2009年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

理科数学

第I卷

本试卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A，B 相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：

1. 设集合 $S=\{x\,|\,|x|<5\}, T=\{x\,|\,x^2+4x-21<0\}$，则 $S\cap T=$

A. $\{x\,|\,-7<x<-5\}$　B. $\{x\,|\,3<x<5\}$　C. $\{x\,|\,-5<x<3\}$　D. $\{x\,|\,-7<x<5\}$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a+\log_2 x(\text{当}x\geq 2\text{时}) \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}(\text{当}x<2\text{时}) \end{cases}$ 在点$x=2$处连续，则常数 a 的值是

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

3. 复数 $\frac{(1+2i)^2}{3-4i}$ 的值是

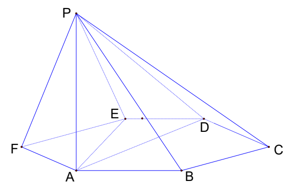
A. －1　B. 1　C. －i　D. i

4. 已知函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})(x\in R)$，下面结论错误的是

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π　B. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

C. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=0$ 对称　D. 函数 $f(x)$ 是奇函数

5.如图，已知六棱锥$P-ABCDEF$的底面是正六边形，$PA\perp$平面$ABC, PA=2AB$，则下列结论正确的是



A. $PB\perp AD$　　　　B.平面$PAB\perp$平面PBC

C. 直线BC // 平面PAE　　　　D.直线PD与平面ABC所成的角为45°

6.已知a,b,c,d为实数，且$c>d$。则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的

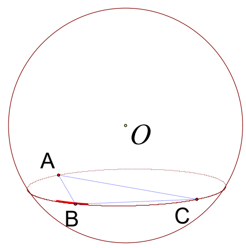
A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

7.已知双曲线$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，其一条渐近线方程为$y=x$，点$P(\sqrt{3},y_0)$在该双曲线上，则$\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=$

A. -12　　　　B. -2　　　　C .0　　　　D. 4

8.如图，在半径为 3 的球面上有A,B,C三点，$\angle ABC=90^{\circ}, BA=BC$，球心$O$到平面$ABC$的距离是$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，则$B$、$C$两点的球面距离是



A. $\dfrac{\pi}{3}$　　　　B. π　　　　C. $\dfrac{4\pi}{3}$　　　　D. 2π

9.已知直线$l_1: 4x-3y+6=0$和直线$l_2: x=-1$，抛物线$y^2=4x$上一动点P到直线l_1和直线l_2的距离之和的最小值是

A.2　　　　B.3　　　　C. $\dfrac{11}{5}$　　　　D. $\dfrac{37}{16}$

10.某企业生产甲、乙两种产品，已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨；生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨。销售每吨甲产品可获得利润 5 万元，每吨乙产品可获得利润 3 万元，该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨，B 原料不超过 18 吨，那么该企业可获得最大利润是

A. 12 万元　　　　B. 20 万元　　　　C. 25 万元　　　　D. 27 万元

11.3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排，若男生甲不站两端，3 位女生中有且只有两位女生相邻，则不同排法的种数是

A. 360　　　　B. 228　　　　C. 216　　　　D. 96

12.已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$，则 $f(f(\frac{5}{2}))$ 的值是

A.0　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.$\frac{5}{2}$

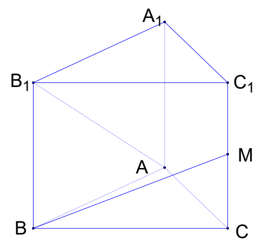
第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

13.$(2x-\frac{1}{2x})^6$ 的展开式的常数项是________________（用数字作答）

14.若⊙ $O_1: x^2+y^2=5$ 与⊙ $O_2: (x-m)^2+y^2=20(m\in R)$ 相交于 A、B 两点，且两圆在点 A 处的切线互相垂直，则线段 AB 的长度是__________

15.如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等，M 是侧　棱 CC_1 的中点，则异面直线 AB_1和BM 所成的角的大小是__________。



16．设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合，对于映射 $f:V\to V, a\in V$，记 a 的象为 $f(a)$。若映射 $f:V\to V$ 满足：对所有 $a,b\in V$ 及任意实数 λ,μ 都有 $f(\lambda a+\mu b)=\lambda f(a)+\mu f(b)$，则 f 称为平面 M 上的线性变换。现有下列命题：

①设 f 是平面 M 上的线性变换，则 $f(0)=0$

②对 $a\in V$, 设$f(a)=2a$，则 f 是平面 M 上的线性变换；

③若 e 是平面 M 上的单位向量，对 $a\in V$, 设$f(a)=a-e$，则 f 是平面 M 上的线性变换；

④设 f 是平面 M 上的线性变换，$a,b\in V$，若 a,b 共线，则 $f(a), f(b)$ 也共线。

其中真命题是____________________（写出所有真命题的序号）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，A,B 为锐角，角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，且 $\cos 2A=\frac{3}{5},\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$

（I）求 $A+B$ 的值；

（II）若 $a+b=\sqrt{2}-1$，求 a,b,c 的值。

18. （本小题满分 12 分）

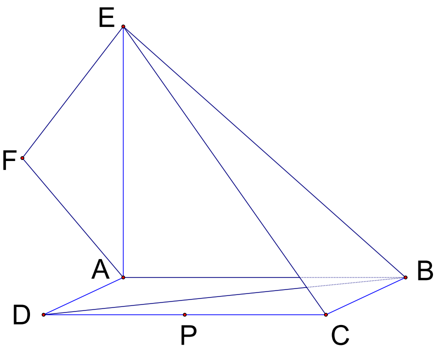
为振兴旅游业，四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡，向省外人士发行的是熊猫金卡（简称金卡），向省内人士发行的是熊猫银卡（简称银卡）。某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游，其中 $\frac{3}{4}$ 是省外游客，其余是省内游客。在省外游客中有 $\frac{1}{3}$ 持金卡，在省内游客中有 $\frac{2}{3}$ 持银卡。

（I）在该团中随机采访 3 名游客，求恰有 1 人持金卡且持银卡者少于 2 人的概率；

（II）在该团的省内游客中随机采访 3 名游客，设其中持银卡人数为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$。

19（本小题满分 12 分）

如图，正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直，△ ABE 是等腰直角三角形，$AB=AE,FA=FE,\angle AEF=45^{\circ}$



（I）求证：$EF\perp$ 平面BCE；

（II）设线段 CD 的中点为 P，在直线 AE 上是否存在一点 M，使得 $PM\parallel$ 平面BCE？若存在，请指出点 M 的位置，并证明你的结论；若不存在，请说明理由；

（III）求二面角 $F-BD-A$ 的大小。

20（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线方程为 $x=2$。

（I）求椭圆的标准方程；

（II）过点 F_1 的直线 l 与该椭圆交于 M,N 两点，且 $\left|\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}\right|=\frac{2\sqrt{26}}{3}$，求直线 l 的方程。

21. （本小题满分 12 分）

已知 $a>0,$且$a\neq 1$函数 $f(x)=\log_a(1-a^x)$ 。

（I）求函数 $f(x)$ 的定义域，并判断 $f(x)$ 的单调性；

（II）若 $n\in N^*,$求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{f(n)}}{a^n+a};$

（III）当 $a=e$（ e 为自然对数的底数）时，设 $h(x)=(1-e^{f(x)})(x^2-m+1)$ ，若函数 $h(x)$ 的极值存在，求实数 m 的取值范围以及函数 $h(x)$ 的极值。

22. （本小题满分 14 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，对任意的正整数 n ，都有 $a_n=5S_n+1$ 成立，记 $b_n=\dfrac{4+a_n}{1-a_n}(n\in N^*)$ 。

（I）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（II）记 $c_n=b_{2n}-b_{2n-1}(n\in N^*)$ ，设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证：对任意正整数 n 都有 $T_n<\dfrac{3}{2}$ ；

（III）设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n 。已知正实数 λ 满足：对任意正整数 $n,R_n\leq\lambda n$ 恒成立，求 λ 的最小值。

2009 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

理科数学参考答案

（1） C　（2） B　(3) A　(4) D　(5) D　(6) B

(7) C　(8) B　(9) A　（10）D　(11) B　(12) A

（13） -20　（14）4　（15）90°　（16）①②③

1.设集合 $S=\{x\,|\,|x|<5\},T=\{x\,|\,x^2+4x-21<0\}$，则 $S\bigcap T=$

A.$\{x\,|-7<x<-5\}$　B.$\{x\,|\,3<x<5\}$　C.$\{x\,|-5<x<3\}$　D.$\{x\,|-7<x<5\}$

【考点定位】本小题考查解含有绝对值的不等式、一元二次不等式，考查集合的运算，基础题。

解析：由题 $\boldsymbol{S=(-5,5),T=(-7,3)}$，故选择 C。

2.已知函数 $f(x)=\begin{cases} a+\log_2 x(当x\geq 2时) \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}(当x<2时) \end{cases}$ 在点$x=2$处连续，则常数 a 的值是

A.2　B.3　C.4　D.5

【考点定位】本小题考查函数的连续性，考查分段函数，基础题。

解析：由题得 $\boldsymbol{a+\log^2 2=2+2\Rightarrow a=3}$，故选择 B。

3.复数 $\dfrac{(1+2i)^2}{3-4i}$ 的值是

A.－1　B.1　C.－i　D.i

【考点定位】本小题考查复数的运算，基础题。

解析：$\boldsymbol{\dfrac{(1+2i)^2}{3-4i}=\dfrac{(4i-3)(3+4i)}{25}=\dfrac{-16-9}{25}=-1}$，故选择 A。

4.已知函数 $f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})(x\in R)$，下面结论错误的是

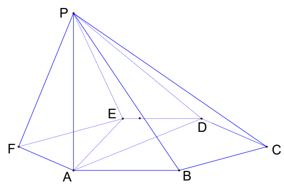
A.函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π　B.函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

C.函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=0$ 对称　D.函数 $f(x)$ 是奇函数

【考点定位】本小题考查诱导公式、三角函数的奇偶性、周期、单调性等，基础题。（同文 4）

解：$\boldsymbol{f(x)=-\cos x}$，其中 A、C 显然正确，故选择 D。

5.如图，已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面是正六边形，$PA\perp 平面ABC,PA=2AB$，则下列结论正确的是



A.$PB\perp AD$　B.平面 $PAB\perp$ 平面PBC

、C. 直线 BC // 平面 PAE

D.直线PD与平面ABC所成的角为45°

【考点定位】本小题考查空间里的线线、线面关系，基础题。（同文 6）

解：由三垂线定理，因 AD 与 AB 不相互垂直，排除 A；作 $\boldsymbol{AG\perp PB}$ 于 $\boldsymbol{G}$，因面 $\boldsymbol{PAB\perp}$ 面 ABCDEF，而 AG 在面 ABCDEF 上的射影在 AB 上，而 AB 与 BC 不相互垂直，故排除 B；由 $\boldsymbol{BC//EF}$，而 EF 是平面 PAE 的斜线，故排除 C，故选择 D。

6.已知a,b,c,d为实数，且$c>d$。则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的

A. 充分而不必要条件　　　　　B. 必要而不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

【考点定位】本小题考查不等式的性质、简单逻辑，基础题。(同文 7)

解析：$\boldsymbol{a>b}$推不出$a-c>b-d$；但$\boldsymbol{a-c>b-d\Rightarrow a>b+c-d>b}$，故选择 B。

7.已知双曲线$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，其一条渐近线方程为$y=x$，点$P(\sqrt{3},y_0)$在该双曲线上，则$\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=$

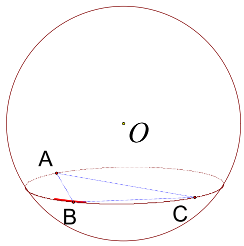
A. -12　　　　B. -2　　　　C .0　　　　D. 4

【考点定位】本小题考查双曲线的渐近线方程、双曲线的定义，基础题。(同文 8)

解析：由题知$\boldsymbol{b^2=2}$，故$\boldsymbol{y_0=\pm\sqrt{3-2}=\pm1, F_1(-2,0), F_2(2,0)}$，

$\boldsymbol{\therefore \overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=(-2-\sqrt{3},\pm1)\bullet(2-\sqrt{3},\pm1)=3-4+1=0}$，故选择 C。

8.如图，在半径为 3 的球面上有A,B,C三点，$\angle ABC=90^\circ, BA=BC$，球心$O$到平面$ABC$的距离是$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则$B$、$C$两点的球面距离是



A. $\frac{\pi}{3}$　　　　B. π　　　　C. $\frac{4\pi}{3}$　　　　D. 2π

【考点定位】本小题考查球的截面圆性质、球面距，基础题。(同文 9)

解析：由知截面圆的半径

$\boldsymbol{r=\sqrt{9-\frac{18}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow BC=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot3\sqrt{2}=3}$，故$\boldsymbol{\angle BOC=\frac{\pi}{3}}$，所以$B$、$C$两点的球面距离为$\boldsymbol{3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi}$，故选择 B。

9.已知直线$l_1:4x-3y+6=0$和直线$l_2:x=-1$，抛物线$y^2=4x$上一动点P到直线l_1和直线l_2的距离之和的最小值是

A.2　　　　B.3　　　　C. $\frac{11}{5}$　　　　D. $\frac{37}{16}$

【考点定位】本小题考查抛物线的定义、点到直线的距离，综合题。

解析：直线$l_2:x=-1$为抛物线$y^2=4x$的准线，由抛物线的定义知，P 到$\boldsymbol{l_2}$的距离等于 P 到抛物线的焦点$\boldsymbol{F(1,0)}$的距离，故本题化为在抛物线$y^2=4x$上找一个点P使得P到点$\boldsymbol{F(1,0)}$和直线l_2的距离之和最小，最小值为$\boldsymbol{F(1,0)}$到直线$l_1:4x-3y+6=0$的距离，即$\boldsymbol{d_{\min}=\frac{|4-0+6|}{5}=2}$，故选择 A。

10.某企业生产甲、乙两种产品，已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨；生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨。销售每吨甲产品可获得利润 5 万元，每吨乙产品可获得利润 3 万元，该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨，B 原料不超过 18 吨，那么该企业可获得最大利润是

A. 12 万元　　　　B. 20 万元　　　　C. 25 万元　　　　D. 27 万元

【考点定位】本小题考查简单的线性规划，基础题。(同文 10)

解析：设甲、乙种两种产品各需生产$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$吨，可使利润$\boldsymbol{z}$最大，故本题即

已知约束条件$\begin{cases}3x+y\le 13\\2x+3y\le 18\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$，求目标函数$z=5x+3y$的最大值，可求出最优解为$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，故$z_{\max}=15+12=27$，故选择D。

11.3位男生和3位女生共6位同学站成一排，若男生甲不站两端，3位女生中有且只有两位女生相邻，则不同排法的种数是

A. 360　　B. 228　　C. 216　　D. 96

【考点定位】本小题考查排列综合问题，基础题。

解析：6位同学站成一排，3位女生中有且只有两位女生相邻的排法有$A_3^3C_3^2A_4^2A_2^2=332$种，其中男生甲站两端的有$A_2^1A_2^2C_3^2A_3^2A_2^2=144$，符合条件的排法故共有

12.已知函数$f(x)$是定义在实数集R上的不恒为零的偶函数，且对任意实数x都有$xf(x+1)=(1+x)f(x)$，则$f(f(\frac{5}{2}))$的值是

A.0　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.$\frac{5}{2}$

【考点定位】本小题考查求抽象函数的函数值之赋值法，综合题。（同文12）

解析：令$x=-\frac{1}{2}$，则$-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})\Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$；令$x=0$，则$f(0)=0$

由$xf(x+1)=(1+x)f(x)$得$f(x+1)=\frac{x+1}{x}f(x)$，所以

$$f(\frac{5}{2})=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}f(\frac{1}{2})=0\Rightarrow f(f(\frac{5}{2}))=f(0)=0$$，故选择A。

13.$(2x-\frac{1}{2x})^6$的展开式的常数项是________________（用数字作答）

【考点定位】本小题考查二项式展开式的特殊项，基础题。（同文13）

解析：由题知$(2x-\frac{1}{2x})^6$的通项为$T_{r+1}=(-1)^rC_6^r2^{6-2r}x^{6-2r}$，令$6-2r=0$得$r=3$，故常数项为$(-1)^3C_6^3=-20$。

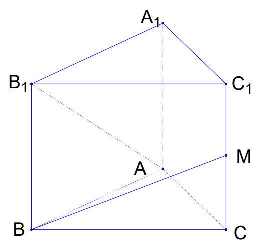
14.若$\odot O_1:x^2+y^2=5$与$\odot O_2:(x-m)^2+y^2=20(m\in R)$相交于A、B两点，且两圆在点A处的切线互相垂直，则线段AB的长度是___________

【考点定位】本小题考查圆的标准方程、两直线的位置关系等知识，综合题。

解析：由题知$O_1(0,0),O_2(m,0)$，且$\sqrt{5}<|m|<3\sqrt{5}$，又$O_1A\perp AO_2$，所以有

$$m^2=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=25\Rightarrow m=\pm 5，\therefore AB=2\cdot\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}{5}=4。$$

15.如图，已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的各条棱长都相等，M是侧棱CC_1的中点，则异面直线$AB_1和BM$所成的角的大小是__________________。



【考点定位】本小题考查异面直线的夹角，基础题。

解析：不妨设棱长为 2，选择基向量$\{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC}\}$，则

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$$

$$\cos<\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BM}>=\frac{(\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA})\bullet(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1})}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{0-2+2+0}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=0$$，故填写90^o。

法 2：取 BC 中点 N，连结B_1N，则$AN\perp$面B_1C，$\therefore B_1N$是AB_1在面B_1C上的射影，由几何知识知$B_1N\perp BM$，由三垂线定理得$AB_1\perp BM$，故填写90^o。

16．设V是已知平面M上所有向量的集合，对于映射$f:V\to V,\vec{a}\in V$，记$\vec{a}$的象为$f(\vec{a})$。若映射$f:V\to V$满足：对所有$\vec{a},\vec{b}\in V$及任意实数λ,μ都有$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})$，则$f$称为平面$M$上的线性变换。现有下列命题：

①设f是平面M上的线性变换，则$f(\vec{0})=\vec{0}$

②对$\vec{a}\in V$设$f(\vec{a})=2\vec{a}$，则f是平面M上的线性变换；

③若$\vec{e}$是平面M上的单位向量，对$\vec{a}\in V$设$f(\vec{a})=\vec{a}-\vec{e}$，则$f$是平面$M$上的线性变换；

④设f是平面M上的线性变换，$\vec{a},\vec{b}\in V$，若$\vec{a},\vec{b}$共线，则$f(\vec{a}),f(\vec{b})$也共线。

其中真命题是____________________（写出所有真命题的序号）

【考点定位】本小题考查新定义，创新题。

解析：令$\vec{a}=\vec{b}=\vec{0},\lambda=\mu=1$，由题有$f(\vec{0})=2f(\vec{0})\Rightarrow f(\vec{0})=\vec{0}$，故①正确；

由题$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=2(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})$，$\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})=2\lambda\vec{a}+2\mu\vec{b}=2(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})$，即$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})$，故②正确；

由题$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}-\vec{e}$，$\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})=\lambda\vec{a}-\vec{e}+\mu\vec{b}-\vec{e}$，即$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\neq\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})$，故③不正确；

由题$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，$f(\vec{0})=f(\vec{a}-\lambda\vec{b})=f(\vec{a})-\lambda f(\vec{b})=\vec{0}\Rightarrow f(\vec{a})=\lambda f(\vec{b})$，即$f(\vec{a}),f(\vec{b})$也共线，故④正确；

三、解答题

（17）本小题主要考查同角三角函数间的关系，两角和差的三角函数、二倍角公式、正弦定理等基础知识及基本运算能力。

解：（Ⅰ）$\because A$、B为锐角，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\therefore\cos B=\sqrt{1-\sin^2 b}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

又$\cos 2A=1-2\sin^2 A=\frac{3}{5}$，

$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$$\therefore\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\because 0 < A + B < \pi$

$\therefore A + B = \dfrac{\pi}{4}$ ……………………………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $C = \dfrac{3\pi}{4}, \therefore \sin C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ 得

$\sqrt{5}a = \sqrt{10}b = \sqrt{2}c$，即 $a = \sqrt{2}b$，$c = \sqrt{5}b$

Q $a - b = \sqrt{2} - 1$，

$\therefore \sqrt{2}b - b = \sqrt{2} - 1$，$\therefore b = 1$

$\therefore a = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$ ……………………………………………12 分

（18）本小题主要考察相互独立事件、互斥事件、随机变量的分布列、数学期望等概率计算，考察运用概率只是解决实际问题的能力。

解：（Ⅰ）由题意得，省外游客有 27 人，其中 9 人持金卡；省内游客有 9 人，其中 6 人持银卡。设事件 B 为“采访该团 3 人中，恰有 1 人持金卡且持银卡者少于 2 人”，

事件 A_1 为“采访该团 3 人中，1 人持金卡，0 人持银卡”，

事件 A_2 为“采访该团 3 人中，1 人持金卡，1 人持银卡”。

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$= \frac{C_9^1 C_{21}^2}{C_{36}^3} + \frac{C_9^1 C_6^1 C_{21}^1}{C_{36}^3}$$

$$= \frac{9}{34} + \frac{27}{170}$$

$$= \frac{36}{85}$$

所以在该团中随机采访 3 人，恰有 1 人持金卡且持银卡者少于 2 人的概率是 $\dfrac{36}{85}$。

……………………………………………………………6 分

（Ⅱ）ξ 的可能取值为 0，1，2，3

$P(\xi = 0) = \dfrac{C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{1}{84}$， $P(\xi = 1) = \dfrac{C_6^1 C_3^2}{C_9^3} = \dfrac{3}{14}$

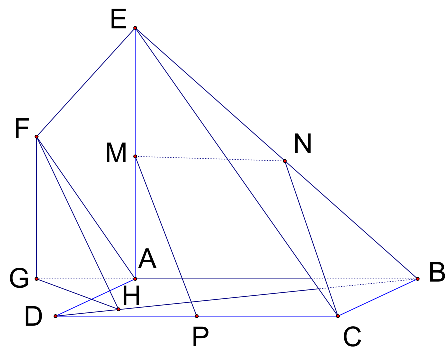
$P(\xi = 2) = \dfrac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} = \dfrac{15}{28}$，$P(\xi = 3) = \dfrac{C_6^3}{C_9^3} = \dfrac{15}{21}$，

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{21}$

所以$E\xi=0\times\frac{1}{84}+1\times\frac{3}{14}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{21}=2$， ························12 分

（19）本小题主要考察平面与平面垂直、直线与平面垂直、直线与平面平行、二面角等基础知识，考察空间想象能力、逻辑推理能力和数学探究意识，考察应用向量知识解决数学问题的能力。



解法一：

（Ⅰ）因为平面$ABEF\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，

平面$ABEF\bigcap$平面$ABCD=AB$，

所以$BC\perp$平面$ABEF$

所以$BC\perp EF$.

因为ΔABE为等腰直角三角形，$AB=AE$，

所以$\angle AEB=45^\circ$

又因为$\angle AEF=45^\circ$，

所以$\angle FEB=45^\circ+45^\circ=90^\circ$，

即$EF\perp BE=B$，

所以$EF\perp$平面BCE。 ·······································4 分

（Ⅱ）存在点M，当M为线段AE的中点时，$PM//$平面BCE

取 BE 的中点 N，连接 AN,MN，则 MN$//=\frac{1}{2}AB$ $//=$PC

所以 PMNC 为平行四边形，所以 PM//CN

因为 CN 在平面 BCE 内，PM 不在平面 BCE 内，

所以 PM//平面 BCE ·······································8 分

（Ⅲ）由 EA⊥AB, 平面 ABEF⊥平面 ABCD，易知，EA⊥平面 ABCD

作 FG⊥AB, 交 BA 的延长线于 G，则 FG//EA。从而，FG⊥平面 ABCD

作 GH⊥BD 于 G，连结 FH，则由三垂线定理知，BD⊥FH

因此，∠AEF 为二面角 F-BD-A 的平面角

因为 FA=FE，∠AEF=45°，

所以∠AFE=90°，∠FAG=45°.

设 AB=1, 则 AE=1, AF=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$FG=AF \cdot \sin FAG=\frac{1}{2}$

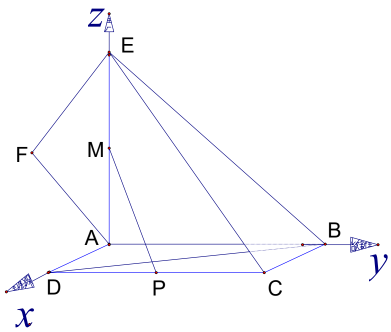
在 Rt△FGH 中，∠GBH=45°，$BG=AB+AG=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

$GH=BG \cdot \sin GBH=\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

在 Rt△FGH 中，$\tan FHG=\frac{FG}{GH}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

故二面角 F-BD-A 的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………12 分

解法二:



(Ⅰ)因为△ABE 为等腰直角三角形, AB=AE,

所以 AE⊥AB.

又因为平面 ABEF⊥平面 ABCD, AE⊂平面 ABEF,

平面 ABEF∩平面 ABCD=AB,

所以 AE⊥平面 ABCD.

所以 AE⊥AD.

因此, AD, AB, AE 两两垂直, 以 A 为坐标原点, 建立 如图所示的直角坐标系 A-xyz.

设 AB=1,则 AE=1，B（0，1，0），D(1, 0, 0)，E(0, 0, 1), C(1, 1, 0).

因为 FA=FE, ∠AEF = 45°，

所以∠AFE= 90°.

从而，$F(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

所以 $\overrightarrow{EF}=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{BE}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{BC}=(1,0,0)$.

$\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{BE}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, $\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{BC}=0$.

所以 EF⊥BE, EF⊥BC.

因为 BE⊂平面 BCE,BC∩BE=B，

所以 EF⊥平面 BCE.

(Ⅱ)存在点 M, 当 M 为 AE 中点时, PM∥平面 BCE.

$M(0,0,\frac{1}{2})$，　$P(1,\frac{1}{2},0)$.

从而 $\overrightarrow{PM}=(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

于是 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{EF}=(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cdot (0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=0$

所以 PM⊥FE, 又 EF⊥平面 BCE，直线 PM 不在平面 BCE 内，

故 PMM∥平面 BCE. ……………………………………8 分

(III) 设平面 BDF 的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}$，并设$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$．

$\overrightarrow{BD}=(1,-1,0)$，　　　　　　　　　　$\overrightarrow{BF}=(0,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}\qquad 即\ \begin{cases}x-y=0\\ -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$$

取 y=1，则 x=1，z=3。从而$\overrightarrow{n_1}=(1,1,3)$。

取平面 ABD 的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$。

$$\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3}{\sqrt{11}\cdot 1}=\frac{3\sqrt{11}}{11}。$$

故二面角 F—BD—A 的大小为 $\arccos\frac{3\sqrt{11}}{11}$。…………………………………………12 分

（20）本小题主要考查直线、椭圆、平面向量等基础知识，以及综合运用数学知识解决问题及推理运算能力。

解：（Ⅰ）有条件有 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{a^2}{c}=2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{2}$，c=1。

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=1$。

所以，所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$。……………………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$。

若直线 l 的斜率不存在，则直线 l 的方程为 x=−1.

将 x=−1 代入椭圆方程得 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。

不妨设 $M(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$、$N(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$\therefore \overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}=(-2,\frac{\sqrt{2}}{2})+(-2,-\frac{\sqrt{2}}{2})=(-4,0)$.

$\therefore \left|\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}\right|=4$，与题设矛盾。

$\therefore$ 直线 l 的斜率存在。

设直线 l 的斜率为 k，则直线的方程为 y=k（x+1）。

设 $M(x_1, y_1)$、$N(x_2, y_2)$，

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1 \\ y=k(x+1) \end{cases}$，消 y 得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$。

由根与系数的关系知 $x_1+x_2=\frac{-4k^2}{1+2k^2}$，从而 $y_1+y_2=k(x_1+x_2+2)=\frac{2k}{1+2k^2}$，

又$\because \overline{F_2M}=(x_1-1, y_1)$，$\overline{F_2N}=(x_2-1, y_2)$，

$\therefore \overline{F_2M}+\overline{F_2N}=(x_1+x_2-2, y_1+y_2)$。

$$\therefore \left|\overline{F_2M}+\overline{F_2N}\right|^2=(x_1+x_2-2)^2+(y_1+y_2)^2$$

$$=(\frac{8k^2+2}{1+2k^2})^2+(\frac{2k}{1+2k^2})^2$$

$$=\frac{4(16k^4+9k^2+1)}{4k^4+4k^2+1}$$

$\therefore \frac{4(16k^4+9k^2+1)}{4k^4+4k^2+1}=(\frac{2\sqrt{26}}{3})^2$。

化简得 $40k^4-23k^2-17=0$，解得 $k^2=1$或者$k^2=-\frac{17}{40}$

$\therefore k=\pm 1.$

$\therefore$ 所求直线l的方程为$y=x+1$或者$y=-x-1$

（21）本小题主要考查函数、数列的极限、导数应用等基础知识、考查分类整合思想、推理和运算能力。

解：（Ⅰ）由题意知$1-a^x>0$

当$0<a<1$时，$f(x)$的定义域是（$0,+\infty$）；当$a>1$时，$f(x)$的定义域是（$-\infty,0$）

$$f'(x)=\frac{-a^x\ln a}{1-a^x}\cdot\log_a e=\frac{a^x}{a^x-1}$$

当$0<a<1$时，$x\in(0,+\infty)$.因为$a^x-1<0, a^x>0$，故$f'(x)<0$，所以$f(x)$是减函数

当$a>1$时，$x\in(-\infty,0)$，因为$a^x-1<0, a^x>0$，故$f'(x)<0$，所以$f(x)$是减函数 ....（4 分）

（Ⅱ）因为 $f(n)=\log_a(1-a^n)$,所以$a^{f(n)}=1-a^n$

由函数定义域知$1-a^n$>0,因为 n 是正整数，故 0<a<1.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{f(n)}}{a^n+a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{a^n+a}=\dfrac{1}{a}$

（Ⅲ）$h(x)=e^x(x^2-m+1)(x<0)$,所以$h'(x)=e^x(x^2+2x-m+1)$

令 $h'(x)=0$,即$x^2+2x-m+1=0$,由题意应有$\Delta\geq 0$，即$m\geq 0$

① 当 m=0 时，$h'(x)=0$ 有实根 $x=-1$，在 $x=-1$ 点左右两侧均有 $h'(x)>0$ 故无极值

② 当 $0<m<1$ 时，$h'(x)=0$ 有两个实根 $x_1=-1-\sqrt{m},x_2=-1+\sqrt{m}$

当 x 变化时，$h'(x)$、$h(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,0)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$\therefore h(x)$ 的极大值为 $2e^{-1-\sqrt{m}}(1+\sqrt{m})$，$h(x)$ 的极小值为 $2e^{-1+\sqrt{m}}(1-\sqrt{m})$

③ 当 $m\geq 1$ 时，$h'(x)=0$ 在定义域内有一个实根，$x=-1-\sqrt{m}$

同上可得 $h(x)$ 的极大值为 $2e^{-1-\sqrt{m}}(1+\sqrt{m})$

综上所述，m∈$(0,+\infty)$时，函数 $h(x)$ 有极值；

当 $0<m<1$ 时 $h(x)$ 的极大值为 $2e^{-1-\sqrt{m}}(1+\sqrt{m})$，$h(x)$ 的极小值为 $2e^{-1+\sqrt{m}}(1-\sqrt{m})$

当 $m\geq 1$ 时，$h(x)$ 的极大值为 $2e^{-1-\sqrt{m}}(1+\sqrt{m})$

（22）本小题主要考查数列、不等式等基础知识、考查化归思想、分类整合思想，以及推理论证、分析与解决问题的能力。

解：（Ⅰ）当 $n=1$ 时，$a_1=5a_1+1,\therefore a_1=-\dfrac{1}{4}$

又 Q $a_n=5a_n+1,a_{n+1}=5a_{n+1}+1$

$\therefore a_{n+1}-a_n=5a_{n+1}$,即$a_{n+1}=-\dfrac{1}{4}a_n$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，其首项 $a_1=-\dfrac{1}{4}$，公比是 $q=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore a_n=(-\dfrac{1}{4})^n$

$\therefore b_n=\dfrac{4+(-\dfrac{1}{4})^n}{1-(-\dfrac{1}{4})^n}$ ……………………………………..3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b_n=4+\dfrac{5}{(-4)^n-1}$

$$\therefore c_n=b_{2n}-b_{2n-1}=\frac{5}{4^{2n}-1}+\frac{5}{4^{2n-1}+1}=\frac{25\times16^n}{(16^n-1)(16^n+4)}$$

$$=\frac{25\times16^n}{(16^n)^2+3\times16^n-4)}<\frac{25\times16^n}{(16^n)^2}=\frac{25}{16^n}$$

又 $b_1=3,b_2=\dfrac{13}{3},\therefore c_1=\dfrac{4}{3}$

当 $n=1$ 时，$T_1<\dfrac{3}{2}$

当 $n\geq2$ 时，$T_n<\dfrac{4}{3}+25\times(\dfrac{1}{16^2}+\dfrac{1}{16^3}+\cdots+\dfrac{1}{16^n})$

$$=\frac{4}{3}+25\times\frac{\frac{1}{16^2}\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{16}}<\frac{4}{3}+25\times\frac{\frac{1}{16^2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{69}{48}<\frac{3}{2}.$$

（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $b_n=4+\dfrac{5}{(-4)^n-1}$

一方面，已知 $R_n\leq\lambda n$ 恒成立，取 n 为大于 1 的奇数时，设 $n=2k+1(k\in N^*)$

则 $R_n=b_1+b_2+\cdots+b_{2k+1}$

$$=4n+5\times(-\frac{1}{4^1+1}+\frac{1}{4^2-1}-\frac{1}{4^3+1}+\cdots\cdots-\frac{1}{4^{2k+1}+1})$$

$$=4n+5\times[-\frac{1}{4^1+1}+(\frac{1}{4^2-1}-\frac{1}{4^3+1})+\cdots\cdots+(\frac{1}{4^{2k}-1}-\frac{1}{4^{2k+1}+1})]$$

$$>4n-1$$

$\therefore \lambda n\geq R_n>4n-1,$ 即（$\lambda-4$）$n>-1$ 对一切大于 1 的奇数 n 恒成立

$\therefore \lambda\geq4,$ 否则，（$\lambda-4$）$n>-1$ 只对满足 $n<\dfrac{1}{4-\lambda}$ 的正奇数 n 成立，矛盾。

另一方面，当$\lambda=4$时，对一切的正整数 n 都有$R_n\le 4n$

事实上，对任意的正整数 k，

$$\because b_{2k-1}+b_{2k}=8+\frac{5}{(-\frac{1}{4})^{2k-1}-1}+\frac{5}{(-4)^{2k}-1}$$

$$=8+\frac{5}{16^k-1}-\frac{20}{16^k+4}$$

$$=8-\frac{15\times16^k-40}{(16^k-1)(16^k+4)}<8$$

$\therefore$当 n 为偶数时，设$n=2m(m\in N^*)$

则$R_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2m-1}+b_{2m})$

$<8m=4n$

当 n 为奇数时，设$n=2m-1(m\in N^*)$

则$R_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2m-3}+b_{2m-2})+b_{2m-1}$

$<8(m-1)+4=8m-4=4n$

$\therefore$对一切的正整数 n，都有$R_n\le 4n$

综上所述，正实数λ的最小值为 4…………………………14 分