $s = 3t$ ；

不满足条件时，即 $t \geq 1$ 时，函数的解析式为： $s = 4t - t^2$

故分段函数的解析式为： $s = \begin{cases} 3t, & t < 1 \\ 4t - t^2, & t \geq 1 \end{cases}$ ，

如果输入的 $t \in [-1, 3]$ ，画出此分段函数在 $t \in [-1, 3]$ 时的图象，则输出的 s 属于 $[-3, 4]$ 。

故选：A.



【点评】 要求条件结构对应的函数解析式，要分如下几个步骤：①分析流程图的结构，分析条件结构是如何嵌套的，以确定函数所分的段数；②根据判断框中的条件，设置分类标准；③根据判断框的“是”与“否”分支对应的操作，分析函数各段的解析式；④对前面的分类进行总结，写出分段函数的解析式。

8. (5分) O为坐标原点, F为抛物线C: $y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点, P为C上一点, 若 $|PF|=4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POF$ 的面积为 ()
- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

【考点】K8: 抛物线的性质.

【专题】11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】根据抛物线方程, 算出焦点F坐标为 $(\sqrt{2}, 0)$. 设P (m, n) , 由抛物线的定义结合 $|PF|=4\sqrt{2}$, 算出 $m=3\sqrt{2}$, 从而得到 $n=\pm 2\sqrt{6}$, 得到 $\triangle POF$ 的边OF上的高等于 $2\sqrt{6}$, 最后根据三角形面积公式即可算出 $\triangle POF$ 的面积.

【解答】解: \because 抛物线C的方程为 $y^2=4\sqrt{2}x$

$\therefore 2p=4\sqrt{2}$, 可得 $\frac{p}{2}=\sqrt{2}$, 得焦点F $(\sqrt{2}, 0)$

设P (m, n)

根据抛物线的定义, 得 $|PF|=m+\frac{p}{2}=4\sqrt{2}$,

即 $m+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$, 解得 $m=3\sqrt{2}$

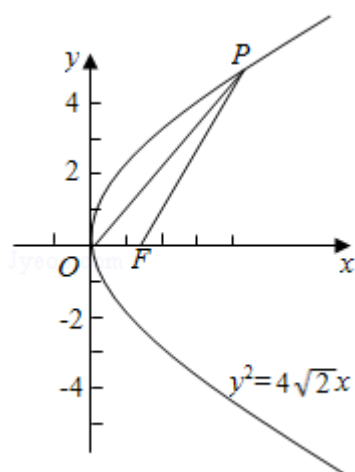
\because 点P在抛物线C上, 得 $n^2=4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=24$

$\therefore n=\pm\sqrt{24}=\pm 2\sqrt{6}$

$\because |OF|=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle POF$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|OF|\times |n|=\frac{1}{2}\times \sqrt{2}\times 2\sqrt{6}=2\sqrt{3}$

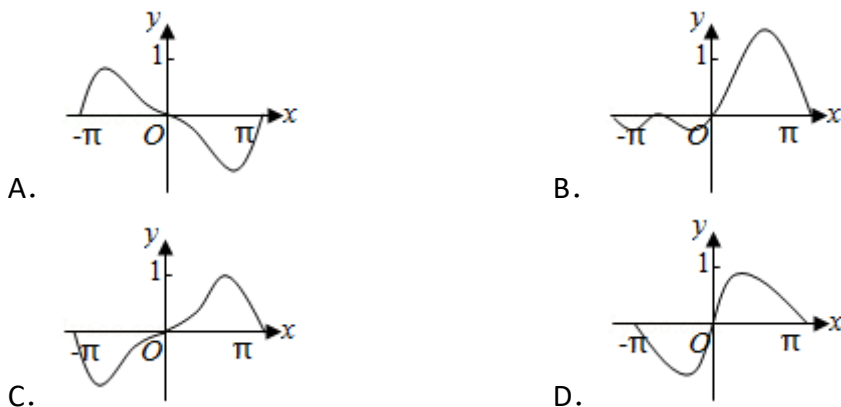
故选: C.



【点评】本题给出抛物线C: $y^2=4\sqrt{2}x$ 上与焦点F的距离为 $4\sqrt{2}$ 的点P, 求 $\triangle POF$ 的

面积. 着重考查了三角形的面积公式、抛物线的标准方程和简单几何性质等知识, 属于基础题.

9. (5分) 函数 $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为 ()



【考点】 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 51: 函数的性质及应用.

【分析】 由函数的奇偶性可排除B, 再由 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) > 0$, 可排除A,

求导数可得 $f'(0) = 0$, 可排除D, 进而可得答案.

【解答】 解: 由题意可知: $f(-x) = (1 - \cos(-x)) \sin(-x) = -f(x)$,

故函数 $f(x)$ 为奇函数, 故可排除B,

又因为当 $x \in (0, \pi)$ 时, $1 - \cos x > 0$, $\sin x > 0$,

故 $f(x) > 0$, 可排除A,

又 $f'(x) = (1 - \cos x)' \sin x + (1 - \cos x) (\sin x)'$

$= \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x = \cos x - \cos 2x$,

故可得 $f'(0) = 0$, 可排除D,

故选: C.

【点评】 本题考查三角函数的图象, 涉及函数的奇偶性和某点的导数值, 属基础题.

10. (5分) 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c, $23\cos^2 A + \cos 2A = 0$, $a = 7$, $c = 6$, 则 $b =$ ()

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 5

【考点】HR：余弦定理.

【专题】58：解三角形.

【分析】利用二倍角的余弦函数公式化简已知的等式，求出 $\cos A$ 的值，再由 a 与 c 的值，利用余弦定理即可求出 b 的值.

【解答】解： $\because 23\cos^2 A + \cos 2A = 23\cos^2 A + 2\cos^2 A - 1 = 0$ ，即 $\cos^2 A = \frac{1}{25}$ ， A 为锐角，

$$\therefore \cos A = \frac{1}{5},$$

又 $a=7$ ， $c=6$ ，

根据余弦定理得： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ ，即 $49 = b^2 + 36 - \frac{12}{5}b$ ，

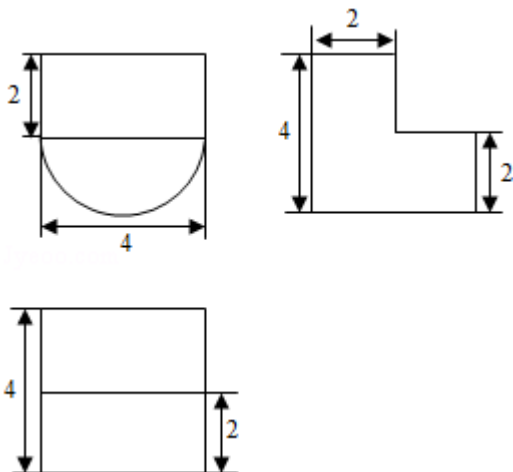
解得： $b=5$ 或 $b = -\frac{13}{5}$ （舍去），

则 $b=5$.

故选：D.

【点评】此题考查了余弦定理，二倍角的余弦函数公式，熟练掌握余弦定理是解本题的关键.

11. （5分）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（ ）



A. $16+8\pi$

B. $8+8\pi$

C. $16+16\pi$

D. $8+16\pi$

【考点】L!：由三视图求面积、体积.

【专题】16：压轴题；27：图表型.

【分析】三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的合体，依据三视图的数据，得出合体长、宽、高，即可求出几何体的体积。

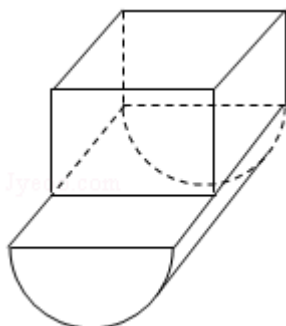
【解答】解：三视图复原的几何体是一个长方体与半个圆柱的合体，如图，其中长方体长、宽、高分别是：4，2，2，半个圆柱的底面半径为2，母线长为4。

∴长方体的体积=4×2×2=16，

半个圆柱的体积= $\frac{1}{2} \times 2^2 \times \pi \times 4 = 8\pi$

所以这个几何体的体积是16+8π；

故选：A。



【点评】本题考查了几何体的三视图及直观图的画法，三视图与直观图的关系，柱体体积计算公式，空间想象能力

12. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ，若 $|f(x)| \geq ax$ ，则a的取值范围是 ()

围是 ()

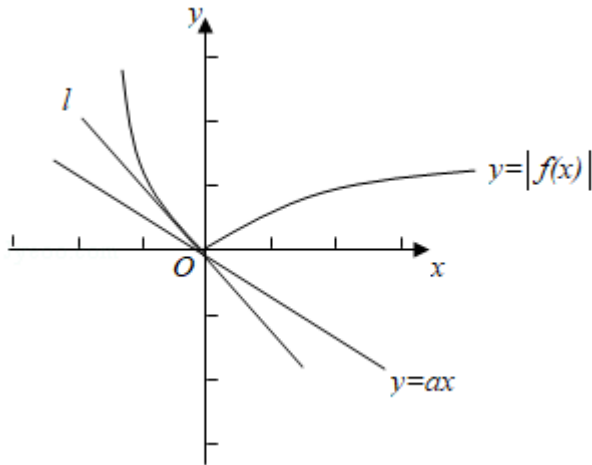
A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-2, 1]$ D. $[-2, 0]$

【考点】7E：其他不等式的解法。

【专题】16：压轴题；59：不等式的解法及应用。

【分析】由函数图象的变换，结合基本初等函数的图象可作出函数 $y = |f(x)|$ 的图象，和函数 $y = ax$ 的图象，由导数求切线斜率可得l的斜率，进而数形结合可得a的范围。

【解答】解：由题意可作出函数 $y = |f(x)|$ 的图象，和函数 $y = ax$ 的图象，



由图象可知：函数 $y=ax$ 的图象为过原点的直线，当直线介于 l 和 x 轴之间符合题意，直线 l 为曲线的切线，且此时函数 $y=|f(x)|$ 在第二象限的部分解析式为 $y=x^2 - 2x$ ，

求其导数可得 $y'=2x - 2$ ，因为 $x \leq 0$ ，故 $y' \leq -2$ ，故直线 l 的斜率为 -2 ，

故只需直线 $y=ax$ 的斜率 a 介于 -2 与 0 之间即可，即 $a \in [-2, 0]$

故选：D.

【点评】 本题考查其它不等式的解法，数形结合是解决问题的关键，属中档题

二. 填空题：本大题共四小题，每小题5分.

13. (5分) 已知两个单位向量 \vec{a} ， \vec{b} 的夹角为 60° ， $\vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$. 若 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ，则 $t = \underline{2}$.

【考点】 9H：平面向量的基本定理；9O：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】 5A：平面向量及应用.

【分析】 由于 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ，对式子 $\vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ 两边与 \vec{b} 作数量积可得

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = t\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)\vec{b}^2 = 0, \text{ 经过化简即可得出.}$$

【解答】 解： $\because \vec{c} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ ， $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ ， $\therefore \vec{c} \cdot \vec{b} = t\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)\vec{b}^2 = 0$ ，

$$\therefore t\cos 60^\circ + 1 - t = 0, \therefore 1 - \frac{1}{2}t = 0, \text{ 解得 } t = 2.$$

故答案为2.

【点评】熟练掌握向量的数量积运算是解题的关键.

14. (5分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq x-y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最大值为3.

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】59: 不等式的解法及应用.

【分析】先根据约束条件画出可行域, 再利用几何意义求最值, $z=2x-y$ 表示直线在 y 轴上的截距, 只需求出可行域直线在 y 轴上的截距最大值即可.

【解答】解: 不等式组表示的平面区域如图所示,

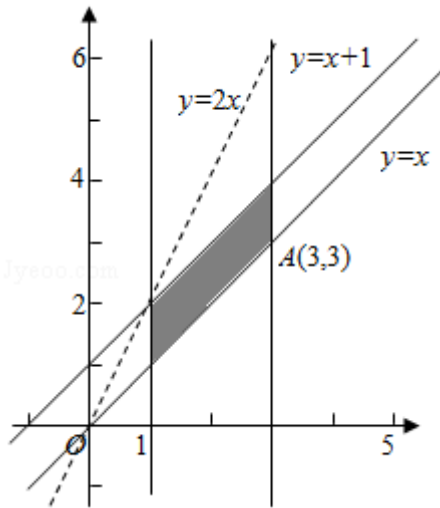
由 $\begin{cases} x=3 \\ y=x \end{cases}$ 得 $A(3, 3)$,

$z=2x-y$ 可转换成 $y=2x-z$, z 最大时, y 值最小,

即: 当直线 $z=2x-y$ 过点 $A(3, 3)$ 时,

在 y 轴上截距最小, 此时 z 取得最大值3.

故答案为: 3.



【点评】本题主要考查了简单的线性规划, 以及利用几何意义求最值, 属于基础题.

15. (5分) 已知 H 是球 O 的直径 AB 上一点, $AH: HB=1: 2$, $AB \perp$ 平面 α , H 为垂足, α 截球 O 所得截面的面积为 π , 则球 O 的表面积为 $\frac{9\pi}{2}$.

【考点】LG：球的体积和表面积.

【专题】16：压轴题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】本题考查的知识点是球的表面积公式，设球的半径为R，根据题意知由与球心距离为 $\frac{1}{3}R$ 的平面截球所得的截面圆的面积是 π ，我们易求出截面圆的半径为1，根据球心距、截面圆半径、球半径构成直角三角形，满足勾股定理，我们易求出该球的半径，进而求出球的表面积.

【解答】解：设球的半径为R， $\because AH: HB=1: 2$ ， \therefore 平面 α 与球心的距离为 $\frac{1}{3}R$ ，

$\therefore \alpha$ 截球O所得截面的面积为 π ，

$\therefore d=\frac{1}{3}R$ 时， $r=1$ ，

故由 $R^2=r^2+d^2$ 得 $R^2=1^2+(\frac{1}{3}R)^2$ ， $\therefore R^2=\frac{9}{8}$

\therefore 球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{9\pi}{2}$.

故答案为： $\frac{9\pi}{2}$.

【点评】若球的截面圆半径为r，球心距为d，球半径为R，则球心距、截面圆半径、球半径构成直角三角形，满足勾股定理，即 $R^2=r^2+d^2$

16. (5分) 设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x - 2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=\underline{\underline{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$.

【考点】GP：两角和与差的三角函数；H4：正弦函数的定义域和值域.

【专题】16：压轴题；56：三角函数的求值.

【分析】 $f(x)$ 解析式提取 $\sqrt{5}$ ，利用两角和与差的正弦函数公式化为一个角的正弦函数，由 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，得到 $\sin\theta - 2\cos\theta=\sqrt{5}$ ，与 $\sin^2\theta + \cos^2\theta=1$ 联立即可求出 $\cos\theta$ 的值.

【解答】解： $f(x)=\sin x - 2\cos x=\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x)=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ （

其中 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ），

$\therefore x=\theta$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，

$\therefore \sin(\theta - \alpha) = 1$, 即 $\sin\theta - 2\cos\theta = \sqrt{5}$,

又 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

联立得 $(2\cos\theta + \sqrt{5})^2 + \cos^2\theta = 1$, 解得 $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【点评】 此题考查了两角和与差的正弦函数公式, 同角三角函数间的基本关系, 以及正弦函数的定义域与值域, 熟练掌握公式是解本题的关键.

三.解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (12分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3 = 0$, $S_5 = -5$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{\frac{1}{a_{2r-1} a_{2n+1}}\}$ 的前 n 项和.

【考点】 84: 等差数列的通项公式; 8E: 数列的求和.

【专题】 54: 等差数列与等比数列.

【分析】 (I) 设出等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差, 直接由 $S_3 = 0$, $S_5 = -5$ 列方程组求出, 然后代入等差数列的通项公式整理;

(II) 把 (I) 中求出的通项公式, 代入数列 $\{\frac{1}{a_{2r-1} a_{2n+1}}\}$ 的通项中进行列项整理, 则利用裂项相消可求数列 $\{\frac{1}{a_{2r-1} a_{2n+1}}\}$ 的前 n 项和.

【解答】 解: (I) 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$.

$$\text{由已知可得} \begin{cases} 3a_1 + 3d = 0 \\ 5a_1 + \frac{5(5-1)}{2}d = -5 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a_1 + d = 0 \\ a_1 + 2d = -1 \end{cases}, \text{解得} a_1 = 1, d = -1,$$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot (-1) = 2 - n$;

(II) 由 (I) 知 $\frac{1}{a_{2r-1} a_{2n+1}} = \frac{1}{(3-2n)(1-2n)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1})$.

从而数列 $\{\frac{1}{a_{2r-1} a_{2n+1}}\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{1}{2} [(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1}) + (\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1})]$$

$$= \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{n}{1-2n}.$$

【点评】 本题考查了等差数列的通项公式，考查了裂项相消法求数列的和，是中档题.

18. (12分) 为了比较两种治疗失眠症的药(分别成为A药, B药)的疗效, 随机地选取20位患者服用A药, 20位患者服用B药, 这40位患者服用一段时间后, 记录他们日平均增加的睡眠时间(单位: h) 实验的观测结果如下:

服用A药的20位患者日平均增加的睡眠时间:

0.6 1.2 2.7 1.5 2.8 1.8 2.2 2.3 3.2 3.5

2.5 2.6 1.2 2.7 1.5 2.9 3.0 3.1 2.3 2.4

服用B药的20位患者日平均增加的睡眠时间:

3.2 1.7 1.9 0.8 0.9 2.4 1.2 2.6 1.3 1.4

1.6 0.5 1.8 0.6 2.1 1.1 2.5 1.2 2.7 0.5

(I) 分别计算两种药的平均数, 从计算结果看, 哪种药的疗效更好?

(II) 根据两组数据完成下面茎叶图, 从茎叶图看, 哪种药的疗效更好?

A 药		B 药
	0.	
	1.	
	2.	
	3.	

【考点】 BA: 茎叶图; BB: 众数、中位数、平均数.

【专题】 5I: 概率与统计.

【分析】 (I) 利用平均数的计算公式即可得出, 据此即可判断出结论;

(II) 利用已知数据和茎叶图的结构即可完成.

【解答】 解: (I) 设A药观测数据的平均数据的平均数为 \bar{x} , 设B药观测数据的平均数据的平均数为 \bar{y} ,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{20} \times (0.6+1.2+2.7+1.5+2.8+1.8+2.2+2.3+3.2+3.5+2.5+2.6+1.2+2.7+1.5+2.9+3.0 \\ &\quad +3.1+2.3+2.4) = 2.3. \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{20} \times (3.2+1.7+1.9+0.8+0.9+2.4+1.2+2.6+1.3+1.4+1.6+0.5+1.8+0.6+2.1+1.1+2.5+1.2+2.7+0.5) = 1.6.$$

由以上计算结果可知： $\bar{x} > \bar{y}$. 由此可看出A药的效果更好.

(II) 根据两组数据得到下面茎叶图:

A 药					B 药												
				6	0.	5	5	6	8	9							
			8	5	5	2	2	1.	1	2	2	3	4	6	7	8	9
9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	2.	1	4	5	6	7		
					5	2	1	0	3.	2							

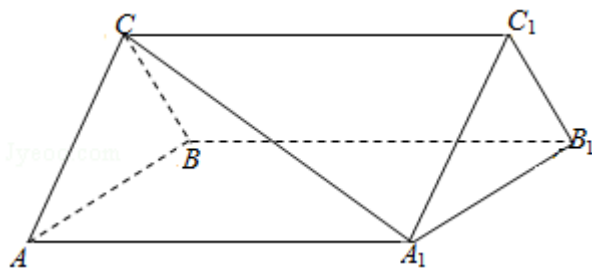
从以上茎叶图可以看出, A药疗效的试验结果有 $\frac{7}{10}$ 的叶集中在2, 3上. 而B药疗效的试验结果由 $\frac{7}{10}$ 的叶集中在0, 1上. 由此可看出A药的疗效更好.

【点评】 熟练掌握平均数的计算公式和茎叶图的结果及其功能是解题的关键.

19. (12分) 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$

(I) 证明: $AB \perp A_1C$;

(II) 若 $AB=CB=2$, $A_1C=\sqrt{6}$, 求三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积.



【考点】 LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积; LW: 直线与平面垂直.

【专题】 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 (I) 由题目给出的边的关系, 可想到去 AB 中点 O , 连结 OC , OA_1 , 可通过证明 $AB \perp$ 平面 OA_1C 得要证的结论;

(II) 在三角形 OCA_1 中, 由勾股定理得到 $OA_1 \perp OC$, 再根据 $OA_1 \perp AB$, 得到 OA_1 为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高, 利用已知给出的边的长度, 直接利用棱柱体积公

式求体积.

【解答】 (I) 证明: 如图,

取AB的中点O, 连结OC, OA_1 , A_1B .

因为 $CA=CB$, 所以 $OC \perp AB$.

由于 $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$, 故 $\triangle AA_1B$ 为等边三角形,

所以 $OA_1 \perp AB$.

因为 $OC \cap OA_1=O$, 所以 $AB \perp$ 平面 OA_1C .

又 $A_1C \subset$ 平面 OA_1C , 故 $AB \perp A_1C$;

(II) 解: 由题设知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AA_1B$ 都是边长为2的等边三角形,

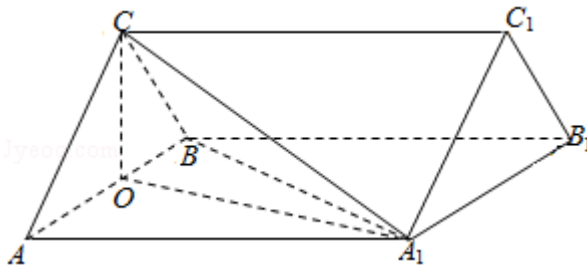
所以 $OC=OA_1=\sqrt{3}$.

又 $A_1C=\sqrt{6}$, 则 $A_1C^2=OC^2+OA_1^2$, 故 $OA_1 \perp OC$.

因为 $OC \cap AB=O$, 所以 $OA_1 \perp$ 平面 ABC , OA_1 为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.

又 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$, 故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积

$$V=S_{\triangle ABC} \times OA_1=\sqrt{3} \times \sqrt{3}=3.$$



【点评】 题主要考查了直线与平面垂直的性质, 考查了棱柱的体积, 考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力, 属于中档题.

20. (12分) 已知函数 $f(x)=e^x(ax+b)-x^2-4x$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处切线方程为 $y=4x+4$.

(I) 求a, b的值;

(II) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并求 $f(x)$ 的极大值.

【考点】 6D: 利用导数研究函数的极值; 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方

程.

【专题】 16: 压轴题; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (I) 求导函数, 利用导数的几何意义及曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处切线方程为 $y=4x+4$, 建立方程, 即可求得 a, b 的值;

(II) 利用导数的正负, 可得 $f(x)$ 的单调性, 从而可求 $f(x)$ 的极大值.

【解答】 解: (I) $\because f(x) = e^x(ax+b) - x^2 - 4x$,

$$\therefore f'(x) = e^x(ax+a+b) - 2x - 4,$$

\because 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处切线方程为 $y=4x+4$

$$\therefore f(0) = 4, f'(0) = 4$$

$$\therefore b = 4, a + b = 8$$

$$\therefore a = 4, b = 4;$$

(II) 由(I)知, $f(x) = 4e^x(x+1) - x^2 - 4x$, $f'(x) = 4e^x(x+2) - 2x - 4 = 4(x+2)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\ln 2$ 或 $x = -2$

$\therefore x \in (-\infty, -2)$ 或 $(-\ln 2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (-2, -\ln 2)$ 时, $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -2)$, $(-\ln 2, +\infty)$, 单调减区间是 $(-2, -\ln 2)$

当 $x = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(-2) = 4(1 - e^{-2})$.

【点评】 本题考查导数的几何意义, 考查函数的单调性与极值, 考查学生的计算能力, 确定函数的解析式是关键.

21. (12分) 已知圆M: $(x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆N: $(x-1)^2 + y^2 = 9$, 动圆P与圆M外切并与圆N内切, 圆心P的轨迹为曲线C.

(I) 求C的方程;

(II) l 是与圆P, 圆M都相切的一条直线, l 与曲线C交于A, B两点, 当圆P的半径最长时, 求 $|AB|$.

【考点】J3: 轨迹方程; J9: 直线与圆的位置关系.

【专题】5B: 直线与圆.

【分析】(I) 设动圆的半径为 R , 由已知动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, 可得 $|PM| + |PN| = R + 1 + (3 - R) = 4$, 而 $|NM| = 2$, 由椭圆的定义可知: 动点 P 的轨迹是以 M, N 为焦点, 4为长轴长的椭圆, 求出即可;

(II) 设曲线 C 上任意一点 $P(x, y)$, 由于 $|PM| - |PN| = 2R - 2 \leq 4 - 2 = 2$, 所以 $R \leq 2$, 当且仅当 $\odot P$ 的圆心为 $(2, 0)$ $R=2$ 时, 其半径最大, 其方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$. 分① l 的倾斜角为 90° , 此时 l 与 y 轴重合, 可得 $|AB|$. ②若 l 的倾斜角不为 90° , 由于 $\odot M$ 的半径 $1 \neq R$, 可知 l 与 x 轴不平行, 设 l 与 x 轴的交点为 Q , 根据 $\frac{|QP|}{|QM|} = \frac{R}{r_1}$, 可得 $Q(-4, 0)$, 所以可设 $l: y = k(x+4)$, 与椭圆的方程联立, 得到根与系数的关系利用弦长公式即可得出.

【解答】解: (I) 由圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 可知圆心 $M(-1, 0)$; 圆 $N: (x-1)^2 + y^2 = 9$, 圆心 $N(1, 0)$, 半径3.

设动圆的半径为 R ,

\because 动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, $\therefore |PM| + |PN| = R + 1 + (3 - R) = 4$,

而 $|NM| = 2$, 由椭圆的定义可知: 动点 P 的轨迹是以 M, N 为焦点, 4为长轴长的椭圆,

$\therefore a=2, c=1, b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

\therefore 曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq -2)$.

(II) 设曲线 C 上任意一点 $P(x, y)$,

由于 $|PM| - |PN| = 2R - 2 \leq 3 - 1 = 2$, 所以 $R \leq 2$, 当且仅当 $\odot P$ 的圆心为 $(2, 0)$ $R=2$ 时, 其半径最大, 其方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

① l 的倾斜角为 90° , 则 l 与 y 轴重合, 可得 $|AB| = 2\sqrt{3}$.

②若 l 的倾斜角不为 90° , 由于 $\odot M$ 的半径 $1 \neq R$, 可知 l 与 x 轴不平行,

设 l 与 x 轴的交点为 Q , 则 $\frac{|QP|}{|QM|} = \frac{R}{r_1}$, 可得 $Q(-4, 0)$, 所以可设 $l: y = k(x+4)$

由于 M 相切可得: $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，联立
$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$
，得到 $7x^2 + 8x - 8 = 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8}{7}, \quad x_1 x_2 = -\frac{8}{7}$.

$\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \sqrt{\left(-\frac{8}{7}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{8}{7}\right)} = \frac{18}{7}$

由于对称性可知：当 $k = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，也有 $|AB| = \frac{18}{7}$.

综上所述： $|AB| = 2\sqrt{3}$ 或 $\frac{18}{7}$.

【点评】 本题综合考查了两圆的相切关系、直线与圆相切问题、椭圆的定义及其性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立得到根与系数的关系、弦长公式等基础知识，需要较强的推理能力和计算能力及其分类讨论的思想方法.

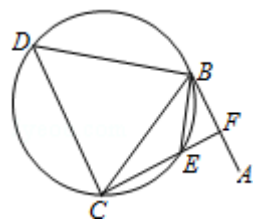
请考生在第22、23、24三题中任选一题作答。注意：只能做所选定的题目。如果多做，则按所做的第一个题目计分，作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑。

22. (10分) (选修4-1: 几何证明选讲)

如图，直线AB为圆的切线，切点为B，点C在圆上， $\angle ABC$ 的角平分线BE交圆于点E，DB垂直BE交圆于D.

(I) 证明： $DB = DC$;

(II) 设圆的半径为1， $BC = \sqrt{3}$ ，延长CE交AB于点F，求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.



【考点】 NC: 与圆有关的比例线段.

【专题】 5B: 直线与圆.

【分析】 (I) 连接DE交BC于点G，由弦切角定理可得 $\angle ABE = \angle BCE$ ，由已知角平分线可得 $\angle ABE = \angle CBE$ ，于是得到 $\angle CBE = \angle BCE$ ， $BE = CE$ 。由已知 $DB \perp BE$ ，可知D

E为⊙O的直径， $Rt\triangle DBE \cong Rt\triangle DCE$ ，利用三角形全等的性质即可得到 $DC=DB$

(II) 由(I)可知：DG是BC的垂直平分线，即可得到 $BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。设DE的中点为O，连接BO，可得 $\angle BOG = 60^\circ$ 。从而 $\angle ABE = \angle BCE = \angle CBE = 30^\circ$ 。得到 $CF \perp BF$ 。进而得到 $Rt\triangle BCF$ 的外接圆的半径 $= \frac{1}{2}BC$ 。

【解答】 (I) 证明：连接DE交BC于点G。

由弦切角定理可得 $\angle ABE = \angle BCE$ ，而 $\angle ABE = \angle CBE$ ，

$\therefore \angle CBE = \angle BCE$ ， $BE = CE$ 。

又 $\because DB \perp BE$ ， $\therefore DE$ 为⊙O的直径， $\angle DCE = 90^\circ$ 。

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCE$ ， $\therefore DC = DB$ 。

(II) 由(I)可知： $\angle CDE = \angle BDE$ ， $DB = DC$ 。

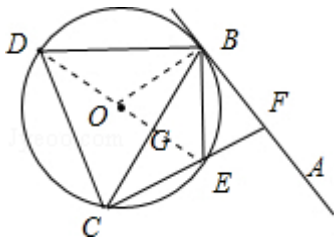
故DG是BC的垂直平分线， $\therefore BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

设DE的中点为O，连接BO，则 $\angle BOG = 60^\circ$ 。

从而 $\angle ABE = \angle BCE = \angle CBE = 30^\circ$ 。

$\therefore CF \perp BF$ 。

$\therefore Rt\triangle BCF$ 的外接圆的半径 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。



【点评】 本题综合考查了圆的性质、弦切角定理、等边三角形的性质、三角形全等、三角形的外接圆的半径等知识，需要较强的推理能力、分析问题和解决问题的能力。

23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$ (t为参数)，以坐标原点为极点，x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$ 。

(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程；

(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$)。

【考点】Q4: 简单曲线的极坐标方程; QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 4R: 转化法; 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】(1) 曲线 C_1 的参数方程消去参数 t , 得到普通方程, 再由 $\begin{cases} x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta \end{cases}$, 能求出 C_1 的极坐标方程.

(2) 曲线 C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程, 与 C_1 的普通方程联立, 求出 C_1 与 C_2 交点的直角坐标, 由此能求出 C_1 与 C_2 交点的极坐标.

【解答】解: (1) 将 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$, 消去参数 t , 化为普通方程 $(x-4)^2+(y-5)^2=25$,

即 $C_1: x^2+y^2-8x-10y+16=0$,

将 $\begin{cases} x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta \end{cases}$ 代入 $x^2+y^2-8x-10y+16=0$,

得 $\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

$\therefore C_1$ 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

(2) \because 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.

\therefore 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$,

联立 $\begin{cases} x^2+y^2-8x-10y+16=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$,

$\therefore C_1$ 与 C_2 交点的极坐标为 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ 和 $(2, \frac{\pi}{2})$.

【点评】 本题考查曲线极坐标方程的求法, 考查两曲线交点的极坐标的求法, 考查极坐标方程、直角坐标方程、参数方程的互化等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查化归与转化思想、函数与方程思想, 是中档题.

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$, $g(x)=x+3$.

(I) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集;

(II) 设 $a>-1$, 且当 $x\in[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 时, $f(x)\leq g(x)$, 求 a 的取值范围.

【考点】 R5: 绝对值不等式的解法.

【分析】 (I) 当 $a = -2$ 时, 求不等式 $f(x) < g(x)$ 化为 $|2x - 1| + |2x - 2| - x - 3 < 0$. 设 $y = |2x - 1| + |2x - 2| - x - 3$, 画出函数 y 的图象, 数形结合可得结论.

(II) 不等式化即

$1 + a \leq x + 3$, 故 $x \geq a - 2$ 对 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 都成立, 分析可得 $-\frac{a}{2} \geq a - 2$, 由此解得 a 的取值范围.

【解答】 解: (I) 当 $a = -2$ 时, 求不等式 $f(x) < g(x)$ 化为 $|2x - 1| + |2x - 2| - x - 3 < 0$.

$$\text{设 } y = |2x - 1| + |2x - 2| - x - 3, \text{ 则 } y = \begin{cases} -5x, & x < \frac{1}{2} \\ -x - 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x - 6, & x > 1 \end{cases}, \text{ 它的图象如图所示:}$$

结合图象可得, $y < 0$ 的解集为 $(0, 2)$, 故原不等式的解集为 $(0, 2)$.

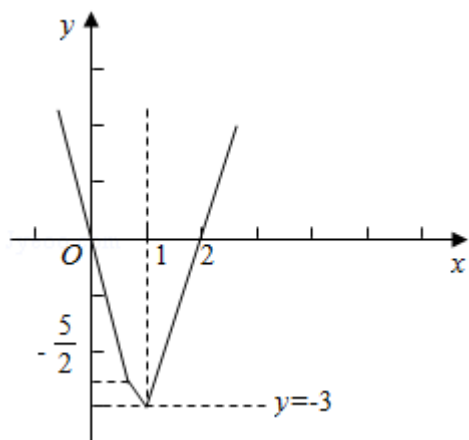
(II) 设 $a > -1$, 且当 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 时, $f(x) = 1 + a$, 不等式化为 $1 + a \leq x + 3$,

故 $x \geq a - 2$ 对 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}]$ 都成立.

故 $-\frac{a}{2} \geq a - 2$,

解得 $a \leq \frac{4}{3}$,

故 a 的取值范围为 $(-1, \frac{4}{3}]$.



【点评】 本题考查绝对值不等式的解法与绝对值不等式的性质, 关键是利用零点分段讨论法分析函数的解析式.

