2002年广东高考数学真题及答案

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)1. 不等式$\frac{x-1}{x-3}>0$的解集为

A. $\{x\mid x<1\}$　　B. $\{x\mid x>3\}$　　C. $\{x\mid x<1$或$x>3\}$　　D. $\{x\mid 1<x<3\}$

2. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个圆锥的全面积是

A. 3π　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. 6π　　D. 9π

3. 极坐标方程$\rho^2\cos 2\theta=1$所表示的曲线是

A. 两条相交直线　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 双曲线

4. 若定义在区间$(-1,0)$内的函数$f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足$f(x)>0$，则a的取值范围是

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $(\frac{1}{2},+\infty)$　D. $(0,+\infty)$

5. 已知复数$z=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$，则$\arg\frac{1}{Z}$是

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{5\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{11\pi}{6}$

6. 函数$y=2^{-x}+1$ $(x>0)$的反函数是

A. $y=\log_2\frac{1}{x-1}$，$x\in(1,2)$；　B. $y=-\log_2\frac{1}{x-1}$，$x\in(1,2)$

C. $y=\log_2\frac{1}{x-1}$，$x\in(1,2)$；　D. $y=-\log_2\frac{1}{x-1}$，$x\in(1,2]$

7. 若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $ab<1$　　D. $ab>2$

8. 在正三棱柱$ABC—A_1B_1C_1$中，若$AB=\sqrt{2}BB_1$，则AB_1与C_1B所成的角的大小为

A. 60°　　B. 90°　　C. 45°　　D. 120°

9. 设$f(x)$、$g(x)$都是单调函数，有如下四个命题

①若$f(x)$单调递增，$g(x)$单调递增，则$f(x)-g(x)$单调递增；

②若$f(x)$单调递增，$g(x)$单调递减，则$f(x)-g(x)$单调递增；

③若$f(x)$单调递减，$g(x)$单调递增，则$f(x)-g(x)$单调递减；

④若$f(x)$单调递减，$g(x)$单调递减，则$f(x)-g(x)$单调递减其中，正确的命题是

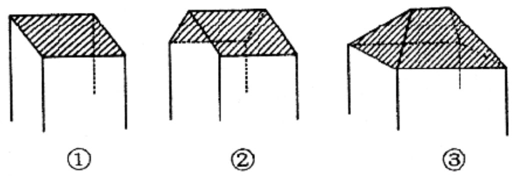
A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

10. 对于抛物线$y^2=4x$上任意一点Q，点$P(a,0)$都满足$|PQ|\geq|a|$，则a的取值

范围是

A.（$-\infty$，0）　B.（$-\infty$，2）　C.［0，2］　D.（0，2）

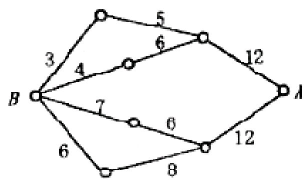
11．一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法：①单向倾斜；②双向倾斜；③四向倾斜 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1、P_2、P_3. 若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α，则



A．$P_3>P_2>P_1$　　B．$P_3>P_2=P_1$

C．$P_3=P_2>P_1$　　D．$P_3=P_2=P_1$

12．如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联．连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量．现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递．则单位时间内传递的最大信息量为



A．26　　B．24　　C．20　　D．19

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上)

13. 已知甲、乙两组各有 8 人，现从每组抽取 4 人进行计算机知识竞赛，比赛人员的组共有　　种可能(用数字作答).

14．双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1、F_2，点 P 在双曲线上，若 $PF_1\perp PF_2$，则点 P 到 x 轴的距离为_______.

15．设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和．若 $\{S_n\}$ 是等差数列，则 q =_______.

16．圆周上有 $2n$ 个等分点($n>1$)，以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分 10 分)

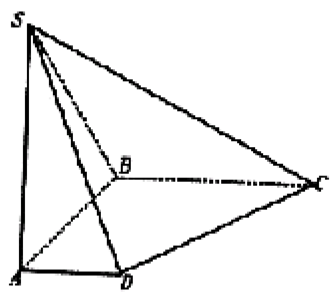
求函数 $y=(\sin x+\cos x)^2+2\cos^2 x$ 的最小正周期.

18．(本小题满分 12 分)

已知等差数列前三项为 a，4，$3a$，前 n 项的和为 S_n，$S_k=2550$．

(Ⅰ)求 a 及 k 的值；

(Ⅱ)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}\right)$



19．(本小题满分 12 分)

如图，在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中，

$\angle ABC=90°$，$SA\perp$面 $ABCD$，

$SA=AB=BC=1$，$AD=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅰ)求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积；

(Ⅱ)求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.

20．(本小题满分 12 分)

设计一幅宣传画，要求画面面积为 4 840 cm²，画面的宽与高的比为 λ（$\lambda<1$），画面的上、下各留 8 cm空白，左、右各留 5 cm空白．怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传画所用纸张面积最小?如果要求 $\lambda\in\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right]$，那么 λ 为何值时，能使宣传画所用纸张面积

最小?

21．(本小题满分 14 分)

已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右准线 l 与 x 轴相交于点 E，过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆相交于 A、B 两点，点 C 在右准线 l 上，且 $BC // x$ 轴 求证直线 AC 经过线段 EF 的中点.

22．(本小题满分 14 分)

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称 对任意 x_1，$x_2\in[0,\dfrac{1}{2}]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

(Ⅰ)求 $f(\dfrac{1}{2}),f(\dfrac{1}{4})$；

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 是周期函数；

(Ⅲ)记 $a_n=f(2n+\dfrac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

参考答案

一、选择题　1. C　2.A　3.D　4.A　5.B　6.A　7.B　8.B　9.C　10.B　11.D　12.D

二、填空题　13.4900　14. $\dfrac{16}{5}$　15.1　16.$2n(n-1)$

三、解答题

17.解：$y=(\sin x+\cos x)^2+2\cos^2 x$

$=1+\sin 2x+2\cos^2 x$

$=\sin 2x+\cos 2x+2$　　5分

$=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+2$　　8分

所以最小正周期 $T=\pi$.　　10分

18.解：(Ⅰ)设该等差数列为 $\{a_n\}$,

则 $a_1=a$，$a_2=4$，$a_3=3a$，$S_k=2550$.

由已知有 $a+3a=2\times 4$，解得首项 $a_1=a=2$，

公差 $d=a_2-a_1=2$.　　2分

代入公式 $S_k=k\cdot a_1+\dfrac{k(k-1)}{2}\cdot d$ 得 $k\cdot 2+\dfrac{k(k-1)}{2}\cdot 2=2550$

$\therefore k^2+k-2550=0$

解得 $k=50, k=-51$(舍去)

$\therefore a=2, k=50$.　　6分

(Ⅱ)由 $S_n=n\cdot a_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot d$ 得 $S_n=n(n+1)$,

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$=1-\dfrac{1}{n+1}$　　9分

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n+1})=1$　　12分

19．解：(Ⅰ)直角梯形 $ABCD$ 的面积是

$M_{底面}=\dfrac{1}{2}(BC+AD)\cdot AB=\dfrac{1+0.5}{2}\times1=\dfrac{3}{4}$　　2分

$\therefore$四棱锥 S—$ABCD$ 的体积是 $V=\dfrac{1}{3}\times SA\times M_{底面}=\dfrac{1}{3}\times1\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$　　4分

(Ⅱ)延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE，则 SE 是所求二面角的棱　　6分

$\because AD\parallel BC$，$BC=2AD$

$\therefore EA=AB=SA$，$\therefore SE\perp SB$

$\because SA\perp$面 $ABCD$，得面 $SEB\perp$面 EBC，EB 是交线.

又 $BC\perp EB$，$\therefore BC\perp$面 SEB，故 SB 是 SC 在面 SEB 上的射影，$\therefore CS\perp SE$，

所以$\angle BSC$是所求二面角的平面角　　10分

$\because SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{2}, BC=1, BC\perp SB$

$\therefore \mathrm{tg}\angle BSC=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

即所求二面角的正切值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 12分

20. 解：设画面高为x cm，宽为λx cm，则$\lambda x^2=4840$ 1分
设纸张面积为S，则有
$S=(x+16)(\lambda x+10)=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160$， 3分

将$x=\dfrac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$代入上式得$S=5000+44\sqrt{10}(8\sqrt{\lambda}+\dfrac{5}{\sqrt{\lambda}})$ 5分

当$8\sqrt{\lambda}=\dfrac{5}{\sqrt{\lambda}}$,即$\lambda=\dfrac{5}{8}(\dfrac{5}{8}\prec 1)$时，$S$取得最小值，此时，高：$x=\sqrt{\dfrac{4840}{\lambda}}=88$ cm，

宽：$\lambda x=\dfrac{5}{8}\times 88=55$ cm 8分

如果$\lambda\in[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}]$，可设$\dfrac{2}{3}\le\lambda_1\prec\lambda_2\le\dfrac{3}{4}$，则由$S$的表达式得

$S(\lambda_1)-S(\lambda_2)=44\sqrt{10}(8\sqrt{\lambda_1}+\dfrac{5}{\sqrt{\lambda_1}}-8\sqrt{\lambda_2}-\dfrac{5}{\sqrt{\lambda_2}})=$

$44\sqrt{10}(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2})(8-\dfrac{5}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_2}})$ 10分 由于$\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\ge\dfrac{2}{3}\succ\dfrac{5}{8}$,故$8-\dfrac{5}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\succ 0$

因此$S(\lambda_1)-S(\lambda_2)<0$，

所以$S(\lambda)$在区间$[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}]$内单调递增.

从而，对于$\lambda\in[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}]$，当$\lambda=\dfrac{2}{3}$时，$S(\lambda)$取得最小值

答：画面高为88 cm、宽为55 cm时，所用纸张面积最小；如果要求$\lambda\in[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}]$，当$\lambda=\dfrac{2}{3}$时，所用纸张面积最小. 12分

21. 证明：依设，得椭圆的半焦距$c=1$，右焦点为$F(1，0)$，右准线方程为$x=2$，点E的坐标为$(2，0)$，EF的中点为$N(\dfrac{3}{2}，0)$ 3分

若AB垂直于x轴，则$A(1，y_1)$，$B(1，-y_1)$，$C(2，-y_1)$，

$\therefore AC$中点为$N(\dfrac{3}{2}，0)$，即AC过EF中点N.

若AB不垂直于x轴，由直线AB过点F，且由$BC//x$轴知点B不在x轴上，故直线AB的方程为$y=k(x-1)$，$k\ne 0$.

记$A(x_1，y_1)$和$B(x_2，y_2)$，则$C(2，y_2)$且x_1，x_2满足二次方程

$$\frac{x^2}{2}+k^2(x-1)^2=1$$

即（1＋2 k^2） x^2－4 k^2x＋2（k^2－1）＝0，

∴ x_1＋x_2＝$\dfrac{4k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$　　　　1 0分

又 x^2_1＝2－2 y^2_1＜2，得 $x_1-\dfrac{3}{2}\neq 0$，

故直线 *AN*，*CN* 的斜率分别为　$k_1=\dfrac{y_1}{x_1-\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2k(x_1-1)}{2x_1-3}$　　$k_2=\dfrac{y_2}{2-\dfrac{3}{2}}=2k(x_2-1)$

∴ $k_1-k_2=2k\cdot\dfrac{(x_1-1)-(x_2-1)(2x_1-3)}{2x_1-3}$

∵（x_1－1）－（x_2－1）（2 x_1－3）＝3（x_1＋x_2）－2 x_1x_2－4

$$=\frac{1}{1+2k^2}[12k^2-4(k^2-1)-4(1+2k^2)]=0$$

∴ $k_1-k_2=0$，即 $k_1=k_2$，故 *A*、*C*、*N* 三点共线.

所以，直线 *AC* 经过线段 *EF* 的中点 *N*.　　　　14 分

22.（Ⅰ）解：因为对 x_1，x_2∈［0，$\dfrac{1}{2}$］，都有 f（x_1＋x_2）＝f（x_1）•f（x_2），

所以

$$f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2})\geq 0,x\in[0,1]\because f(1)=f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})\cdot f(\frac{1}{2})=[f(\frac{1}{2})]^2$$

$$f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})\cdot f(\frac{1}{4})=[f(\frac{1}{4})]^2$$

f（1）＝ a＞0，　　　　3 分

∴ $f(\dfrac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}},f(\dfrac{1}{4})=a^{\frac{1}{4}}$　　　　6 分

（Ⅱ）证明：依题设 y＝f（x）关于直线 x＝1 对称，

故 f（x）＝f（1＋1－x），

即 f（x）＝f（2－x），x∈R

又由 f（x）是偶函数知 f（－x）＝f（x），x∈R，

∴ f（－x）＝f（2－x），x∈R，

将上式中－x 以 x 代换，得 f（x）＝f（x＋2），x∈R

这表明 f（x）是 R 上的周期函数，且 2 是它的一个周期.　　　　10 分

（Ⅲ）解：由（Ⅰ）知 f（x）≥0，x∈［0，1］

$\because f(\frac{1}{2})=f(n\cdot\frac{1}{2n})=f[\frac{1}{2n}+(n-1)\cdot\frac{1}{2n}]$

$=f(\frac{1}{2n})\cdot f[(n-1)\cdot\frac{1}{2n}]=\cdots\cdots=f(\frac{1}{2n})\cdot f(\frac{1}{2n})\cdots\cdots f(\frac{1}{2n})=[f(\frac{1}{2n})]^n$

$f(\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$ $\therefore f(\frac{1}{2n})=a^{\frac{1}{2n}}$ 12 分

$\because f(x)$ 的一个周期是 2 $\therefore f(2n+\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n})$, 因此 $a_n=a^{\frac{1}{2n}}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}\ln a)=0$ 14 分