2013年全国普通高等学校招生统一考试
上海 数学试卷（文史类）

考生注意：

1. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名.

2. 本试卷共有23道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1.不等式$\frac{x}{2x-1}$<0的解为 __$(0,\frac{1}{2})$__.

【答案】 $(0,\frac{1}{2})$

【解析】 $x(2x-1)<0 \Rightarrow x\in(0,\frac{1}{2})$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2+a_3+a_4=30$，则$a_2+a_3=$ __15__.

【答案】 15

【解析】 $a_1+a_2+a_3+a_4=2(a_2+a_3)=30\Rightarrow a_2+a_3=15$

3. 设m∈R, $m^2+m-2+(m^2-1)i$是纯虚数，其中i是虚数单位，则m=_____.

【答案】 -2

【解析】 $m^2+m-2+(m^2-1)i$是纯虚数$\Rightarrow\begin{cases}m^2+m-2=0\\m^2-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow m=-2$

4. 已知$\begin{vmatrix}x & 2\\1 & 1\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}x & y\\1 & 1\end{vmatrix}=1$，则y= __1__ .

【答案】 1

【解析】 已知$\begin{vmatrix}x & 2\\1 & 1\end{vmatrix}=x-2=0\Rightarrow x=2$，又$\begin{vmatrix}x & y\\1 & 1\end{vmatrix}=x-y=1$

联立上式，解得$x=2, y=1,$

5. 已知△ABC的内角A、B、C所对的边分别是a、b、c. 若$a^2+ab+b^2-c^2=0$，则角C的大小是 __$\frac{2}{3}\pi$__.

【答案】 $\frac{2}{3}\pi$

【解析】 $a^2+ab+b^2-c^2=0\Rightarrow\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-1}{2}\Rightarrow C=\frac{2}{3}\pi$

6.某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%.在一次考试中，男、女生平均分数分别是75、80，则这次考试该年级学生平均分数为 __78__.

【答案】 78

【解析】 平均成绩$=\frac{40}{100}\cdot 75+\frac{60}{100}\cdot 80=78$

7.设常数a∈R. 若$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$的二项展开式中$x^7$项的系数为-10，则a= __-2__.

【答案】-2

【解析】$(x^2+\frac{a}{x})^5 \Rightarrow C_5^r(x^2)^{5-r}(\frac{a}{x})^r=-10x^7 \Rightarrow r=1, C_5^1a=-10$

$\Rightarrow 5a=-10, a=-2$

8. 方程$\frac{9}{3^x-1}+1=3^x$的实数解为 __$\log_3 4$__.

【答案】$\log_3 4$

【解析】

$$\frac{9}{3^x-1}+1=3^x \Rightarrow \frac{9}{3^x-1}=3^x-1 \Rightarrow 3^x-1=\pm 3 \Rightarrow 3^x=\pm 3+1>0 \Rightarrow 3^x=4 \Rightarrow x=\log_3 4$$

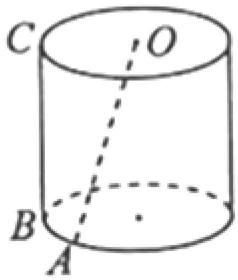
9. 若cosxcosy+sinxsiny=$\frac{1}{3}$，则cos(2x-2y)= _$-\frac{7}{9}$_.

【答案】$-\frac{7}{9}$

【解析】

$$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)=\frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2(x-y)=2\cos^2(x-y)-1=-\frac{7}{9}$$

10. 已知圆柱Ω的母线长为l，底面半径为r，O是上底面圆心，A、B是下底面圆周上的两个不同的点，BC是母线，如图. 若直线OA与BC所成角的大小为$\frac{\pi}{6}$，则$\frac{l}{r}$= __$\sqrt{3}$___ .



第 10 题图

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】由题知，$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{r}{l}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{l}{r}=\sqrt{3}$

11.盒子中装有编号为1，2，3，4，5，6，7的七个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是 _$\frac{5}{7}$_ （结果用最简分数表示）.

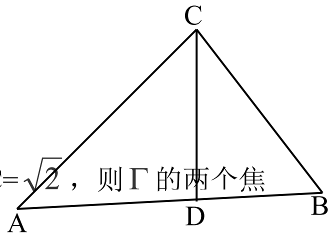
【答案】$\frac{5}{7}$

【解析】考查排列组合；概率计算策略：正难则反。

从4个奇数和3个偶数共7个数中任取2个，共有$C_7^2=21$个

2个数之积为奇数$\Rightarrow$2个数分别为奇数，共有$C_4^2=6$个.

所以2个数之积为偶数的概率$P=1-\frac{C_4^2}{C_7^2}=1-\frac{6}{21}=\frac{5}{7}$



12.设AB是椭圆Γ的长轴，点C在Γ上，且$\angle CBA=\frac{\pi}{4}$.若AB=4，BC=$\sqrt{2}$，则Γ的两个焦点之间的距离为 _$\frac{4}{3}\sqrt{6}$_ .

【答案】$\frac{4}{3}\sqrt{6}$

【解析】如右图所示。

设D在AB上，且$CD\perp AB, AB=4, BC=\sqrt{2}, \angle CBA=45°\Rightarrow CD=1, DB=1, AD=3\Rightarrow C(1,1)$

$\Rightarrow 2a=4$,把$C(1,1)$代入椭圆标准方程得$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1, a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=\frac{4}{3}, c^2=\frac{8}{3}$

$\Rightarrow 2c=\frac{4}{3}\sqrt{6}$

13.设常数a＞0. 若$9x+\frac{a^2}{x}\geq a+1$对一切正实数x成立，则a的范围为 ___$[\frac{1}{5},\infty)$___ .

【答案】$[\frac{1}{5},\infty)$

【解析】考查均值不等式的应用。

由题知，当$x>0$时,$f(x)=9x+\frac{a^2}{x}\geq 2\sqrt{9x+\frac{a^2}{x}}=6a\geq a+1\Rightarrow a\geq\frac{1}{5}$

14. 已知正方形ABCD的边长为1. 记以A为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$；以C为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\vec{c_1}$、$\vec{c_2}$、$\vec{c_3}$. 若i, j, k, l∈$\{1,2,3\}$且i≠j, k≠l，则$(\vec{a_i}+\vec{a_j})\cdot(\vec{c_k}+\vec{c_l})$的最小值是 ___-5___ .

【答案】-5

【解析】根据对称性，

当向量$(\vec{a_i}+\vec{a_j})$与$(\vec{c_k}+\vec{c_l})$互为相反向量，且它们的模最大时

,$(\vec{a_i}+\vec{a_j})(\vec{c_k}+\vec{c_l})$最小。这时$\vec{a_i}=\overrightarrow{AC}, \vec{a_j}=\overrightarrow{AD}, \vec{c_k}=\overrightarrow{CA}, \vec{c_l}=\overrightarrow{CB}$,

$(\vec{a_i}+\vec{a_j})(\vec{c_k}+\vec{c_l})=-|\vec{a_i}+\vec{a_j})|^2=-5$。

二、选择题（本大题共有4小题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分.

15.函数$f(x)=x^2-1$（x≥0）的反函数为$f^{-1}(x)$，则$f^{-1}(2)$的值是（ A ）

（A）$\sqrt{3}$ （B）$-\sqrt{3}$ （C）1+$\sqrt{2}$ （D）1$-\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】由反函数的定义可知，$x\geq 0, 2=f(x)=x^2-1\Rightarrow x=\sqrt{3}$

选A

16.设常数a∈R，集合A=$\{x|(x-1)(x-a)\geq 0\}$，B=$\{x|x\geq a-1\}$. 若A∪B=R，则a的取值范围为（ B ）

（A）（−∞，2）（B）（−∞，2]（C）（2，+∞）（D）[2，+∞）

【答案】 B

【解析】 方法：代值法，排除法。当a=1时，A=R，符合题意；当a=2时，

$\because B=[1,+\infty), A=(-\infty,1]\cup[+\infty),2)\therefore A\cup B=R,$符合题意。

综上，选B

标准解法如下：$\because B=[a-1,+\infty), A\cup B=R\therefore A\supseteq(-\infty,a-1)$

由$(x-1)(x-a)\geq 0\Rightarrow$当$a=1$时，$x\in R,$当$a=1$符合题意；当$a>1$时$x\in(-\infty,1]\cup[a,+\infty)$,

$\Rightarrow 1\geq a-1$解得$1<a\leq 2;$当$a<1$时$x\in(-\infty,a]\cup[1,+\infty)\Rightarrow a\geq a-1\Rightarrow a<1$

综上，$a\leq 2$

选B

17.钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的（ A ）

（A）充分条件（B）必要条件

（C）充分必要条件（D）既非充分又非必要条件

【答案】 A

【解析】 便宜没好货$\Leftrightarrow$便宜则不是好货$\Leftrightarrow$好货则不便宜

所以“好货”是“不便宜”的充分条件

选A

当点（x, y）分别在Ω_1，Ω_2，…上时，x+y的最大值分别是M_1, M_2, …，则$\lim\limits_{n\to+\infty}M_n$=（ D ）

（A）0（B）$\frac{1}{4}$（C）2（D）$2\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 椭圆方程为:$\frac{x^2}{4}+\frac{ny^2}{4n+1}=1\Rightarrow\lim\limits_{n->+\infty}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4+\frac{1}{n}}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1\\ u=x+y\end{cases}\Rightarrow x^2+(u-x)^2=4\Rightarrow 2x^2-2ux+u^2-4=0\Rightarrow\Delta=4u^2-8(u^2-4)\geq 0$

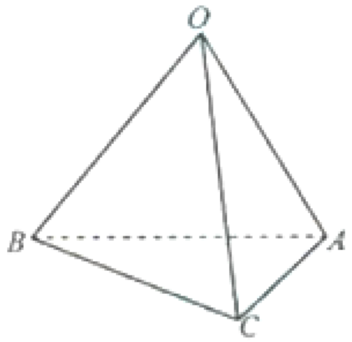
$\Rightarrow u^2-2(u^2-4)\geq 0\Rightarrow 8\leq u^2\Rightarrow u\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}],$所以$x+y$的最大值为$,2\sqrt{2}$

选D

三、解答题（本大题共有5下题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19.（本题满分12分）

如图，正三棱锥O-ABC的底面边长为2，高为1，求该三棱锥的体积及表面积。



第 19 题图

【答案】 $V_{O-ABC}=\frac{\sqrt{3}}{3};S_{O-ABC}=3\sqrt{3}$

【解析】 三棱锥$O-ABC$的体积$V_{O-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot 1=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$

设O在面ABC中的射影为Q，BC的中点为E，则$OQ=1$，$QE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，在$RT\Delta OQE$中

，$OE^2=OQ^2+EQ^2\Rightarrow 1^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{3}\Rightarrow OE=\frac{2}{\sqrt{3}}$

三棱锥$O-ABC$的表面积$S_{O-ABC}=3S_{\Delta OBC}+S_{\Delta ABC}=3\cdot\frac{BC}{2}\cdot OE+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

所以，三棱锥$O-ABC$的体积$V_{O-ABC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，表面积$S_{O-ABC}=3\sqrt{3}$

20.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分9分.
甲厂以x千克/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求1≤x≤10），每小时可获得的利润是$100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)$元.

（1）求证：生产a千克该产品所获得的利润为$100a\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$元；

（2）要使生产900千克该产品获得的利润最大，问：甲厂应该选取何种生产速度？并求此最大利润.

【答案】（1） 见下
（2） 当生产速度为6千克/小时，这时获得最大利润为457500元。

【解析】（1）证明：由题知，生产a千克该产品所需要的时间$t=\frac{a}{x}$小时，

所获得的利润$y=\frac{a}{x}\cdot 100(5x+1-\frac{3}{x})=100a(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})$(元)，其中$1\le x\le 10$.

所以，生产a千克该产品所获得的利润为$100a\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$元；（证毕）

（2） 由（1）知，生产900千克该产品即a=900千克时，获得的利润

$y=100\cdot 900(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})=90000[5+\frac{1}{x}(1-3\cdot\frac{1}{x})]$

由二次函数的知识可知，当$\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$，即x=6时，$y\le 90000[5+\frac{1}{6}(1-3\cdot\frac{1}{6})]$

$=450000+7500=457500$(元)

所以，当生产速度为6千克/小时，这时获得最大利润为457500元。

21.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$，其中常数ω>0.

（1）令ω=1，判断函数 $F(x)=f(x)+f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）令ω=2，将函数y=f(x)的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位，得到函数y=g(x)的图像.对任意a∈R，求y=g(x)在区间[a，a+10π]上零点个数的所有可能值.

【答案】（1） 不是奇函数，也不是偶函数。

（2） 20,21

【解析】（1）

$\omega=1$时，$f(x)=2\sin x, F(x)=f(x)+f(x+\dfrac{\pi}{2})=2\sin x+2\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$

$=2\sin x+2\cos x=2\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}), \because$ 周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi, y=2\sqrt{2}\sin x$是奇函数，

$\therefore$图像左移$\dfrac{\pi}{4}$后得$f(x)=2\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，即不是奇函数，也不是偶函数。

（2）ω=2，将函数y=f(x)的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位，得到函数y=g(x):

$f(x)=2\sin 2x, g(x)=f(x-\dfrac{\pi}{6})+1=2\sin 2(x-\dfrac{\pi}{6})+1$,最小正周期$T=\pi$.

令$f(x)=0\Rightarrow \sin 2(x-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}$在一个周期内最多有3个零点，最少2个零点。

所以y=g(x)在区间[a, a+10π]、其长度为10个周期上，零点个数可以取20, 21个

22.(本题满分16分)本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分.

已知函数 $f(x)=2-|x|$，无穷数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=f(a_n)$, n∈N*

（1）若$a_1=0$，求a_2，a_3，a_4;

（2）若$a_1>0$，且a_1，a_2，a_3成等比数列，求a_1的值.

（3）是否存在a_1，使得a_1，a_2，…，a_n…成等差数列？若存在，求出所有这样的a_1；若不存在，说明理由.

【答案】（1） $a_2=2, a_3=0, a_4=2$

（2） $a_1=1$，或$a_1=2+\sqrt{2}$

（3） $a_1=1$,且$a_n=1$

【解析】（1） 由$a_{n+1}=f(a_n)\Rightarrow a_{n+1}=2-|a_n|.a_1=0\Rightarrow a_2=2, a_3=0, a_4=2$

（2）$\because a_1,a_2,a_3$成等比$\Rightarrow a_3=\dfrac{a_2^{\ 2}}{a_1}=2\text{-}|a_2|\Rightarrow a_2^{\ 2}=a_1(2\text{-}|a_2|)$，且$a_2=2\text{-}|a_1|$

$\Rightarrow(2\text{-}|a_1|)^2=a_1[2-|2\text{-}|a_1||]\Rightarrow(2-a_1)^2=a_1[2-|2-a_1|]$

分情况讨论如何：

当$2-a_1\ge 0$时,$(2-a_1)^2=a_1[2-(2-a_1)=a_1^2\Rightarrow a_1=1$，且$a_1\le 2$

当$2-a_1<0$时,$(2-a_1)^2=a_1[2-(a_1-2)=a_1(4-a_1)\Rightarrow 2a_1^2-8a_1+4=0\Rightarrow a_1^2-4a_1+4=2$

$\Rightarrow 2a_1^2-8a_1+4=0\Rightarrow(a_1-2)^2=2\Rightarrow a_1=2+\sqrt{2}$，且$a_1\ge 2$

综上，$a_1=1$，或$a_1=2+\sqrt{2}$

（3）假设存在公差为d的等差数列$\{a_n\}$满足题意,,则：$\forall n\in N^*,a_{n+1}=2-|a_n|=a_n+d$

$\Rightarrow 2-d=a_n+|a_n|$.讨论如下:

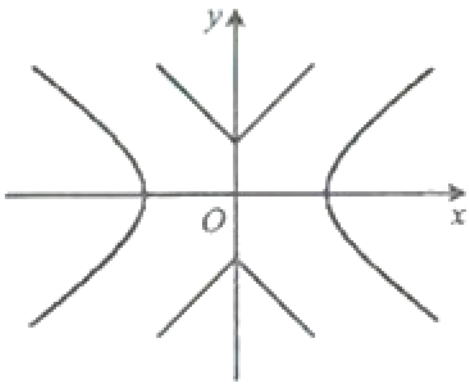
当$a_n=m$即数列$\{a_n\}$为常数数列时，$d=0,2=2a_n\Rightarrow a_n=1\Rightarrow a_1=1$

当数列$\{a_n\}$不是常数数列时$\Rightarrow a_n<0,2-d=0\Rightarrow d=2\Rightarrow\exists a_n>0$,所以不满足题意。

综上，存在$a_1=1$的等差数列$\{a_n\}$,且$a_n=1$满足题意。

23.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分.

如图，已知双曲线C_1: $\frac{x^2}{2}-y^2=1$，曲线C_2: $|y|=|x|+1$. P是平面内一点. 若存在过点P的直线与C_1、C_2都有共同点，则称P为“C_1-C_2型点”.



第23题图

（1）在正确证明C_1的左焦点是“C_1-C_2型点”时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；

（2）设直线y=kx与C_2有公共点，求证$|k|>1$，进而证明圆点不是“C_1-C_2型点”；

（3）求证：圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$内的点都不是“C_1-C_2型点”.

【答案】（1） $\sqrt{3}y-x-\sqrt{3}=0$

【解析】（1）

由C_1方程:$\frac{x^2}{2}-y^2=1$可知：$a^2=2,b^2=1,c^2=a^2+b^2=3,F_1(-\sqrt{3},0)$

显然，由双曲线C_1的几何图像性质可知，过F_1的任意直线都与曲线C_1相交.从曲线C_2图像上取点P(0,1),则直线PF_1与两曲线C_1、C_2均有交点。这时直线方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{3})\Rightarrow\sqrt{3}y-x-\sqrt{3}=0$$

（2） 先证明“若直线y=kx与C_2有公共点，则$|k|>1$”.

双曲线 C_1的渐近线：$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x.$

若直线$y=kx$与双曲线C_1有交点，则$k\in A=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

若直线$y=kx$与双曲线C_2有交点，则$k\in B=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

所以直线y=kx与 C_2 有公共点，则$|k|>1$.（证毕）

$\because A\cap B=\phi,\therefore$ 直线$y=kx$与曲线C_1、C_2不能同时有公共交点。

所以原点不是“C_1-C_2型点”；（完）

（3）设直线 l 过圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内一点，则直线 l 斜率不存在时与曲线 C_1 无交点。

设直线 l 方程为：y = kx + m，则：$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2m^2-1<k^2$

假设直线 l 与曲线 C_2 相交上方，则 $y\geq 1$

2013年全国普通高等学校招生统一考试

上海 数学试卷(文史类)

答案要点及评分标准

说明

1. 本解答列出试题的解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅．当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半．如果有较严重的概念性错误，就不给分.

解答

一、（第1题至第14题）

1. $0<x<\dfrac{1}{2}$　2. 15　3. -2　4. 1　5. $\dfrac{2\pi}{3}$　6. 78

7. -2　8. $\log_3 4$　9. $-\dfrac{7}{9}$　10. $\sqrt{3}$　11. $\dfrac{5}{7}$　12. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

13. $\left[\dfrac{1}{5},+\infty\right)$　14. -5

二、（第15题至第18题）

题　号	15	16	17	18
代　号	A	B	A	D

三、（第19题至第23题）

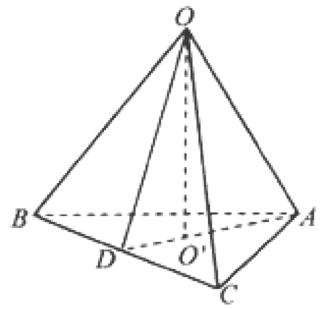
19. [解] 由已知条件可知，正三棱锥 $O-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形，

经计算得底面 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$.　…… 2分

所以该三棱锥的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　…… 4分

设 O' 是正三角形 ABC 的中心.

由正三棱锥的性质可知，OO' 垂直于平面 ABC.



第19题图

延长 AO' 交 BC 于 D，得 $AD=\sqrt{3}$，$O'D=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　…… 7分

又因为 $OO'=1$，所以正三棱锥的斜高 $OD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.　…… 9分

故侧面积为$\frac{1}{2}\times6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

所以该三棱锥的表面积为$\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，

因此，所求三棱锥的体积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，表面积为$3\sqrt{3}$. …… 12分

20. [解] (1) 生产a千克该产品，所用的时间是$\frac{a}{x}$小时， …… 3分

所获得的利润为$100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{a}{x}$.

所以，生产a千克该产品所获得的利润为$100a\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$元. …… 5分

(2) 生产900千克该产品，获得的利润为$90000\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$，$1\le x\le10$. …… 7分

记 $f(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+5$，$1\le x\le10$，

则$f(x)=-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}+5$，当且仅当$x=6$时取到最大值. …… 11分

获得最大利润$90000\times\frac{61}{12}=457500$元.

因此甲厂应以6千克/小时的速度生产，可获得最大利润为457500元. …… 14分

21. [解] (1) $f(x)=2\sin x$，

$F(x)=f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2(\sin x+\cos x)$. …… 2分

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$，$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne F\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne -F\left(\frac{\pi}{4}\right)$. …… 4分

所以，$F(x)$既不是奇函数，也不是偶函数. …… 6分

(2) $f(x)=2\sin 2x$，

将 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位后得到 $y=2\sin2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$的图像，所以$g(x)=2\sin2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$. …… 8分

令$g(x)=0$，得$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$或$x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

因为$[a,a+10\pi]$恰含10个周期，所以，

当a是零点时，在$[a,a+10\pi]$上零点个数为21； …… 11分

当a不是零点时，$a+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）也都不是零点，区间$[a+k\pi,a+(k+1)\pi]$上恰有两个零点，故在$[a,a+10\pi]$上有20个零点.

综上，$y=g(x)$在$[a,a+10\pi]$上零点个数的所有可能值为21或20. …… 14分

22. [解] (1) $a_2=2$，$a_3=0$，$a_4=2$.　　…… 3分

(2) $a_2=2-|a_1|=2-a_1$，$a_3=2-|a_2|=2-|2-a_1|$.

① 当$0<a_1\le 2$时，$a_3=2-(2-a_1)=a_1$，所以$a_1^2=(2-a_1)^2$，得a_1=1.　　…… 5分

② 当$a_1>2$时，$a_3=2-(a_1-2)=4-a_1$，所以$a_1(4-a_1)=(2-a_1)^2$，

得$a_1=2-\sqrt{2}$（舍去）或$a_1=2+\sqrt{2}$.

综合①②得$a_1=1$或$a_1=2+\sqrt{2}$.　　…… 8分

(3) 假设这样的等差数列存在，那么$a_2=2-|a_1|$，$a_3=2-|2-|a_1||$.

由$2a_2=a_1+a_3$得$2-a_1+|2-|a_1||=2|a_1|$（*）.

以下分情况讨论：

① 当$a_1>2$时，由（*）得$a_1=0$，与$a_1>2$矛盾；　　……·10分

② 当$0<a_1\le 2$时，由（*）得$a_1=1$，从而a_n=1（$n=1,2,\cdots$），

所以$\{a_n\}$是一个等差数列；　　…… 12分

③ 当$a_1\le 0$时，则公差$d=a_2-a_1=(a_1+2)-a_1=2>0$，因此存在$m\ge 2$使得$a_m=a_1+2(m-1)>2$. 此时$d=a_{m+1}-a_m=2-|a_m|-a_m<0$，矛盾.

综合①②③可知，当且仅当$a_1=1$时，$a_1,a_2,a_3,\ldots$构成等差数列.　　…… 16分

23. [解] (1) C_1的左焦点为$(-\sqrt{3},0)$，写出的直线方程可以是以下形式：

$x=-\sqrt{3}$或$y=k\left(x+\sqrt{3}\right)$，其中$|k|\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　　…… 3分

(2) 因为直线$y=kx$与C_2有公共点，

所以方程组$\begin{cases}y=kx,\\|y|=|x|+1\end{cases}$有实数解，因此$|kx|=|x|+1$，得$|k|=\dfrac{|x|+1}{|x|}>1$.　　…… 6分

若原点是“C_1-C_2型点”，则存在过原点的直线与C_1、C_2都有公共点.

考虑过原点与C_2有公共点的直线$x=0$或$y=kx$（$|k|>1$）.

显然直线$x=0$与C_1无公共点.

如果直线为$y=kx$（$|k|>1$），则由方程组$\begin{cases}y=kx,\\\dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$得$x^2=\dfrac{2}{1-2k^2}<0$，矛盾.

所以直线$y=kx$（$|k|>1$）与C_1也无公共点.

因此原点不是“C_1-C_2型点”.　　…… 9分

(3) 记圆$O:x^2+y^2=\frac{1}{2}$，取圆O内的一点Q．设有经过Q的直线l与C_1、C_2都有公共点．显然l不垂直于x轴，故可设$l:y=kx+b$．

若$|k|\le 1$，由于圆O夹在两组平行线$y=x\pm 1$与$y=-x\pm 1$之间，因此圆O也夹在直线$y=kx\pm 1$与$y=-kx\pm 1$之间，从而过Q且以k为斜率的直线l与C_2无公共点，矛盾，所以$|k|>1$． …… 11分

因为l与C_1有公共点，所以方程组$\begin{cases} y=kx+b, \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$有实数解，

得$\left(1-2k^2\right)x^2-4kbx-2b^2-2=0$．因为$|k|>1$，所以$1-2k^2\ne 0$，

因此$\Delta=(4kb)^2-4\left(1-2k^2\right)\left(-2b^2-2\right)=8\left(b^2+1-2k^2\right)\ge 0$，

即$b^2\ge 2k^2-1$． …… 14分

因为圆O的圆心$(0,0)$到直线l的距离$d=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以$\frac{b^2}{1+k^2}=d^2<\frac{1}{2}$，从而$\frac{1+k^2}{2}>b^2\ge 2k^2-1$，得$k^2<1$，与$|k|>1$矛盾．

因此，圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$内的点都不是“C_1-C_2型点”． …… 18分