

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) i 是虚数单位，复数 $\frac{7+i}{3+4i} = ()$

- A. $1-i$ B. $-1+i$ C. $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$ D. $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$

(2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ y \geq 1. \end{cases}$ 则目标函数 $z = x+2y$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. 已知命题 $p: \forall x > 0$, 总有 $(x+1)e^x > 1$, 则 $\neg p$ 为 ()

A. $\exists x_0 \leq 0$, 使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$ B. $\exists x_0 > 0$, 使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$

C. $\exists x_0 > 0$, 总有 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$ D. $\exists x_0 \leq 0$, 总有 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$

4. 设 $a = \log_2 \pi, b = \log_{\frac{1}{2}} \pi, c = \pi^{-2}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

5. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 $a_1 = ()$

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ D. $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

7. 如图, $\triangle ABC$ 是圆的内接三角形, $\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D , 交 BC 于 E , 过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F , 在上述条件下, 给出下列四个结论: ① BD 平分 $\angle CBF$; ②

$FB^2 = FD \cdot FA$; ③ $AE \cdot CE = BE \cdot DE$; ④ $AF \cdot BD = AB \cdot BF$. 则所有正确结论的序号

是 ()

- A. ①② B. ③④ C. ①②③ D. ①②④

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0), x \in R$. 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点

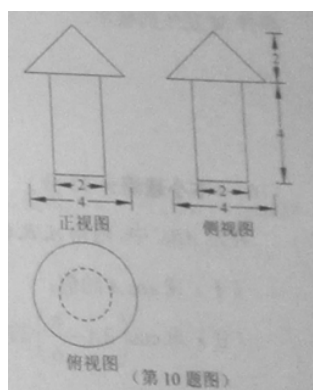
中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

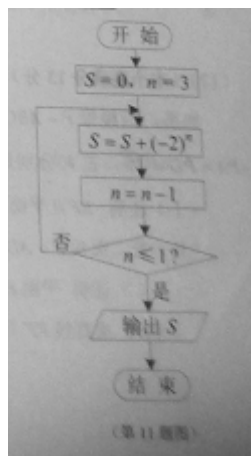
二. 填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为300的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为4:5:5:6, 则应从一年级本科生中抽取__名学生.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为__ m^3 .



11. 阅读右边的框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为_____.



12. 函数 $f(x) = \lg x^3$ 的单调递减区间是_____.

13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BC = 3BE, DC = \lambda DF$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$, 则 λ 的值为_____.

(14) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$ 若函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有4个零点, 则实数 a

的取值范围为_____

三. 解答题: 本大题共6小题, 共80分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

(15) (本小题满分13分)

某校夏令营有3名男同学 A, B, C 和3名女同学 X, Y, Z ，其年级情况如下表：

	一年级	二年级	三年级
男同学	A	B	C
女同学	X	Y	Z

现从这6名同学中随机选出2人参加知识竞赛（每人被选到的可能性相同）

(1) 用表中字母列举出所有可能的结果

(2) 设 M 为事件“选出的2人来自不同年级且恰有1名男同学和1名女同学”，求事件 M 发生的概率.

(16) (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$,

$$\sin B = \sqrt{6} \sin C$$

(1) 求 $\cos A$ 的值；

(2) 求 $\cos(2A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

17、(本小题满分13分)

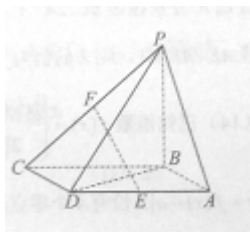
如图，四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形， $BA = BD = \sqrt{2}$ ， $AD = 2$ ， $PA = PD = \sqrt{5}$ ， E, F 分别是棱 AD, PC 的中点.

(1) 证明： $EF \parallel$ 平面 PAB ；

(2) 若二面角 $P-AD-B$ 为 60° ,

① 证明：平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$

② 求直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18、(本小题满分13分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，右顶点为 A ，上顶点为 B . 已

知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2|$.

- (1) 求椭圆的离心率;
- (2) 设P为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段PB为直径的圆经过点 F_1 , 经过点 F_2 的直线与该圆相切与点M, $|MF_2| = 2\sqrt{2}$. 求椭圆的方程.

19 (本小题满分14分)

已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0), x \in R$

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围

20 (本小题满分14分)

已知 q 和 n 均为给定的大于1的自然数, 设集合 $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, 集合

$$A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\},$$

- (1) 当 $q = 2, n = 3$ 时, 用列举法表示集合A;

设 $s, t \in A, s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}, t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$, 其中 $a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n$,

证明: 若 $a_n < b_n$, 则 $s < t$.