2007年北京高考理科数学真题及答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1.（5分）已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$，那么角 θ 是（　　）

A．第一或第二象限角 B．第二或第三象限角

C．第三或第四象限角 D．第一或第四象限角

2.（5分）函数 $f(x)=3^x$（$0<x\leqslant 2$）的反函数的定义域为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(1,9]$　　C．$(0,1)$　　D．$[9,+\infty)$

3.（5分）平面 α // 平面 β 的一个充分条件是（　　）

A．存在一条直线 a，$a/\!/\alpha$，$a/\!/\beta$

B．存在一条直线 a，$a\subset\alpha$，$a/\!/\beta$

C．存在两条平行直线 a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/\beta$，$b/\!/\alpha$

D．存在两条异面直线 a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/\beta$，$b/\!/\alpha$

4.（5分）已知O是△ABC所在平面内一点，D为BC边中点，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，那么（　　）

A．$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$　B．$\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$　C．$\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　D．$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

5.（5分）记者要为5名志愿者和他们帮助的2位老人拍照，要求排成一排，2位老人相邻但不排在两端，不同的排法共有（　　）

A．1440种　B．960种　C．720种　D．480种

6.（5分）若不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\2x+y\leqslant 2\\y\geqslant 0\\x+y\leqslant a\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形，则 a 的取值范围是（　　）

A．$a\geqslant\frac{4}{3}$　B．$0<a\leqslant 1$　C．$0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$　D．$1\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$

7.（5分）如果正数 a，b，c，d 满足 $a+b=cd=4$，那么（　　）

A．$ab\leqslant c+d$ 且等号成立时 a，b，c，d 的取值唯一

B．$ab\geqslant c+d$ 且等号成立时 a，b，c，d 的取值唯一

C．$ab\leqslant c+d$ 且等号成立时 a，b，c，d 的取值不唯一

D．$ab\geqslant c+d$ 且等号成立时 a，b，c，d 的取值不唯一

8.（5分）对于函数①$f(x)=\lg(|x-2|+1)$，②$f(x)=(x-2)^2$，③$f(x)=\cos(x+2)$，

判断如下三个命题的真假：

命题甲：f（x+2）是偶函数；

命题乙：f（x）在（ - ∞，2）上是减函数，在（2，+∞）上是增函数；

命题丙：f（x+2） - f（x）在（ - ∞，+∞）上是增函数．

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是（　　）

A．①③ B．①② C．③　D．②

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

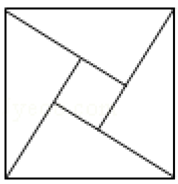
9．（5 分）$\frac{2}{(1+i)^2}$=____．

10．（5 分）若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$（n=1，2，3，…），则此数列的通项公式为____；数列 na_n 中数值最小的项是第____项．

11．（5 分）在△ABC 中，若 tanA=$\frac{1}{3}$，C=150°，BC=2，则 AB=____．

12．（5 分）已知集合 A=$\{x||x-a|\leqslant 1\}$，B=$\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}$．若 A∩B=∅，则实数 a 的取值范围是____．

13．（5 分）2002 年在北京召开的国际数学家大会，会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的．弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形（如图）．如果小正方形的面积为 1，大正方形的面积为 25，直角三角形中较小的锐角为 θ，那么 cos2θ 的值等于____．



14．（5 分）已知函数 f（x），g（x）分别由下表给出

x	1	2	3
f（x）	1	3	1
x	1	2	3
g（x）	3	2	1

则 f[g（1）]的值为____；满足 f[g（x）]＞g[f（x）]的 x 的值是____．

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15．（13 分）数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+cn$（c 是常数，n=1，2，3，…），且a_1，a_2，a_3成公比不为 1 的等比数列．

（1）求 c 的值；

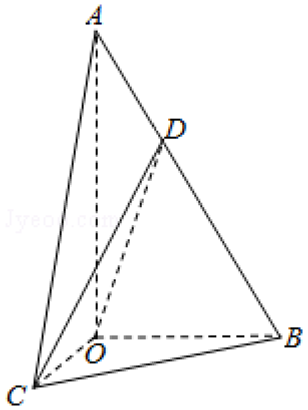
（2）求$\{a_n\}$的通项公式．

16．（14 分）如图，在 Rt△AOB 中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边 AB=4．Rt△AOC 可以通过 Rt△AOB 以直线 AO 为轴旋转得到，且二面角 B－AO－C 是直二面角．动点 D 在斜边 AB 上．

（Ⅰ）求证：平面 COD⊥平面 AOB；

（Ⅱ）当 D 为 AB 的中点时，求异面直线 AO 与 CD 所成角的余弦值大小；

（Ⅲ）求 CD 与平面 AOB 所成角最大时的正切值大小．

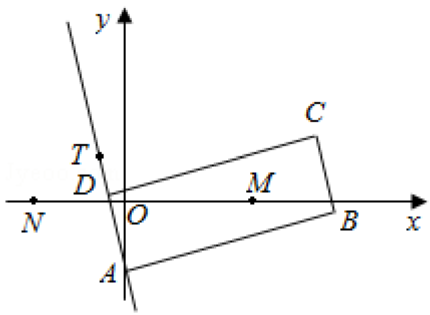


17．（14 分）如图，矩形 ABCD 的两条对角线相交于点 M（2，0），AB 边所在直线的方程为 x－3y－6=0 点 T（－1，1）在 AD 边所在直线上．

（Ⅰ）求 AD 边所在直线的方程；

（Ⅱ）求矩形 ABCD 外接圆的方程；

（Ⅲ）若动圆 P 过点 N（－2，0），且与矩形 ABCD 的外接圆外切，求动圆 P 的圆心的轨迹方程．

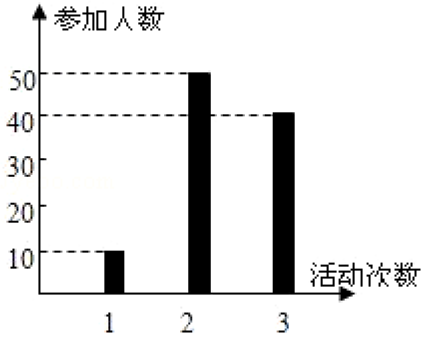


18．（13 分）某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动（以下简称活动）．该校合唱团共有 100 名学生，他们参加活动的次数统计如图所示．

（1）求合唱团学生参加活动的人均次数；

（2）从合唱团中任意选两名学生，求他们参加活动次数恰好相等的概率．

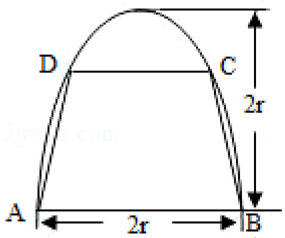
（3）从合唱团中任选两名学生，用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值，求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 Eξ．



19．（13 分）如图，有一块半椭圆形钢板，其半轴长为 $2r$，短半轴长为 r，计划将此钢板切割成等腰梯形的形状，下底 AB 是半椭圆的短轴，上底 CD 的端点在椭圆上，记 $CD=2x$，梯形面积为 S．

（Ⅰ）求面积 S 以 x 为自变量的函数式，并写出其定义域；

（Ⅱ）求面积 S 的最大值．



20．（13 分）已知集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k (k\geqslant 2)\}$，其中 $a_i\in Z$（$i=1, 2, \cdots, k$），由 A 中的元素构成两个相应的集合：$S=\{(a, b)|a\in A, b\in A, a+b\in A\}$，$T=\{(a, b)|a\in A, b\in A, a-b\in A\}$．其中 (a, b) 是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n．若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P．

（Ⅰ）检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P 并对其中具有性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T；

（Ⅱ）对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$；

（Ⅲ）判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论．

参考答案与试题解析

一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1.（5分）已知cosθ•tanθ＜0，那么角θ是（　　）

A．第一或第二象限角 B．第二或第三象限角

C．第三或第四象限角 D．第一或第四象限角

【解答】解：∵cosθ•tanθ=sinθ＜0，

∴角θ是第三或第四象限角，

故选C．

2.（5分）函数f（x）=3^x（0＜x≤2）的反函数的定义域为（　　）

A．（0，+∞）　　B．（1，9］　C．（0，1）　D．［9，+∞）

【解答】解：函数f（x）=3^x（0＜x≤2）的反函数的定义域就是函数f（x）=3^x（0＜x≤2）的值域，

由函数f（x）在其定义域内是单调增函数得　1＜f（x）≤9，

故选 B．

3.（5分）平面α∥平面β的一个充分条件是（　　）

A．存在一条直线a，a∥α，a∥β

B．存在一条直线a，a⊂α，a∥β

C．存在两条平行直线a，b，a⊂α，b⊂β，a∥β，b∥α

D．存在两条异面直线a，b，a⊂α，b⊂β，a∥β，b∥α

【解答】证明：对于A，一条直线与两个平面都平行，两个平面不一定平行．故A不对；

对于B，一个平面中的一条直线平行于另一个平面，两个平面不一定平行，故B不对；

对于C，两个平面中的两条直线平行，不能保证两个平面平行，故C不对；

对于D，两个平面中的两条互相异面的直线分别平行于另一个平面，可以保证两个平面平行，故D正确．

4.（5 分）已知 O 是△ABC 所在平面内一点，D 为 BC 边中点，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，那么（　　）

A. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$　B. $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$　C. $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　D. $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

【解答】解：∵ $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，∴ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OA}$，

∵D 为 BC 边中点，

∴ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，则 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$，

故选：A.

5.（5 分）记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照，要求排成一排，2 位老人相邻但不排在两端，不同的排法共有（　　）

A. 1440 种　B. 960 种　C. 720 种　D. 480 种

【解答】解：可分 3 步.

第一步，排两端，∵从 5 名志愿者中选 2 名有 $A_5^2=20$ 种排法，

第二步，∵2 位老人相邻，把 2 个老人看成整体，与剩下的 3 名志愿者全排列，有 $A_4^4=24$ 种排法

第三步，2 名老人之间的排列，有 $A_2^2=2$ 种排法

最后，三步方法数相乘，共有 20×24×2=960 种排法

故选 B

6.（5 分）若不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\2x+y\leqslant 2\\y\geqslant 0\\x+y\leqslant a\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant\frac{4}{3}$　B. 0＜a≤1　C. 0＜a≤1 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$　D. $1\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$

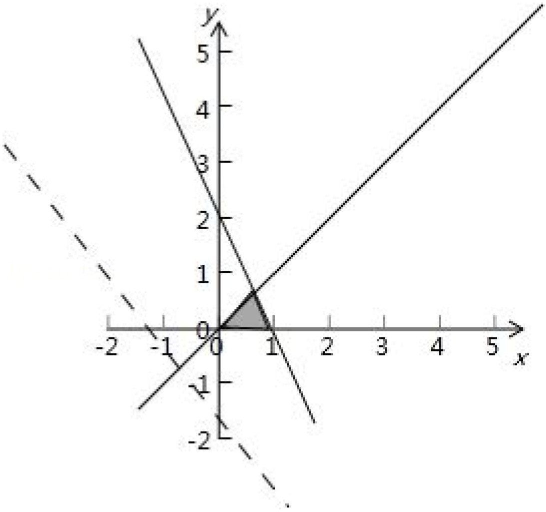
【解答】解：由题意可知：画可行域如图：

不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\2x+y\leqslant 2\\y\geqslant 0\\x+y\leqslant a\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形及其内部，

且当直线 x+y=a 过直线 y=x 与直线 2x+y=2 的交点时，$a=\frac{4}{3}$.

所以 a 的取值范围是：0＜a≤1 或 $a\geq\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$

故选 C．



7．（5 分）如果正数 a，b，c，d 满足 a+b=cd=4，那么（　　）

A．ab≤c+d 且等号成立时 a，b，c，d 的取值唯一

B．ab≥c+d 且等号成立时 a，b，c，d 的取值唯一

C．ab≤c+d 且等号成立时 a，b，c，d 的取值不唯一

D．ab≥c+d 且等号成立时 a，b，c，d 的取值不唯一

【解答】解：如果 a，b 是正数，则根据均值不等式有：$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，则（a+b）^{2}≥4ab

如果 c，d 是正数，则根据均值不等式有：$c+d\geqslant2\sqrt{cd}$；　则 $cd\leqslant\frac{(c+d)^2}{4}$

∵a，b，c，d 满足 a+b=cd=4，

$\therefore 2\sqrt{ab}\leqslant a+b=cd\leqslant\frac{(c+d)^2}{4}$

当且仅当 a=b=c=d=2 时取等号．

化简即为：ab≤c+d 且等号成立时 a，b，c，d 的取值唯一．

故选 A．

8．（5 分）对于函数①f（x）=lg（|x－2|+1），②f（x）=（x－2）^{2}，③f（x）=cos（x+2），判断如下三个命题的真假：

命题甲：f（x+2）是偶函数；

命题乙：f（x）在（－∞，2）上是减函数，在（2，+∞）上是增函数；

命题丙：f（x+2）﹣f（x）在（﹣∞，+∞）上是增函数.

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是（　　）

A. ①③ B. ①② C. ③　 D. ②

【解答】解：①若 f（x）=lg（|x﹣2|+1）则：

f（x+2）是偶函数，此时命题甲为真；

f（x）在（﹣∞，2）上是减函数，在（2，+∞）上是增函数；此时命题乙为真；

但 f（x+2）﹣f（x）在（﹣∞，+∞）上不是单调递增的；此时命题丙为假.

②f（x）=（x﹣2）^{2}则：

f（x+2）是偶函数，此时命题甲为真；

f（x）在（﹣∞，2）上是减函数，在（2，+∞）上是增函数；此时命题乙为真；

但 f（x+2）﹣f（x）=4x﹣4 在（﹣∞，+∞）上是增函数的；此时命题丙为真.

③若 f（x）=cos（x+2），则：

f（x+2）是不偶函数，此时命题甲为假；

f（x）在（﹣∞，2）上不是减函数，在（2，+∞）上不是增函数；此时命题乙为假；

但 f（x+2）﹣f（x）在（﹣∞，+∞）上不是单调递增的；此时命题丙为假.

故选 D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9.（5 分）$\frac{2}{(1+i)^2}$=__﹣i__.

【解答】解：$\frac{2}{(1+i)^2}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

故答案为：﹣i

10.（5 分）若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$（n=1，2，3，…），则此数列的通项公式为__2n﹣11__；数列 na_n 中数值最小的项是第__3__项.

【解答】解：由题意可知：数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$（n=1，2，3，…），

∴当 n=1 时，$a_1=s_1=1-10=-9$；

当 n＞1 时，$a_n=s_n-s_{n-1}=n^2-10n-(n-1)^2+10(n-1)=2n-11$；

综上可知：数列的通项公式为 $a_n=2n-11$，$n\in N^*$.

∴数列$\{na_n\}$的通项公式为：$na_n=n(2n-11)=2(n-\frac{11}{4})^2-\frac{121}{8}$，

所以当n为3时数列na_n中数值最小.

故答案为：$a_n=2n-11$，$n\in N^*$、3.

11.（5分）在△ABC中，若$\tan A=\frac{1}{3}$，$C=150°$，$BC=2$，则$AB=$__$\sqrt{10}$__.

【解答】解：∵$\tan A=\frac{1}{3}$∴$\sin A=\frac{\sqrt{10}}{10}$

根据正弦定理可得：$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$∴$AB=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\frac{\sqrt{10}}{10}}=\sqrt{10}$

故答案为：$\sqrt{10}$

12.（5分）已知集合$A=\{x||x-a|\leqslant 1\}$，$B=\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}$．若$A\cap B=\varnothing$，则实数a的取值范围是__（2，3）__.

【解答】解：集合$A=\{x||x-a|\leqslant 1\}=\{x|a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$，

$B=\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 1\}$.

又$A\cap B=\varnothing$，

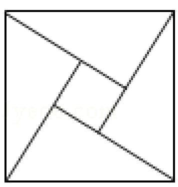
$\therefore\begin{cases}a+1<4\\a-1>1\end{cases}$，

解得$2<a<3$，

即实数a的取值范围是（2，3）.

故应填（2，3）.

13.（5分）2002年在北京召开的国际数学家大会，会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的.弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形（如图）.如果小正方形的面积为1，大正方形的面积为25，直角三角形中较小的锐角为θ，那么cos2θ的值等于__$\frac{7}{25}$__.



【解答】解：∵大正方形面积为25，小正方形面积为1，

∴大正方形边长为5，小正方形的边长为1.

∴$5\cos\theta - 5\sin\theta = 1$，

∴$\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{5}$.

∴两边平方得：$1 - \sin2\theta = \frac{1}{25}$，

∴$\sin2\theta = \frac{24}{25}$.

∵ θ 是直角三角形中较小的锐角，

∴$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$，$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$.

∴$\cos2\theta = \sqrt{1-\sin^2 2\theta} = \frac{7}{25}$.

故答案为：$\frac{7}{25}$

14.（5 分）已知函数 f（x），g（x）分别由下表给出

x	1	2	3
f（x）	1	3	1
x	1	2	3
g（x）	3	2	1

则 f[g（1）]的值为__1__；满足 f[g（x）]＞g[f（x）]的 x 的值是__2__.

【解答】解：f[g（1）]=f（3）=1

当 x=1 时 f[g（1）]=1，g[f（1）]=g（1）=3 不满足 f[g（x）]＞g[f（x）]

当 x=2 时，f[g（2）]=f（2）=3，g[f（2）]=g（3）=1 满足 f[g（x）]＞g[f（x）]

当 x=3 时 f[g（3）]=f（1）=1，g[f（3）]=g（1）=3 不满足 f[g（x）]＞g[f（x）]

故满足 f[g（x）]＞g[f（x）]的 x 的值是 2

故答案为 1；2

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15．（13 分）数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+cn$（c 是常数，n=1，2，3，…），且 a_1，a_2，a_3成公比不为 1 的等比数列．

（1）求 c 的值；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式．

【解答】解：（1）$a_1=2$，$a_2=2+c$，$a_3=2+3c$，

因为 a_1，a_2，a_3成等比数列，

所以$(2+c)^2=2(2+3c)$，

解得 c=0 或 c=2．

当 c=0 时，$a_1=a_2=a_3$，不符合题意舍去，故 c=2．

（2）当 n≥2 时，由于 $a_2-a_1=c$，$a_3-a_2=2c$，$a_n-a_{n-1}=(n-1)c$，

所以$a_n-a_1=[1+2++(n-1)]c=\frac{n(n-1)}{2}c$．

又 $a_1=2$，c=2，故 $a_n=2+n(n-1)=n^2-n+2$（n=2，3，）．

当 n=1 时，上式也成立，

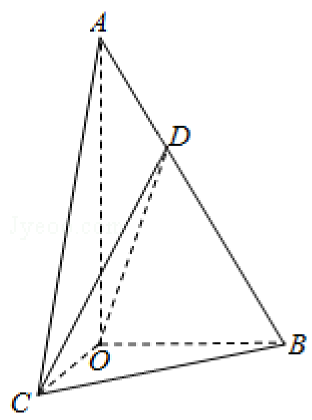
所以 $a_n=n^2-n+2$（n=1，2，）

16．（14 分）如图，在 Rt△AOB 中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边 AB=4．Rt△AOC 可以通过 Rt△AOB 以直线 AO 为轴旋转得到，且二面角 B－AO－C 是直二面角．动点 D 在斜边 AB 上．

（Ⅰ）求证：平面 COD⊥平面 AOB；

（Ⅱ）当 D 为 AB 的中点时，求异面直线 AO 与 CD 所成角的余弦值大小；

（Ⅲ）求 CD 与平面 AOB 所成角最大时的正切值大小．



【解答】解：（I）由题意，CO⊥AO，BO⊥AO，∴∠BOC 是二面角 B－AO－C 是直二面角，

又∵二面角 B－AO－C 是直二面角，

∴CO⊥BO，

又∵AO∩BO=O，

∴CO⊥平面 AOB，

又 CO⊂平面 COD，

∴平面 COD⊥平面 AOB．（4 分）

（II）解法一：作 DE⊥OB，垂足为 E，连接 CE（如图），则 DE∥AO，

∴∠CDE 是异面直线 AO 与 CD 所成的角．

在 Rt△COE 中，CO=BO=2，$OE=\frac{1}{2}BO=1$，

∴$CE=\sqrt{CO^2+OE^2}=\sqrt{5}$．

又$DE=\frac{1}{2}AO=\sqrt{3}$．

∴$CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=2\sqrt{2}$

∴在 Rt△CDE 中，$\cos\angle CDE=\frac{DE}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$．

∴异面直线 AO 与 CD 所成角的余弦值大小为$\frac{\sqrt{6}}{4}$．（9 分）

解法二：建立空间直角坐标系 O－xyz，如图，

则 O（0，0，0），$A(0,\ 0,\ 2\sqrt{3})$，C（2，0，0），$D(0,\ 1,\ \sqrt{3})$，

∴$\overrightarrow{OA}=(0,\ 0,\ 2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-2,\ 1,\ \sqrt{3})$，

∴$\cos<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{CD}>=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{6}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$．

∴异面直线 AO 与 CD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$．（9 分）

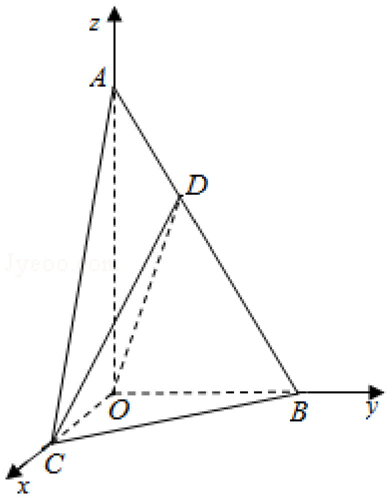
（III）由（I）知，CO⊥平面 AOB，

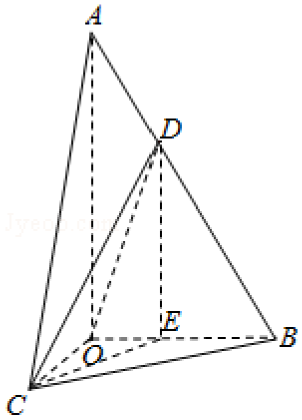
∴∠CDO 是 CD 与平面 AOB 所成的角，

且$\tan CDO=\frac{OC}{OD}=\frac{2}{OD}$．当 OD 最小时，∠CDO 最大，这时，OD⊥AB，垂足为 D，

$OD=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\sqrt{3}$，$\tan CDO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴CD 与平面 AOB 所成角的最大时的正切值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．（14 分）



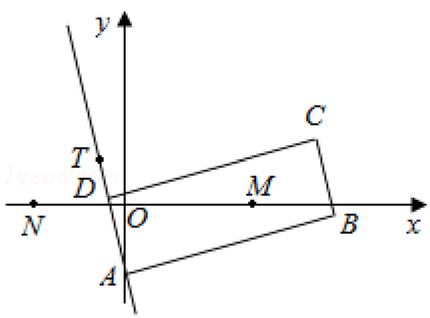


17.（14 分）如图，矩形 ABCD 的两条对角线相交于点 M（2，0），AB 边所在直线的方程为 x﹣3y﹣6=0 点 T（﹣1，1）在 AD 边所在直线上.

（Ⅰ）求 AD 边所在直线的方程；

（Ⅱ）求矩形 ABCD 外接圆的方程；

（Ⅲ）若动圆 P 过点 N（﹣2，0），且与矩形 ABCD 的外接圆外切，求动圆 P 的圆心的轨迹方程.



【解答】解：(I) 因为 AB 边所在直线的方程为 x﹣3y﹣6=0，且 AD 与 AB 垂直，所以直线 AD 的斜率为﹣3

又因为点 T（﹣1，1）在直线 AD 上，

所以AD边所在直线的方程为 $y-1=-3(x+1)$.

$3x+y+2=0$.

（II）由 $\begin{cases}x-3y-6=0\\3x+y+2=0\end{cases}$ 解得点A的坐标为（0，－2），

因为矩形ABCD两条对角线的交点为M（2，0）.

所以M为矩形ABCD外接圆的圆心.

又 $|AM|=\sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$.

从而矩形ABCD外接圆的方程为 $(x-2)^2+y^2=8$.

（III）因为动圆P过点N，所以|PN|是该圆的半径，又因为动圆P与圆M外切，

所以 $|PM|=|PN|+2\sqrt{2}$,

即 $|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$.

故点P的轨迹是以M，N为焦点，实轴长为 $2\sqrt{2}$ 的双曲线的左支.

因为实半轴长 $a=\sqrt{2}$，半焦距 $c=2$.

所以虚半轴长 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$.

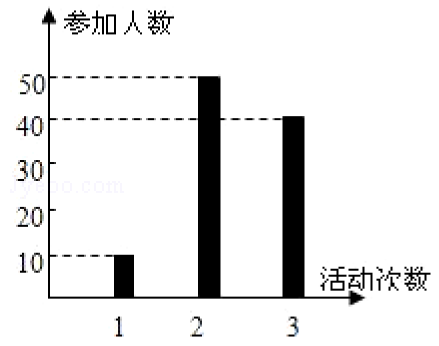
从而动圆P的圆心的轨迹方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1\ (x\leqslant-\sqrt{2})$.

18.（13分）某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动（以下简称活动）.该校合唱团共有100名学生，他们参加活动的次数统计如图所示.

（1）求合唱团学生参加活动的人均次数；

（2）从合唱团中任意选两名学生，求他们参加活动次数恰好相等的概率.

（3）从合唱团中任选两名学生，用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值，求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 Eξ.



【解答】解：由图可知，参加活动 1 次、2 次和 3 次的学生人数分别为 10、50 和 40.

（1）该合唱团学生参加活动的人均次数为

$\frac{1\times 10+2\times 50+3\times 40}{100}=\frac{230}{100}=2.3$.

（2）从合唱团中任选两名学生，他们参加活动次数恰好相等的概率为

$P_0=\frac{10\times 9+50\times 49+39\times 40}{100\times 99}=\frac{41}{99}$.

（3）从合唱团中任选两名学生，记“这两人中一人参加 1 次活动，另一人参加 2 次活动”为事件 A，“这两人中一人参加 2 次活动，另一人参加 3 次活动”为事件 B，“这两人中一人参加 1 次活动，另一人参加 3 次活动”为事件 C．易知

$P(\xi=1)=P(A)+P(B)=\frac{C_{10}^{1}C_{50}^{1}}{C_{100}^{2}}+\frac{C_{50}^{1}C_{40}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{50}{99}$;

$P(\xi=2)=P(C)=\frac{C_{10}^{1}C_{40}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{8}{99}$;

ξ 的分布列：

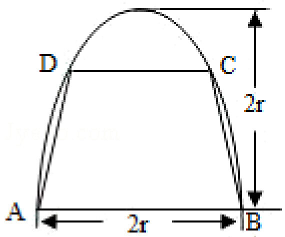
ξ	0	1	2
P	$\frac{41}{99}$	$\frac{50}{99}$	$\frac{8}{99}$

ξ 的数学期望：$E\xi=0\times\frac{41}{99}+1\times\frac{50}{99}+2\times\frac{8}{99}=\frac{2}{3}$.

19.（13 分）如图，有一块半椭圆形钢板，其半轴长为 2r，短半轴长为 r，计划将此钢板切割成等腰梯形的形状，下底 AB 是半椭圆的短轴，上底 CD 的端点在椭圆上，记 CD=2x，梯形面积为 S.

（Ⅰ）求面积 S 以 x 为自变量的函数式，并写出其定义域；

（Ⅱ）求面积 S 的最大值.



【解答】解：（I）依题意，以 AB 的中点 O 为原点建立直角坐标系 O﹣xy（如图），

则点 C 的横坐标为 x，

点 C 的纵坐标 y 满足方程$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4r^2}=1(y\geqslant 0)$，

解得$y=2\sqrt{r^2-x^2}(0<x<r)$ $S=\frac{1}{2}(2x+2r)\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}$

$=2(x+r)\cdot\sqrt{r^2-x^2}$，

其定义域为$\{x|0<x<r\}$．

（II）记 $f(x)=4(x+r)^2(r^2-x^2)$，$(0<x<r)$，

则 $f'(x)=8(x+r)^2(r-2x)$．

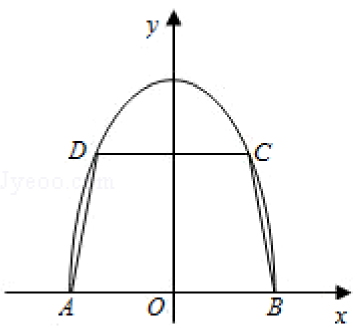
令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}r$．

因为当$0<x<\frac{r}{2}$时，$f'(x)>0$；当$\frac{r}{2}<x<r$时，

$f'(x)<0$，所以$f(\frac{1}{2}r)$是 $f(x)$ 的最大值．

因此，当 $x=\frac{1}{2}r$时，S 也取得最大值，最大值为$\sqrt{f(\frac{1}{2}r)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$．

即梯形面积 S 的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$．



20．（13 分）已知集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k(k\geqslant 2)\}$，其中 $a_i\in Z$（$i=1, 2, \cdots, k$），由 A 中的元素构成两个相应的集合：$S=\{(a, b)|a\in A, b\in A, a+b\in A\}$，$T=\{(a, b)|a\in A, b\in A, a-b\in A\}$．其中 (a, b) 是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n．若对于

任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P.

（Ⅰ）检验集合{0，1，2，3}与{－1，2，3}是否具有性质 P 并对其中具有性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T；

（Ⅱ）对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$；

（Ⅲ）判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.

【解答】（I）解：集合{0，1，2，3}不具有性质 P.

集合{－1，2，3}具有性质 P，其相应的集合 S 和 T 是

S={（－1，3），（3，－1）}，T={（2，－1），（2，3）}.

（II）证明：首先，由 A 中元素构成的有序数对（a_i，a_j）共有 k^2 个.

因为 $0\notin A$，所以（a_i，a_i）$\notin T$（i=1，2，k）；

又因为当 $a\in A$ 时，$-a\notin A$ 时，$-a\notin A$，

所以当（a_i，a_j）$\in T$ 时，（a_j，a_i）$\notin T$（i，j=1，2，k）.

从而，集合 T 中元素的个数最多为 $\frac{1}{2}(k^2-k)=\frac{k(k-1)}{2}$，

即 $n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

（III）解：m=n，证明如下：

（1）对于（a，b）$\in$S，根据定义，

$a\in A$，$b\in A$，且 $a+b\in A$，从而（a+b，b）$\in$T.

如果（a，b）与（c，d）是 S 的不同元素，

那么 a=c 与 b=d 中至少有一个不成立，

从而 a+b=c+d 与 b=d 中也至少有一个不成立.

故（a+b，b）与（c+d，d）也是 T 的不同元素.

可见，S 中元素的个数不多于 T 中元素的个数，即 $m\leqslant n$，

（2）对于（a，b）$\in$T，根据定义，$a\in A$，$b\in A$，

且 $a-b\in A$，从而（a－b，b）$\in$S.

如果（a，b）与（c，d）是 T 的不同元素，

那么 a=c 与 b=d 中至少有一个不成立，

从而 a－b=c－d 与 b=d 中也至少有一个不成立，

故（a－b，b）与（c－d，d）也是 S 的不同元素.

可见，T 中元素的个数不多于 S 中元素的个数，即 $n\leqslant m$，

由（1）（2）可知，m=n.

参与本试卷答题和审题的老师有：gongjy；caoqz；xintrl；xize；涨停；wu_qian；豫汝王世崇；ying_0011；wsj1012；sllwyn；wdnah；zlzhan；lily2011；wodeqing；yhx01248；danbo7801（排名不分先后）

菁优网

2017年5月26日