2014年北京市高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．（5分）已知集合 $A=\{x|x^2-2x=0\}$，$B=\{0，1，2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0\}$　　　　B．$\{0，1\}$　　　　C．$\{0，2\}$　　　　D．$\{0，1，2\}$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】解出集合A，再由交的定义求出两集合的交集．

【解答】解：$\because A=\{x|x^2-2x=0\}=\{0，2\}$，$B=\{0，1，2\}$，

$\therefore A\cap B=\{0，2\}$

故选：C．

【点评】本题考查交的运算，理解好交的定义是解答的关键．

2．（5分）下列函数中，在区间（0，+∞）上为增函数的是（　　）

A．$y=\sqrt{x+1}$　　　　B．$y=(x-1)^2$

C．$y=2^{-x}$　　　　D．$y=\log_{0.5}(x+1)$

【考点】4O：对数函数的单调性与特殊点．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】根据基本初等函数的单调性，判断各个选项中函数的单调性，从而得出结论．

【解答】解：由于函数 $y=\sqrt{x+1}$ 在（﹣1，+∞）上是增函数，故满足条件，

由于函数 $y=(x-1)^2$ 在（0，1）上是减函数，故不满足条件，

由于函数 $y=2^{-x}$ 在（0，+∞）上是减函数，故不满足条件，

由于函数 $y=\log_{0.5}(x+1)$ 在（﹣1，+∞）上是减函数，故不满足条件，

故选：A．

【点评】本题主要考查函数的单调性的定义和判断，基本初等函数的单调性，属于基础题．

3．（5 分）曲线$\begin{cases}x=-1+\cos\theta\\y=2+\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数）的对称中心（　　）

A．在直线 y=2x 上　　B．在直线 y=﹣2x 上

C．在直线 y=x﹣1 上　　D．在直线 y=x+1 上

【考点】QK：圆的参数方程．

【专题】17：选作题；5S：坐标系和参数方程．

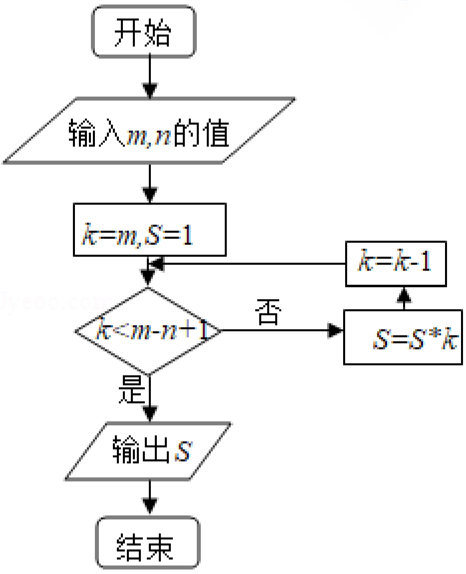
【分析】曲线$\begin{cases}x=-1+\cos\theta\\y=2+\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数）表示圆，对称中心为圆心，可得结论．

【解答】解：曲线$\begin{cases}x=-1+\cos\theta\\y=2+\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数）表示圆，圆心为（﹣1，2），在直线 y=﹣2x 上，

故选：B．

【点评】本题考查圆的参数方程，考查圆的对称性，属于基础题．

4．（5 分）当 m=7，n=3 时，执行如图所示的程序框图，输出的 S 的值为（　　）



A．7　　B．42　　C．210　　D．840

【考点】E7：循环结构．

【专题】11：计算题；5K：算法和程序框图．

【分析】算法的功能是求 $S=7\times6\times\ldots\times k$ 的值，根据条件确定跳出循环的 k 值，计算输出 S 的值．

【解答】解：由程序框图知：算法的功能是求 $S=7\times6\times\ldots\times k$ 的值，

当 $m=7$，$n=3$ 时，$m-n+1=7-3+1=5$，

∴跳出循环的 k 值为 4，

∴输出 $S=7\times6\times5=210$．

故选：C．

【点评】本题考查了循环结构的程序框图，根据框图的流程判断算法的功能是解答本题的关键．

5．（5 分）设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【考点】29：充分条件、必要条件、充要条件；87：等比数列的性质．

【专题】54：等差数列与等比数列；5L：简易逻辑．

【分析】根据等比数列的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可得到结论．

【解答】解：等比数列 -1，-2，-4，…，满足公比 $q=2>1$，但 $\{a_n\}$ 不是递增数列，充分性不成立．

若 $a_n=-1\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$ 为递增数列，但 $q=\frac{1}{2}>1$ 不成立，即必要性不成立，

故“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件，

故选：D．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，利用等比数列的性质，利用特殊值法是解决本题的关键．

6.（5 分）若 x，y 满足$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\kx-y+2\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，且 z=y﹣x 的最小值为﹣4，则 k 的值为（　　）

A．2　　B．﹣2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

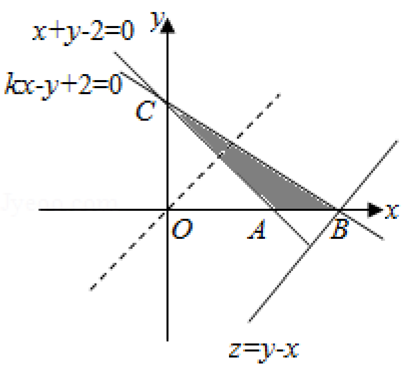
【考点】7C：简单线性规划．

【专题】31：数形结合；59：不等式的解法及应用．

【分析】对不等式组中的 kx﹣y+2≥0 讨论，当 k≥0 时，可行域内没有使目标函数 z=y﹣x 取得最小值的最优解，k＜0 时，若直线 kx﹣y+2=0 与 x 轴的交点在 x+y﹣2=0 与 x 轴的交点的左边，z=y﹣x 的最小值为﹣2，不合题意，由此结合约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，由图得到最优解，联立方程组求出最优解的坐标，代入目标函数得答案．

【解答】解：对不等式组中的 kx﹣y+2≥0 讨论，可知直线 kx﹣y+2=0 与 x 轴的交点在 x+y﹣2=0 与 x 轴的交点的右边，

故由约束条件$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\kx-y+2\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$作出可行域如图，



当 y=0，由 kx﹣y+2=0，得 $x=-\frac{2}{k}$，

∴B（$-\frac{2}{k}$，0）．

由 z=y﹣x 得 y=x+z．

由图可知，当直线 y=x+z 过 B（$-\frac{2}{k}$，0）时直线在 y 轴上的截距最小，即 z 最小．

此时 $z_{min}=0+\frac{2}{k}=-4$，解得：$k=-\frac{1}{2}$．

故选：D．

【点评】本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题．

7．（5 分）在空间直角坐标系 Oxyz 中，已知 A（2，0，0），B（2，2，0），C（0，2，0），D（1，1，$\sqrt{2}$），若 S_1，S_2，S_3 分别表示三棱锥 D﹣ABC 在 xOy，yOz，zOx 坐标平面上的正投影图形的面积，则（　　）

A．$S_1=S_2=S_3$　　B．$S_2=S_1$ 且 $S_2\neq S_3$　　C．$S_3=S_1$ 且 $S_3\neq S_2$　　D．$S_3=S_2$ 且 $S_3\neq S_1$

【考点】JG：空间直角坐标系．

【专题】5H：空间向量及应用．

【分析】分别求出三棱锥在各个面上的投影坐标即可得到结论．

【解答】解：设 A（2，0，0），B（2，2，0），C（0，2，0），D（1，1，$\sqrt{2}$），

则各个面上的射影分别为 A'，B'，C'，D'，

在 xOy 坐标平面上的正投影 A'（2，0，0），B'（2，2，0），C'（0，2，0），D'（1，1，0），$S_1=\frac{1}{2}\times2\times2=2$．

在 yOz 坐标平面上的正投影 A'（0，0，0），B'（0，2，0），C'（0，2，0），D'（0，1，$\sqrt{2}$），$S_2=.\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

在 zOx 坐标平面上的正投影 A'（2，0，0），B'（2，0，0），C'（0，0，0），D'（0，1，$\sqrt{2}$），$S_3=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

则 $S_3=S_2$ 且 $S_3\neq S_1$，

故选：D．

【点评】本题主要考查空间坐标系的应用，求出点对于的投影坐标是解决本题的关键．

8．（5 分）学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级，依次为"优秀""合格""不合格"．若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙，且其中至少有一门成绩高于乙，则称"学生甲比学生乙成绩好"．如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好，并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生，

则这一组学生最多有（　　）

A．2 人　　B．3 人　　C．4 人　　D．5 人

【考点】F4：进行简单的合情推理．

【专题】5M：推理和证明．

【分析】分别用 ABC 分别表示优秀、及格和不及格，根据题干中的内容推出文成绩得 A，B，C 的学生各最多只有 1 个，继而推得学生的人数．

【解答】解：用 ABC 分别表示优秀、及格和不及格，显然语文成绩得 A 的学生最多只有 1 个，

语文成绩得 B 得也最多只有一个，

得 C 最多只有一个，

因此学生最多只有 3 人，

显然（AC）（BB）（CA）满足条件，

故学生最多有 3 个．

故选：B．

【点评】本题主要考查了合情推理，关键是找到语句中的关键词，培养了推理论证的能力．

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9．（5 分）复数 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=$ ＿﹣1＿．

【考点】A5：复数的运算．

【专题】5N：数系的扩充和复数．

【分析】由复数代数形式的除法运算化简括号内部，然后由虚数单位 i 的运算性质得答案．

【解答】解：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^2=\left(\frac{2i}{2}\right)^2=-1$．

故答案为：﹣1．

【点评】本题考查了复数代数形式的除法运算，考查了虚数单位 i 的运算性质，是基础题．

10．（5 分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(2,1)$，且$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$（λ∈R），则$|\lambda|=$

$\underline{\sqrt{5}}$__.

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】设$\vec{a}=(x,y)$．由于向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(2,1)$，且$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$（λ∈R），可得$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\ \lambda x+2=0\\ \lambda y+1=0\end{cases}$，解出即可．

【解答】解：设$\vec{a}=(x,y)$．

∵向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(2,1)$，且$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$（λ∈R），

∴$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\lambda(x,y)+(2,1)=(\lambda x+2,\lambda y+1)$，

∴$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\ \lambda x+2=0\\ \lambda y+1=0\end{cases}$，化为$\lambda^2=5$．

解得$|\lambda|=\sqrt{5}$．

故答案为：$\sqrt{5}$．

【点评】本题考查了向量的坐标运算、向量的模的计算公式、零向量等基础知识与基本技能方法，属于基础题．

11．（5 分）设双曲线 C 经过点（2，2），且与$\frac{y^2}{4}-x^2=1$具有相同渐近线，则 C 的方程为__$\underline{\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1}$__；渐近线方程为__$\underline{y=\pm 2x}$__．

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】利用双曲线渐近线之间的关系，利用待定系数法即可得到结论.

【解答】解：与$\frac{y^2}{4}-x^2=1$具有相同渐近线的双曲线方程可设为$\frac{y^2}{4}-x^2=m$，（$m\neq 0$），

∵双曲线 C 经过点（2，2），

∴$m=\frac{2^2}{4}-2^2=1-4=-3$，

即双曲线方程为$\frac{y^2}{4}-x^2=-3$，即$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$，

对应的渐近线方程为$y=\pm 2x$，

故答案为：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$，$y=\pm 2x$.

【点评】本题主要考查双曲线的性质，利用渐近线之间的关系，利用待定系数法是解决本题的关键，比较基础.

12.（5 分）若等差数列$\{a_n\}$满足$a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当 n=__8__时，$\{a_n\}$的前 n 项和最大.

【考点】83：等差数列的性质.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】可得等差数列$\{a_n\}$的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，进而可得结论.

【解答】解：由等差数列的性质可得$a_7+a_8+a_9=3a_8>0$，

∴$a_8>0$，又$a_7+a_{10}=a_8+a_9<0$，∴$a_9<0$，

∴等差数列$\{a_n\}$的前 8 项为正数，从第 9 项开始为负数，

∴等差数列$\{a_n\}$的前 8 项和最大，

故答案为：8.

【点评】本题考查等差数列的性质和单调性，属中档题.

13.（5 分）把 5 件不同产品摆成一排，若产品 A 与产品 B 相邻，且产品 A 与产

品 C 不相邻，则不同的摆法有 36 种．

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】5O：排列组合．

【分析】分 3 步进行分析：①用捆绑法分析 A、B，②计算其中 A、B 相邻又满足 B、C 相邻的情况，即将 ABC 看成一个元素，与其他产品全排列，③在全部数目中将 A、B 相邻又满足 A、C 相邻的情况排除即可得答案．

【解答】解：先考虑产品 A 与 B 相邻，把 A、B 作为一个元素有 A_4^4种方法，而 A、B 可交换位置，所以有 2A_4^4=48 种摆法，

又当 A、B 相邻又满足 A、C 相邻，有 2A_3^3=12 种摆法，

故满足条件的摆法有 48﹣12=36 种．

故答案为：36．

【点评】本题考查分步计数原理的应用，要优先分析受到限制的元素，如本题的 A、B、C．

14．（5 分）设函数 f（x）=Asin（ωx+φ）（A，ω，φ 是常数，A＞0，ω＞0）若 f（x）在区间[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$]上具有单调性，且 f（$\frac{\pi}{2}$）=f（$\frac{2\pi}{3}$）=﹣f（$\frac{\pi}{6}$），则 f（x）的最小正周期为 π ．

【考点】H1：三角函数的周期性；HK：由 y=Asin（ωx+φ）的部分图象确定其解析式．

【专题】57：三角函数的图像与性质．

【分析】由 f（$\frac{\pi}{2}$）=f（$\frac{2\pi}{3}$）求出函数的一条对称轴，结合 f（x）在区间[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$]上具有单调性，且 f（$\frac{\pi}{2}$）=﹣f（$\frac{\pi}{6}$）

可得函数的半周期，则周期可求．

【解答】解：由 f（$\frac{\pi}{2}$）=f（$\frac{2\pi}{3}$），可知函数 f（x）的一条对称轴为

$x=\dfrac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\dfrac{7\pi}{12}$，

则 $x=\frac{\pi}{2}$离最近对称轴距离为$\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$.

又 f（$\frac{\pi}{2}$）= - f（$\frac{\pi}{6}$），则 f（x）有对称中心（$\frac{\pi}{3}$，0），

由于 f（x）在区间[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$]上具有单调性，

则$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{1}{2}T\Rightarrow T\geqslant\frac{2\pi}{3}$，从而$\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{T}{4}\Rightarrow T=\pi$.

故答案为：π.

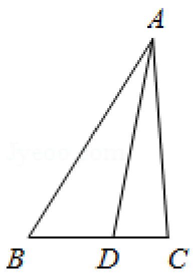
【点评】本题考查 f（x）=Asin（ωx+φ）型图象的形状，考查了学生灵活处理问题和解决问题的能力，是中档题.

三、解答题（共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

15.（13 分）如图，在△ABC 中，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，AB=8，点 D 在边 BC 上，且 CD=2，$\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$.

（1）求 sin∠BAD；

（2）求 BD，AC 的长.



【考点】HR：余弦定理.

【专题】58：解三角形.

【分析】根据三角形边角之间的关系，结合正弦定理和余弦定理即可得到结论.

【解答】解：（1）在△ABC 中，∵$\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$，

∴$\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\sqrt{\frac{48}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

则 sin∠BAD=sin（∠ADC﹣∠B）=sin∠ADC•cosB﹣cos∠ADC•sinB=$\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}$﹣

$\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

（2）在△ABD 中，由正弦定理得 $BD=\frac{AB\cdot\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\frac{8\times\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=3$，

在△ABC 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+CB^2-2AB\bullet BC\cos B=8^2+5^2-2\times8\times5\times\frac{1}{2}=49$，

即 AC=7．

【点评】本题主要考查解三角形的应用，根据正弦定理和余弦定理是解决本题本题的关键，难度不大．

16．（13 分）李明在 10 场篮球比赛中的投篮情况统计如下（假设各场比赛相互独立）；

场次	投篮次数	命中次数	场次	投篮次数	命中次数
主场 1	22	12	客场 1	18	8
主场 2	15	12	客场 2	13	12
主场 3	12	8	客场 3	21	7
主场 4	23	8	客场 4	18	15
主场 5	24	20	客场 5	25	12

（1）从上述比赛中随机选择一场，求李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 的概率；

（2）从上述比赛中随机选择一个主场和一个客场，求李明的投篮命中率一场超过 0.6，一场不超过 0.6 的概率；

（3）记 $\overline{x}$ 是表中 10 个命中次数的平均数，从上述比赛中随机选择一场，记 X 为李明在这场比赛中的命中次数，比较 EX 与 $\overline{x}$ 的大小（只需写出结论）．

【考点】C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】（1）根据概率公式，找到李明在该场比赛中超过 0.6 的场次，计算即可，

（2）根据互斥事件的概率公式，计算即可.

（3）求出平均数和 EX，比较即可.

【解答】解：（1）设李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 为事件 A，由题意知，李明在该场比赛中超过 0.6 的场次有：主场 2，主场 3，主场 5，客场 2，客场 4，共计 5 场

所以李明在该场比赛中投篮命中率超过 0.6 的概率 P（A）$=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，

（2）设李明的投篮命中率一场超过 0.6，一场不超过 0.6 的概率为事件 B，同理可知，李明主场命中率超过 0.6 的概率 $P_1=\frac{3}{5}$，客场命中率超过 0.6 的概率 $P_2=\frac{2}{5}$，

故 P（B）$=P_1\times(1-P_2)+P_2\times(1-P_1)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}$；

（3）$\overline{x}=\frac{1}{10}$（12+8+12+12+8+7+8+15+20+12）=11.4

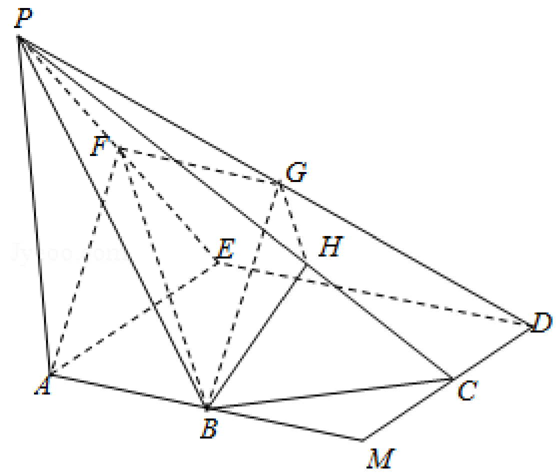
$EX=\overline{x}$

【点评】本题主要考查了概率的计算、数学期望，平均数，互斥事件的概率，属于中档题.

17.（14 分）如图，正方形 AMDE 的边长为 2，B，C 分别为 AM，MD 的中点，在五棱锥 P﹣ABCDE 中，F 为棱 PE 的中点，平面 ABF 与棱 PD，PC 分别交于点 G，H.

（1）求证：AB∥FG；

（2）若 PA⊥底面 ABCDE，且 PA=AE，求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小，并求线段 PH 的长.



【考点】MI：直线与平面所成的角．

【专题】11：计算题；14：证明题；5F：空间位置关系与距离；5G：空间角．

【分析】（1）运用线面平行的判定定理和性质定理即可证得；

（2）由于 PA⊥底面 ABCDE，底面 AMDE 为正方形，建立如图的空间直角坐标系 Axyz，分别求出 A，B，C，E，P，F，及向量 BC 的坐标，设平面 ABF 的法向量为 n=（x，y，z），求出一个值，设直线 BC 与平面 ABF 所成的角为 α，运用 $\sin\alpha=|\cos\langle n,\overrightarrow{BC}\rangle|$，求出角 α；设 H（u，v，w），再设 $\overrightarrow{PH}=\lambda\overrightarrow{PC}(0<\lambda<1)$，用 λ 表示 H 的坐标，再由 $n\cdot\overrightarrow{AH}=0$，求出 λ 和 H 的坐标，再运用空间两点的距离公式求出 PH 的长．

【解答】（1）证明：在正方形 AMDE 中，∵B 是 AM 的中点，

∴AB∥DE，又∵AB⊄平面 PDE，∴AB∥平面 PDE，

∵AB⊂平面 ABF，且平面 ABF∩平面 PDE=FG，

∴AB∥FG；

（2）解：∵PA⊥底面 ABCDE，∴PA⊥AB，PA⊥AE，

如图建立空间直角坐标系 Axyz，则 A（0，0，0），

B（1，0，0），C（2，1，0），P（0，0，2），

E（0，2，0），F（0，1，1），$\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$，

设平面 ABF 的法向量为 $\vec{n}$=（x，y，z），则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$即$\begin{cases}x=0\\ y+z=0\end{cases}$，

令 z=1，则 y=﹣1，∴$\vec{n}$=（0，﹣1，1），

设直线 BC 与平面 ABF 所成的角为 α，则

$\sin\alpha=|\cos<\vec{n},\ \overrightarrow{BC}>|=|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}|=\frac{1}{2}$，

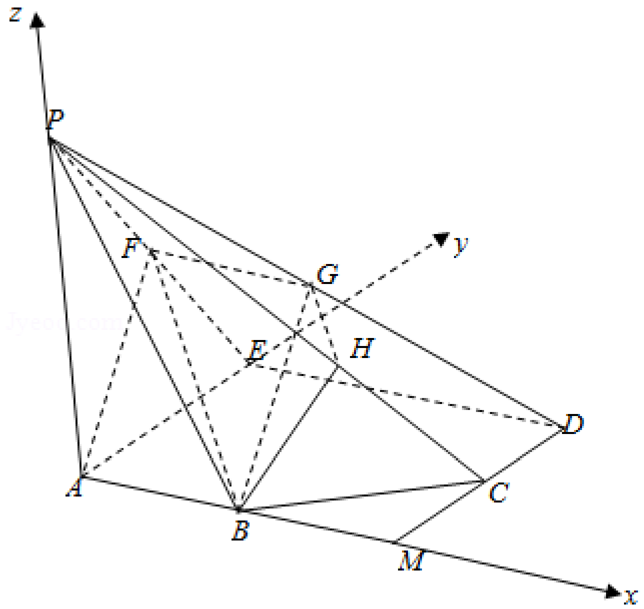
∴直线 BC 与平面 ABF 所成的角为$\frac{\pi}{6}$，

设 H（u，v，w），∵H 在棱 PC 上，∴可设$\overrightarrow{PH}=\lambda\overrightarrow{PC}(0<\lambda<1)$，

即（u，v，w﹣2）=λ（2，1，﹣2），∴u=2λ，v=λ，w=2﹣2λ，∵$\vec{n}$是平面 ABF 的法向量，

∴$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=0$，即（0，﹣1，1）•（2λ，λ，2﹣2λ）=0，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，∴H（$\frac{4}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$），

∴$PH=\sqrt{(\frac{4}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+(-\frac{4}{3})^2}=2$.



【点评】本题主要考查空间直线与平面的位置关系，考查直线与平面平行、垂直的判定和性质，同时考查直线与平面所成的角的求法，考查运用空间直角坐标系求角和距离，是一道综合题．

18．（13 分）已知函数 f（x）=xcosx﹣sinx，x∈$[0,\frac{\pi}{2}]$

（1）求证：f（x）≤0；

（2）若 a＜$\frac{\sin x}{x}$＜b 对 x∈（0，$\frac{\pi}{2}$）上恒成立，求 a 的最大值与 b 的最小值．

【考点】6E：利用导数研究函数的最值．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】（1）求出 f′（x）=cosx﹣xsinx﹣cosx=﹣xsinx，判定出在区间∈（0，$\frac{\pi}{2}$）上 f′（x）=﹣xsinx＜0，得 f（x）在区间∈$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减，从而 f（x）≤f（0）=0．

（2）当 x＞0 时，“$\frac{\sin x}{x}$＞a”等价于“sinx﹣ax＞0”，“$\frac{\sin x}{x}$＜b”等价于“sinx﹣bx＜0”构造函数 g（x）=sinx﹣cx，通过求函数的导数讨论参数 c 求出函数的最值，进一步求出 a，b 的最值．

【解答】解：（1）由 f（x）=xcosx﹣sinx 得

f′（x）=cosx﹣xsinx﹣cosx=﹣xsinx，

此在区间∈（0，$\frac{\pi}{2}$）上 f′（x）=﹣xsinx＜0，

所以 f（x）在区间∈$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减，

从而 f（x）≤f（0）=0．

（2）当 x＞0 时，“$\frac{\sin x}{x}$＞a”等价于“sinx﹣ax＞0”，“$\frac{\sin x}{x}$＜b”等价于“sinx﹣bx＜0”

令 g（x）=sinx﹣cx，则 g′（x）=cosx﹣c，

当 c≤0 时，g（x）＞0 对 x∈（0，$\frac{\pi}{2}$）上恒成立，

当 c≥1 时，因为对任意 x∈（0，$\frac{\pi}{2}$），g′（x）=cosx﹣c＜0，

所以 g（x）在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减，

从而，g（x）＜g（0）=0 对任意 x∈（0，$\frac{\pi}{2}$）恒成立，

当 $0<c<1$ 时，存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(x_0)=\cos x_0-c=0$，

$g(x)$ 与 $g'(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的情况如下：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,\frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	↑		↓

因为 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上是增函数，

所以 $g(x_0)>g(0)=0$ 进一步 $g(x)>0$ 对任意 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

当且仅当 $g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}c\geqslant0$ 即 $0<c\leqslant\frac{2}{\pi}$

综上所述当且仅当 $c\leqslant\frac{2}{\pi}$ 时，$g(x)>0$ 对任意 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

当且仅当 $c\geqslant1$ 时，$g(x)<0$ 对任意 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

所以若 $a<\frac{\sin x}{x}<b$ 对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立，则 a 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$，b 的最小值为 1

【点评】本题考查利用导数求函数的单调区间；利用导数求函数的最值；考查解决不等式问题常通过构造函数解决函数的最值问题，属于一道综合题.

19.（14 分）已知椭圆 C：$x^2+2y^2=4$，

（1）求椭圆 C 的离心率

（2）设 O 为原点，若点 A 在椭圆 C 上，点 B 在直线 $y=2$ 上，且 $OA\perp OB$，求直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系，并证明你的结论.

【考点】K4：椭圆的性质；KJ：圆与圆锥曲线的综合.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】（1）化椭圆方程为标准式，求出半长轴和短半轴，结合隐含条件求出半焦距，则椭圆的离心率可求；

（2）设出点 A，B 的坐标分别为 (x_0,y_0)，$(t,2)$，其中 $x_0\neq0$，由 $OA\perp OB$ 得到 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，用坐标表示后把 t 用含有 A 点的坐标表示，然后分 A，B 的横坐

标相等和不相等写出直线 AB 的方程，然后由圆 $x^2+y^2=2$ 的圆心到 AB 的距离和圆的半径相等说明直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切．

【解答】解：（1）由 $x^2+2y^2=4$，得椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

∴$a^2=4$，$b^2=2$，从而 $c^2=a^2-b^2=2$．

因此 $a=2$，$c=\sqrt{2}$．

故椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切．

证明如下：

设点 A，B 的坐标分别为（x_0，y_0），（t，2），其中 $x_0\neq0$．

∵OA⊥OB，

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $tx_0+2y_0=0$，解得 $t=-\frac{2y_0}{x_0}$．

当 $x_0=t$ 时，$y_0=-\frac{t^2}{2}$，代入椭圆 C 的方程，得 $t=\pm\sqrt{2}$．

故直线 AB 的方程为 $x=\pm\sqrt{2}$，圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{2}$．

此时直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切．

当 $x_0\neq t$ 时，直线 AB 的方程为 $y-2=\frac{y_0-2}{x_0-t}(x-t)$，

即（y_0-2）x－（x_0-t）$y+2x_0-ty_0=0$．

圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2x_0-ty_0|}{\sqrt{(y_0-2)^2+(x_0-t)^2}}$．

又 $x_0^2+2y_0^2=4$，$t=-\frac{2y_0}{x_0}$．

故 $d=\frac{|2x_0+\frac{2y_0^2}{x_0}|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+\frac{4y_0^2}{x_0^2}+4}}=\frac{|\frac{4+x_0^2}{x_0}|}{\sqrt{\frac{x_0^4+8x_0^2+16}{2x_0^2}}}=\sqrt{2}$．

此时直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切．

【点评】本题考查椭圆的简单几何性质，考查了圆与圆锥曲线的综合，训练了由

圆心到直线的距离判断直线和圆的位置关系，体现了分类讨论的数学思想方法，考查了计算能力和逻辑思维能力，是压轴题．

20．（13 分）对于数对序列 P：(a_1,b_1)，(a_2,b_2)，…，(a_n,b_n)，记 $T_1(P)=a_1+b_1$，$T_k(P)=b_k+\max\{T_{k-1}(P),\ a_1+a_2+\ldots+a_k\}$（$2\leqslant k\leqslant n$），其中 $\max\{T_{k-1}(P),\ a_1+a_2+\ldots+a_k\}$表示 $T_{k-1}(P)$ 和 $a_1+a_2+\ldots+a_k$ 两个数中最大的数，

（Ⅰ）对于数对序列 P：（2，5），（4，1），求 $T_1(P)$，$T_2(P)$ 的值；

（Ⅱ）记 m 为 a，b，c，d 四个数中最小的数，对于由两个数对（a，b），（c，d）组成的数对序列 P：（a，b），（c，d）和 P′：（c，d），（a，b），试分别对 m=a 和 m=d 两种情况比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小；

（Ⅲ）在由五个数对（11，8），（5，2），（16，11），（11，11），（4，6）组成的所有数对序列中，写出一个数对序列 P 使 $T_5(P)$ 最小，并写出 $T_5(P)$ 的值（只需写出结论）．

【考点】F9：分析法和综合法．

【专题】23：新定义；48：分析法．

【分析】（Ⅰ）利用 $T_1(P)=a_1+b_1$，$T_k(P)=b_k+\max\{T_{k-1}(P),\ a_1+a_2+\ldots+a_k\}$（$2\leqslant k\leqslant n$），可求 $T_1(P)$，$T_2(P)$ 的值；

（Ⅱ）$T_2(P)=\max\{a+b+d,\ a+c+d\}$，$T_2(P')=\max\{c+d+b,\ c+a+b\}$，分类讨论，利用新定义，可比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小；

（Ⅲ）根据新定义，可得结论．

【解答】解：（Ⅰ）$T_1(P)=2+5=7$，$T_2(P)=1+\max\{T_1(P),\ 2+4\}=1+\max\{7,\ 6\}=8$；

（Ⅱ）$T_2(P)=\max\{a+b+d,\ a+c+d\}$，$T_2(P')=\max\{c+d+b,\ c+a+b\}$．

当 m=a 时，$T_2(P')=\max\{c+d+b,\ c+a+b\}=c+d+b$，

∵$a+b+d\leqslant c+d+b$，且 $a+c+d\leqslant c+b+d$，∴$T_2(P)\leqslant T_2(P')$；

当 m=d 时，$T_2(P')=\max\{c+d+b,\ c+a+b\}=c+a+b$，

∵$a+b+d\leqslant c+a+b$，且 $a+c+d\leqslant c+a+d$，∴$T_2(P)\leqslant T_2(P')$；

∴无论 m=a 和 m=d，$T_2(P)\leqslant T_2(P')$；

（Ⅲ）根据数对序列（4，6），（11，11），（16，11），（11，8），（5，2），

可得 T_1（P）=4+6=10； T_2（P）=11+15=26； T_3（P）=31+11=42； T_4（P）=8+42=50；

T_5（P）=2+50=52；

逐一检验可得，此数对序列使 T_5（P）最小.

【点评】本题考查新定义，考查学生分析解决问题的能力，正确理解与运用新定义是解题的关键，属于难题.