

2000年黑龙江高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 9 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷(选择题共 60 分)

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答, 不能答在试题卷上。
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式:

三角函数的积化和差公式

正棱台、圆台的侧面积公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底

面周长, l 表示斜高或母线长

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$V_{\text{台}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

其中 S' 、 S 分别表

示上、下底面积, h 表示高

一、选择题: 本大题共 12 分, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合 A 和 B 都是自然数集合 N , 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(2) 在复平面内, 把复数 $3 - \sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}i$ (C) $\sqrt{3} - 3i$ (D) $3 + \sqrt{3}i$

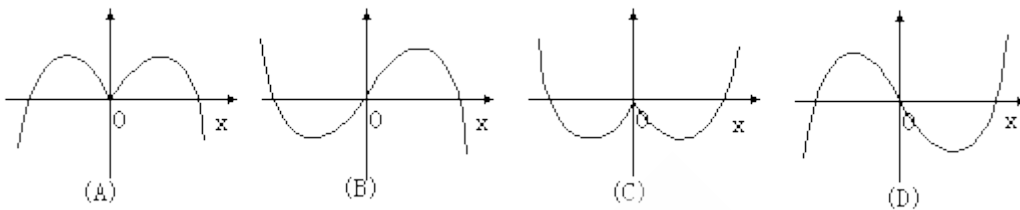
(3) 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ，这个长方体对角线的长是

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

(4) 已知 $\sin \alpha > \sin \beta$ ，那么下列命题成立的是

- (A) 若 α, β 是第一象限角，则 $\cos \alpha > \cos \beta$
 (B) 若 α, β 是第二象限角，则 $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$
 (C) 若 α, β 是第三象限角，则 $\cos \alpha > \cos \beta$
 (D) 若 α, β 是第四象限角，则 $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$

(5) 函数 $y = -x \cos x$ 的部分图象是



(6) 《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分档累进计算。

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
...	...

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于

- (A) 800~900 元 (B) 900~1200 元 (C) 1200~1500 元 (D) 1500~2800 元

(7) 若 $a > b > 1$ ， $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$ ， $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$ ， $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，则

- (A) $R < P < Q$ (B) $P < Q < R$ (C) $Q < P < R$ (D) $P < R < Q$

(8) 以极坐标中的点 $(1, 1)$ 为圆心，1 为半径的圆的方程是

(A) $\rho = 2 \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

(B) $\rho = 2 \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$

(C) $\rho = 2 \cos(\theta - 1)$

(D) $\rho = 2 \sin(\theta - 1)$

(9) 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$

(B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$

(C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$

(D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

(10) 过原点的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是

(A) $y = \sqrt{3}x$

(B) $y = -\sqrt{3}x$

(C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

(D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

(11) 过抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ

的长分别是 p、q，则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于

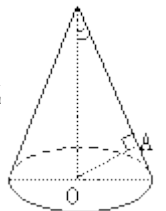
(A) 2a

(B) $\frac{1}{2a}$

(C) 4a

(D) $\frac{4}{a}$

(12) 如图，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角为



(A) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\arccos \frac{1}{2}$

(C) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) $\arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

注意事项:

- 第 II 卷共 7 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
- 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三						总分
		17	18	19	20	21	22	
分数								

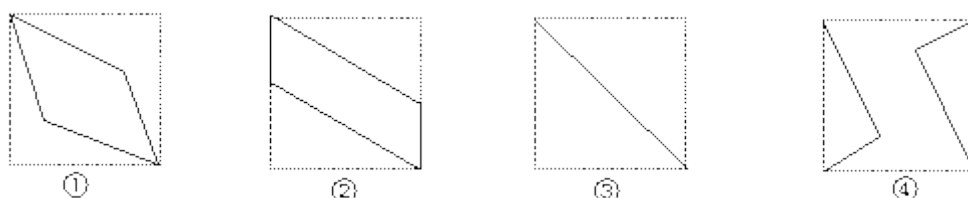
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

(13) 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名参加比赛，3 名主力队员要安排在第一、第三、五位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有 _____ 种（用数字作答）

(14) 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 ，点 P 为其上的动点。当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是 _____。

(15) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)，则它的通项公式是 $a_n =$ _____。

(16) 如图，E、F 分别为正方体的面 ADD_1A_1 、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在正方体的面上的射影可能是 _____。



都
(要求：把可能的图的序号填上)

三、解答题：本大题共 16 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

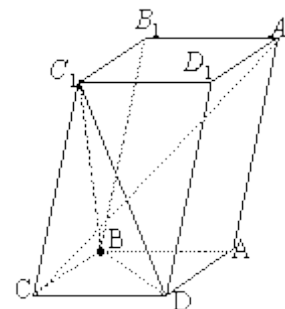
已知函数 $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$

- (I) 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；
- (II) 该函数的图象可由 $y = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

(18) (本小题满分 12 分)

如图，已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 是菱形，且

$\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD = 60^\circ$



(I) 证明： $C_1C \perp BD$ ；

(II) 假定 $CD=2$, $\frac{CC_1}{CD} = \frac{3}{2}$, 记面 C_1BD 为 α , 面 CBD 为 β , 求二面角 $\alpha - BD - \beta$ 的平面角的余弦值;

(III) 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C \perp \text{平面} C_1BD$? 请给出证明。

(19) (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$, 其中 $a > 0$ 。

(I) 解不等式 $f(x) \leq 1$;

(II) 求 a 的取值范围, 使函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty]$ 上是单调函数。

(20) (本小题满分 12 分)

(I) 已知数列 $\{c_n\}$, 其中 $c_n = 2^n + 3^n$, 且数列 $\{c_{n+1} - pc_n\}$ 为等比数列, 求常数 p ;

(II) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列, $c_n = a_n + b_n$, 证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列。

(21) (本小题满分 12 分)

某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示。

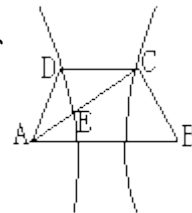
(I) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系 $P=f(t)$; 写出图二表示种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(II) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?



(注: 市场售价和种植成本的单位: $\frac{\text{元}}{10^3 \text{kg}}$, 时间单位: 天)

如图, 已知梯形 ABCD 中 $|AB|=2|CD|$, 点 E 分有向线段 \overline{AC} 所成的比为 λ , 双曲线过 C、



D、E 三点, 且以 A、B 为焦点。当 $\frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围。

参考解答及评分标准

说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力, 并给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分。

三、解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数, 选择题和填空题不给中间分。

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算, 每小题 5 分, 满分 60 分。

- (1) C (2) B (3) D (4) D (5) D (6) C (7) B (8) C
 (9) A (10) C (11) C (12) D

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算, 每小题 4 分, 满分 16 分。

- (13) 252 (14) $-\frac{3}{\sqrt{5}} < x < \frac{3}{\sqrt{5}}$ (15) $\frac{1}{n}$ (16) ②③

三、解答题

(17) 本小题主要考查三角函数的图象和性质, 考查利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力。满分 12 分。

解: (I)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1 \\
 &= \frac{1}{4} (2 \cos^2 x - 1) + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} (2 \sin x \cos x) + 1 \\
 &= \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x + \frac{5}{4} = \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

.....6 分

y 取得最大值必须且只需 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 即 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 所以当函数 y 取得最

大值时, 自变量 x 的集合为 $\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 8 分

(II) 将函数 $y = \sin x$ 依次进行如下变换: (i) 把函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$, 得到函

数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图象; (ii) 把得到的图象上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不

变), 得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象; (iii) 把得到的图象上各点纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

倍 (横坐标不变), 得到函数 $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象 (iv) 把得到的图象向上平移 $\frac{5}{4}$ 个单

位长度, 得到函数 $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4}$ 的图象;

综上所述得到函数 $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1$ 的图象。.....12 分

(18) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系, 逻辑推理能力, 满分 12 分。

(I) 证明: 连结 A_1C_1 、 AC , AC 和 BD 交于 O , 连结 C_1O

\because 四边形 $ABCD$ 是菱形

$\therefore AC \perp BD, BC = CD$

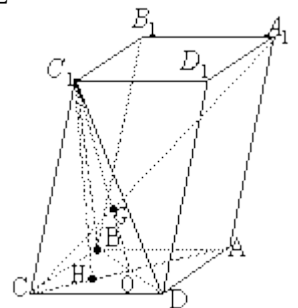
又 $\because \angle BCC_1 = \angle DCC_1, C_1C = C_1C$

$\therefore \triangle C_1BC \cong \triangle C_1DC$

$\therefore C_1B = C_1D$

$\because DO = OB$

$\therefore C_1O \perp BD$ 2 分



但 $AC \perp BD$, $AC \cap C_1O = O$

$\therefore BD \perp$ 平面 AC_1

又 $C_1C \subset$ 平面 AC_1

$\therefore C_1C \perp BD$ 4分

(II) 解: 由 (I) 知 $AC \perp BD$, $C_1O \perp BD$

$\therefore \angle C_1OC$ 是二面角 $\alpha - BD - \beta$ 的平面角

在 $\triangle C_1BC$ 中, $BC=2$, $C_1C = \frac{3}{2}$, $\angle BC C_1 = 60^\circ$

$\therefore C_1B^2 = 2^2 + (\frac{3}{2})^2 - 2 \times 2 \times \frac{3}{2} \times \cos 60^\circ = \frac{13}{4}$ 6分

$\because \angle OCB = 60^\circ$

$\therefore OB = \frac{1}{2}BC = 1$

$\therefore C_1O^2 = C_1B^2 - OB^2 = \frac{13}{4} - 1 = \frac{9}{4}$

$\therefore C_1O = \frac{3}{2}$ 即 $C_1O = C_1C$

作 $C_1H \perp OC$, 垂足为 H。

\therefore 点 H 是 OC 的中点, 且 $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\cos \angle C_1OC = \frac{OH}{C_1O} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 8分

(III) 当 $\frac{CD}{CC_1} = 1$ 时, 能使 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD

证明一： $\because \frac{CD}{CC_1} = 1$

$$\therefore BC = CD = C_1C$$

$$\text{又 } \angle BCD = \angle C_1CB = \angle C_1CD$$

$$\text{由此可推得 } BD = C_1B = C_1D$$

\therefore 三棱锥 $C-C_1BD$ 是正三棱锥。.....10 分

设 A_1C 与 C_1O 相交于 G.

$$\because A_1C_1 // AC, \text{ 且 } A_1C_1 : OC = 2 : 1$$

$$\therefore C_1O : GO = 2 : 1$$

又 C_1O 是正三角形 C_1BD 的 BD 边上的高和中线,

\therefore 点 G 是正三角形 C_1BD 的中心。

$$\therefore CG \perp \text{平面 } C_1BD$$

即 $A_1C \perp \text{平面 } C_1BD$ 。.....12 分

证明二：由 (I) 知, $BD \perp \text{平面 } AC_1$

$\because A_1C \subset \text{平面 } AC_1, \therefore BD \perp A_1C$ 。.....10 分

当 $\frac{CD}{CC_1} = 1$ 时, 平行六面体的六个面是全等的菱形。

同 $BD \perp AC_1$ 的证法可得 $BC_1 \perp A_1C$

又 $BD \perp BC_1 = B \therefore A_1C_1 \perp \text{平面 } C_1BD$ 12 分

(19) 本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识，分数讨论的数学思想方法和运算、推理能力。满分 12 分。

解：(I) 不等式 $f(x) \leq 1$ 即 $\sqrt{x^2 + 1} \leq 1 + ax$ ，由此得 $1 \leq 1 + ax$ ，即 $ax \geq 0$ ，其中常数 $a > 0$

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2 + 1 \leq (1 + ax)^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ (a^2 - 1)x + 2a \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以，当 $0 < a < 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x | 0 \leq x \leq \frac{2a}{1-a^2}\}$ ；

当 $a \geq 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x | x \geq 0\}$ 6 分

(II) 在区间 $[0, +\infty]$ 上任取 x_1, x_2 ，使得 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} - a(x_1 - x_2) \\ &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a \right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

(i) 当 $a \geq 1$ 时

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} < 1$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a < 0$$

又 $x_1 - x_2 < 0$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$$

即 $f(x_1) > f(x_2)$

所以, 当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty]$ 上是单调递减函数。……………10 分

(ii) 当 $0 < a < 1$ 时, 在区间 $[0, +\infty]$ 上存在两点 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{1-a^2}$, 满足 $f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$,

即 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty]$ 上不是单调函数。

综上, 当且仅当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty]$ 上是单调函数。……………12 分

(20) 本小题主要考查等比数列的概念和基本性质, 推理和运算能力, 满分 12 分。

解: (I) 因为 $\{c_{n+1} - pc_n\}$ 是等比数列, 故有 $(c_{n+1} - pc_n)^2 = (c_{n+2} - pc_{n+1})(c_n - pc_{n-1})$

将 $c_n = 2^n + 3^n$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} & [2^{n+1} + 3^{n+1} - p(2^n + 3^n)]^2 \\ &= [2^{n+2} + 3^{n+2} - p(2^{n+1} + 3^{n+1})] \cdot [2^n + 3^n - p(2^{n-1} + 3^{n-1})] \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(2-p)2^n + (3-p)3^n]^2 \\ \text{即} &= [(2-p)2^{n+1} + (3-p)3^{n+1}][2^{n-1} + 3^{n-1}] \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{6}(2-p)(3-p) \cdot 2^n \cdot 3^n = 0$$

解得 $p=2$ 或 $p=3$ 。……………6 分

(II) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公比分别是 $p, q, p \neq q, c_n = a_n + b_n$

为证 $\{c_n\}$ 不是等比数列只需证 $c_2^2 \neq c_1 \cdot c_3$ 。

$$\text{事实上, } c_2^2 = (a_1p + b_1q)^2 = a_1^2p^2 + b_1^2q^2 + 2a_1b_1pq,$$

$$c_1 \cdot c_3 = (a_1 + b_1)(a_1p^2 + b_1q^2) = a_1^2p^2 + b_1^2q^2 + a_1b_1(p^2 + q^2)$$

由于 $p \neq q, p^2 + q^2 > 2pq$, 又 a_1, b_1 不为零,

因此 $c_2^2 \neq c_1 \cdot c_3$, 故 $\{c_n\}$ 不是等比数列。.....12 分

(21) 本小题主要考查由函数图象建立函数关系式和求函数最大值的问题, 考查运用所学知识解决实际问题的能力, 满分 12 分。

解: (I) 由图一可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t) = \begin{cases} 300 - t, & 0 \leq t \leq 200 \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由图二可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t) = \frac{1}{200}(t-150)^2 + 100, \quad 0 \leq t \leq 300 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$, 则由题意得

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

$$\text{即 } h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2}, & 0 \leq t \leq 200 \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{2}{7}t - \frac{1025}{2}, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $0 \leq t \leq 200$ 时, 配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t-50)^2 + 100$$

所以, 当 $t=50$ 时, $h(t)$ 取得区间 $[0, 200]$ 上的最大值 100;

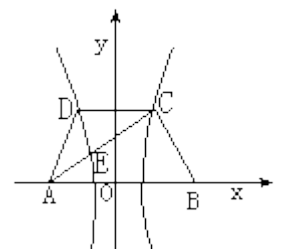
当 $200 < t \leq 300$ 时, 配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t-350)^2 + 100$$

所以, 当 $t=300$ 时, $h(t)$ 取得区间 $[200, 300]$ 上的最大值 87.5。.....10 分

综上, 由 $100 > 87.5$ 可知, $h(t)$ 在区间 $[0, 300]$ 上可以取得最大值 100, 此时 $t=50$, 即从二月一日开始的第 50 天时, 上市的西红柿纯收益最大。.....12 分

(22) 本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质, 推理、运算能力和综合应用数学知识解决问题的能力, 满分 14 分。



解如图，以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系 xOy，则 CD ⊥ y 轴。因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于 x 轴对称。……………2 分

依题意，记 A(-c, 0)， $C(\frac{c}{2}, h)$ ， $E(x_0, y_0)$ ，其中 $c = \frac{1}{2}|AB|$ 为双曲线的半焦距，h 是梯形的高。由定比分点坐标公式得

$$x_0 = \frac{-c + \frac{c}{2}\lambda}{1 + \lambda} = \frac{(\lambda - 2)c}{2(\lambda + 1)}$$

$$y_0 = \frac{\lambda h}{1 + \lambda}。$$

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则离心率 $e = \frac{c}{a}$ 。

由点 C、E 在双曲线上，将点 C、E 的坐标和 $e = \frac{c}{a}$ 代入双曲线方程得

$$\frac{e^2}{4} - \frac{h^2}{b^2} = 1 \tag{①}$$

$$\frac{e^2}{4} \left(\frac{\lambda - 2}{\lambda + 1}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^2 \frac{h^2}{b^2} = 1 \tag{②} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由①式得 $\frac{h^2}{b^2} = \frac{e^2}{4} - 1$ ③

将③式代入②式，整理得

$$\frac{e^2}{4} (4 - 4\lambda) = 1 + 2\lambda$$

故 $\lambda = 1 - \frac{3}{e^2 + 2}$ 。……………10 分

由题设 $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$ 得， $\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{3}{e^2 + 2} \leq \frac{3}{4}$

解得 $\sqrt{7} \leq e \leq \sqrt{10}$

所以双曲线的离心率的取值范围为 $[\sqrt{7}, \sqrt{10}]$ 。.....14 分