2000年天津高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题4分，满分48分）

1.（4分）设集合 $A=\{x\mid x\in Z$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in Z$，且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\bigcup B$ 中的元素个数是(　　)

A．11　　B．10　　C．16　　D．15

2.（4分）设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是任意的非零平面向量，且相互不共线，则(　　)

①$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}=0$；

②$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$；

③$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ 不与 $\vec{c}$ 垂直；

④$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=9|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$．

其中的真命题是(　　)

A．②④　　B．③④　　C．②③　　D．①②

3.（4分）一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体对角线的长是(　　)

A．$2\sqrt{3}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．6　　D．$\sqrt{6}$

4.（4分）已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是(　　)

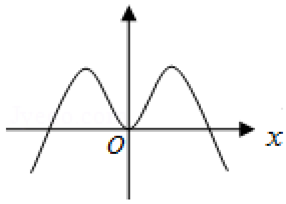
A．若 α、β 是第一象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

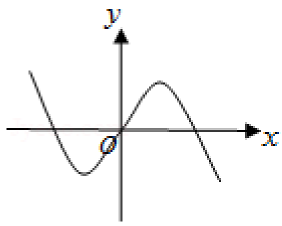
B．若 α、β 是第二象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

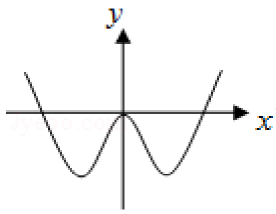
C．若 α、β 是第三象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

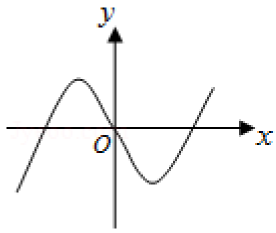
D．若 α、β 是第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5.（4分）函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

6.（4 分）《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于(　　)

A．$800\sim900$ 元　　B．$900\sim1200$ 元　　C．$1200\sim1500$ 元　　D．$1500\sim2800$ 元

7.（4 分）若 $a>b>1$，$P=\sqrt{lga \cdot lgb}$，$Q=\frac{1}{2}(lga+lgb)$，$R=lg\frac{a+b}{2}$，则(　　)

A．$R<P<Q$　　B．$P<Q<R$　　C．$Q<P<R$　　D．$P<R<Q$

8.（4 分）已知两条直线 $l_1: y=x$，$l_2: ax-y=0$，其中 a 为实数，当这两条直线的夹角在 $(0,\frac{\pi}{12})$ 内变动时，a 的取值范围是(　　)

A．$(0,1)$　　B．$(\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{3})$　　C．$(\frac{\sqrt{3}}{3}$，$1)\cup(1$，$\sqrt{3})$　D．$(1,\sqrt{3})$

9.（4 分）一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是(　　)

A．$\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　B．$\frac{1+4\pi}{4\pi}$　　C．$\frac{1+2\pi}{\pi}$　　D．$\frac{1+4\pi}{2\pi}$

10.（4 分）过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切，若切点在第三象限，则该直线的方

程是(　　)

A. $y=\sqrt{3}x$　　B. $y=-\sqrt{3}x$　　C. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　D. $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11.（4 分）过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P 、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p 、q ，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于(　　)

A. $2a$　　B. $\frac{1}{2a}$　　C. $4a$　　D. $\frac{4}{a}$

12.（4 分）二项式 $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}x)^{50}$ 的展开式中系数为有理数的项共有(　　)

A. 6 项　　B. 7 项　　C. 8 项　　D. 9 项

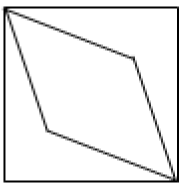
二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13.（5 分）从含有 500 个个体的总体中一次性抽取 25 个个体，假定其中每个个体被抽到的概率相等，那么总体中每个个体被抽到的概率是 _____.

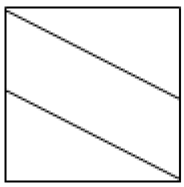
14.（5 分）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1 、F_2 ，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是_____.

15.（5 分）设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n=1，2，3，\ldots)$，则它的通项公式是 $a_n=$_____.

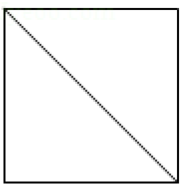
16.（5 分）如图，E 、F 分别是正方体的面 ADD_1A_1 、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____.（要求：把可能的图的序号都填上）



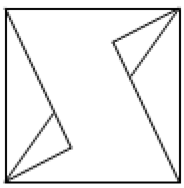
(1)



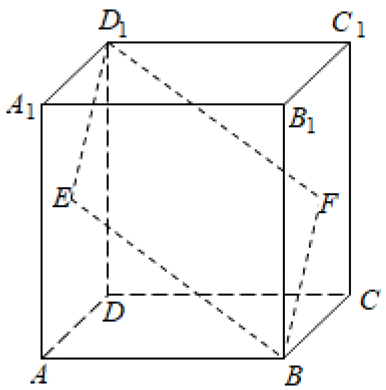
(2)



(3)



(4)



三、解答题（共 7 小题，满分 82 分）

17.（10 分）甲、乙二人参加普法知识竞答，共有 10 个不同的题目，其中选择题 6 个，判

断题 4 个．甲、乙二人依次各抽一题．

（1）甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少？

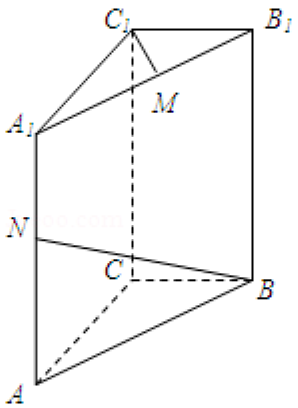
（2）甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少？

18．（12 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面 ΔABC 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，棱 $AA_1=2$，M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点．

（1）求 $\overrightarrow{BN}$ 的长；

（2）求 $\cos(\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1})$ 的值；

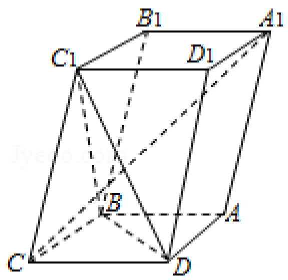
（3）求证 $A_1B\perp C_1M$．



19．（12 分）如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$，

（1）证明：$C_1C\perp BD$；

（2）当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD？请给出证明．



20．（12 分）设 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_7=7$，$S_{15}=75$，T_n 为数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和，求 T_n．

21．（12 分）设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$，

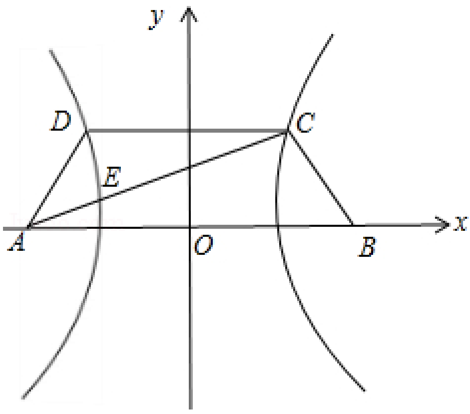
（1）解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

（2）证明：当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0，+\infty)$ 上是单调函数．

22．（12 分）用总长 $14.8m$ 的钢条制成一个长方体容器的框架，如果所制做容器的底面的一边比另一边长 $0.5m$，那么高为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积．

23．（12 分）如图，已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$，点 E 分有向线段 $\overline{AC}$ 所成的比为 $\dfrac{8}{11}$，双曲线过 C、D、E

三点，且以 A、B 为焦点．求双曲线的离心率．



2000 年天津市高考数学试卷（文）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

1．（4 分）设集合 $A=\{x\mid x\in Z$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in Z$，且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\bigcup B$ 中的元素个数是(　　)

A．11　　B．10　　C．16　　D．15

【解答】解：由集合 A 中的条件可得 A 中的元素有：-10，-9，-8，$\ldots$，-1 共 10 个；

集合 B 中的不等式 $|x|\leqslant 5$ 解得 $-5\leqslant x\leqslant 5$ 且 $x\in Z$，所以 B 中的元素有：-5，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4，5 共 11 个

所以 $A\bigcup B$ 中的元素有：-10，-9，-8，$\ldots$，-1，0，1，2，3，4，5 共 16 个

故选：C．

2．（4 分）设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是任意的非零平面向量，且相互不共线，则(　　)

①$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}=0$；

②$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$；

③$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ 不与 $\vec{c}$ 垂直；

④$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=9|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$．

其中的真命题是(　　)

A．②④　　B．③④　　C．②③　　D．①②

【解答】解：由于 $\vec{b},\vec{c}$ 是不共线的向量，因此 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ 不一定等于 $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$，故①错误；

由于 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，故 $\vec{a},\vec{b},(\vec{a}-\vec{b})$ 构成三角形，因此②正确；

由于 $[(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]\cdot\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$，故③中两向量垂直，故③错误；

根据向量数量积的运算可以得出④是正确的．故选 A．

3．（4 分）一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体对角线的长是(　　)

A．$2\sqrt{3}$　　　　　　B．$3\sqrt{2}$　　　　　　C．6　　　　　　D．$\sqrt{6}$

【解答】解：设长方体三度为x，y，z，

则$yz=\sqrt{2},zx=\sqrt{3},xy=\sqrt{6}$．

三式相乘得$x^2y^2z^2=6,xyz=\sqrt{6},x=\sqrt{3},y=\sqrt{2},z=1,\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3+2+1}=\sqrt{6}$．

故选：D．

4．（4分）已知$\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是(　　)

A．若α、β是第一象限角，则$\cos\alpha>\cos\beta$

B．若α、β是第二象限角，则$\tan\alpha>\tan\beta$

C．若α、β是第三象限角，则$\cos\alpha>\cos\beta$

D．若α、β是第四象限角，则$\tan\alpha>\tan\beta$

【解答】解：若α、β同属于第一象限，则$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha<\cos\beta$；故$A$错．

第二象限，则$\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$，$\tan\alpha<\tan\beta$；故$B$错．

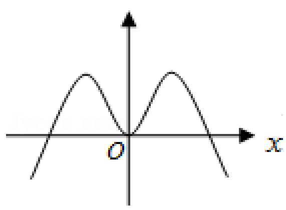
第三象限，则$\pi\leqslant\alpha<\beta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$，$\cos\alpha<\cos\beta$；故$C$错．

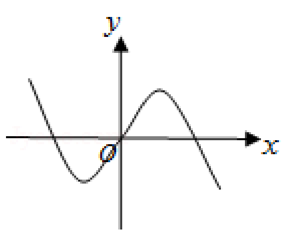
第四象限，则$\dfrac{3\pi}{2}\leqslant\beta<\alpha\leqslant2\pi$，

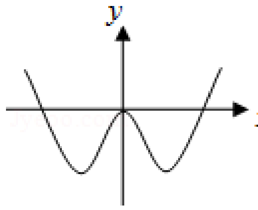
$\tan\alpha>\tan\beta$．（均假定$0\leqslant\alpha$，$\beta\leqslant2\pi$．）故D正确．

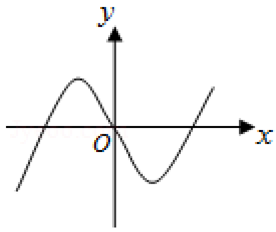
故选：D．

5．（4分）函数$y=-x\cos x$的部分图象是(　　)

A．

B．

C. 

D. 

【解答】解：设 $y=f(x)$，则 $f(-x)=x\cos x=-f(x)$， $f(x)$ 为奇函数；

又 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时 $f(x)<0$，此时图象应在 x 轴的下方

故选：D．

6．（4 分）《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于(　　)

A．$800\sim 900$ 元　B．$900\sim 1200$ 元　C．$1200\sim 1500$ 元　D．$1500\sim 2800$ 元

【解答】解：设收入为 S 元，税款为 M 元，则

当 $S\leqslant 800$ 时， $M=0$；

当 $S\in[800，1300]$ 时， $M\leqslant 500\bullet 5\%=25$；

当 $S\in(1300，2800]$ 时， $M\leqslant 25+1500\bullet 10\%=175$．

题设 $M=26.78$，

故 $S=1300+(26.78-25)\div 10\%=1317.8$．

故选：C．

7．（4 分）若 $a>b>1$， $P=\sqrt{lga\bullet lgb}$， $Q=\dfrac{1}{2}(lga+lgb)$， $R=lg\dfrac{a+b}{2}$，则(　　)

A．$R<P<Q$　B．$P<Q<R$　C．$Q<P<R$　D．$P<R<Q$

【解答】解：由平均不等式知$\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2},lg\sqrt{ab}<lg(\dfrac{a+b}{2}),Q<R$.

同理$\sqrt{lga\bullet lgb}<\dfrac{lga+lgb}{2},P<Q$.

故选：B.

8．（4分）已知两条直线$l_1:y=x$，$l_2:ax-y=0$，其中a为实数，当这两条直线的夹角在$(0,\dfrac{\pi}{12})$内变动时，a的取值范围是$($　　$)$

A．$(0,1)$　　B．$(\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{3})$　　C．$(\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$1)\cup(1$，$\sqrt{3})$　　D．$(1,\sqrt{3})$

【解答】解：直线$l_1:y=x$的倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$，令直线$l_2:ax-y=0$的倾斜角为θ，则有$a=\tan\theta$

$\therefore$过原点的直线$l_1:y=x$，$l_2:ax-y=0$的夹角在$(0,\dfrac{\pi}{12})$内变动时，可得直线l_2的倾斜角的范围是$(\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{4})\cup(\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{3})$.

$\therefore l_2$的斜率的取值范围是$(\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$1)\cup(1$，$\sqrt{3})$，即$a\in(\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$1)\cup(1$，$\sqrt{3})$，

故选：C.

9．（4分）一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是$($　　$)$

A．$\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$　　B．$\dfrac{1+4\pi}{4\pi}$　　C．$\dfrac{1+2\pi}{\pi}$　　D．$\dfrac{1+4\pi}{2\pi}$

【解答】解：设圆柱底面积半径为r，则高为$2\pi r$，

全面积：侧面积$=[(2\pi r)^2+2\pi r^2]:(2\pi r)^2$

$=\dfrac{2\pi+1}{2\pi}$.

故选：A.

10．（4分）过原点的直线与圆$x^2+y^2+4x+3=0$相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是$($　　$)$

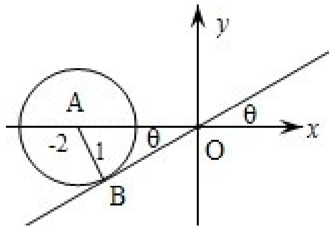
A．$y=\sqrt{3}x$　　B．$y=-\sqrt{3}x$　　C．$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　　D．$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

【解答】解：如图，圆方程为$(x+2)^2+y^2=1^2$，

圆心为$A(-2,0)$，半径为1，

$\sin\theta=\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{\pi}{6},tg\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：C．



11．（4 分）过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P 、 Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p 、 q ，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于(　　)

A． $2a$　　B． $\frac{1}{2a}$　　C． $4a$　　D． $\frac{4}{a}$

【解答】解：如图：

设 PQ 直线方程是 $y-\frac{1}{4a}=kx$ ，

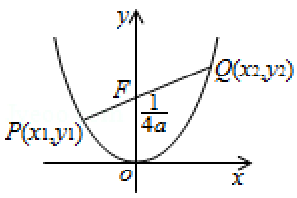
则 x_1 ， x_2 是方程 $ax^2=kx+\frac{1}{4a}$ 的两根，

$p=\sqrt{x_1^2+(y_1-\frac{1}{4a})^2}=\sqrt{x_1^2+(kx_1)^2}=-x_1r$ ，

其中 $r=\sqrt{1+k^2}$ ．同理 $q=x_2r$ ．

从而 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=\frac{(x_2-x_1)r}{-x_1x_2r^2}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2r}=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2r}=\frac{\sqrt{(\frac{k}{a})^2+4\bullet\frac{1}{4a^2}}}{\frac{1}{4a^2}\bullet r}=4a$ ．

故选：C．



12．（4 分）二项式 $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}x)^{50}$ 的展开式中系数为有理数的项共有(　　)

A．6 项　　B．7 项　　C．8 项　　D．9 项

【解答】解： $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}x)^{50}$ 展开式的通项 $T_{r+1}=2^{25-\frac{r}{2}}3^{\frac{r}{3}}C_{50}^{r}x^{r}$

项的系数为 $2^{25-\frac{r}{2}}3^{\frac{r}{3}}C_{50}^{r}$

要使系数为有理数，需 r 是 6 的倍数

所以 $r=0$ ，6，12，18，24，30，36，42，48，

故展开式中系数为有理数的项共有 9 项

故选：D.

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13.（5 分）从含有 500 个个体的总体中一次性抽取 25 个个体，假定其中每个个体被抽到的概率相等，那么总体中每个个体被抽到的概率是 $\underline{\frac{1}{20}}$.

【解答】解：$\because$ 含有 500 个个体的总体中一次性抽取 25 个个体，

其中每个个体被抽到的概率相等，

$\therefore$ 总体中每个个体被抽到的概率是 $\frac{25}{500}=\frac{1}{20}$，

故答案为：$\frac{1}{20}$.

14.（5 分）椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点 F_1、F_2，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是__为：$(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5})$__.

【解答】解：如图，

设 $p(x,y)$，则 $F_1(-\sqrt{5},0),F_2(\sqrt{5},0)$，

且 $\angle F_1PF_2$ 是钝角

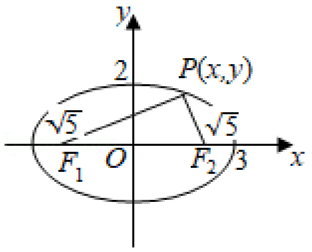
$\Leftrightarrow PF_1^2+PF_2^2<F_1F_2^2\Leftrightarrow(x+\sqrt{5})^2+y^2+(x-\sqrt{5})^2+y^2<20$

$\Leftrightarrow x^2+5+y^2<10$

$\Leftrightarrow x^2+4(1-\frac{x^2}{9})<5$

$\Leftrightarrow x^2<\frac{9}{5}\Leftrightarrow-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x<\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5})$.



15.（5 分）设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n=1，2，3，\ldots)$，

则它的通项公式是 $a_n=$__$\frac{1}{n}$__.

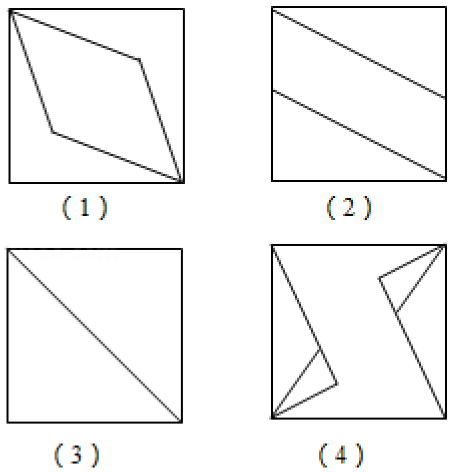
【解答】解：$\because (n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$

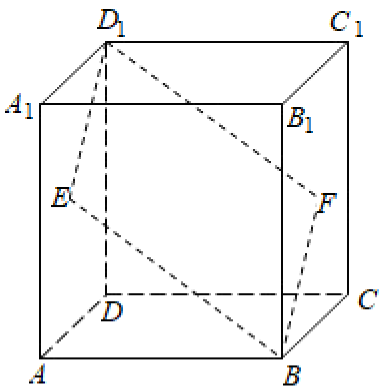
$\therefore a_{n+1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n(n+1)}}{2(n+1)}a_n=\frac{n}{n+1}a_n$（另解 $-a_n$ 不合题意舍去），

$\therefore \frac{a_2}{a_1}\bullet\frac{a_3}{a_2}\ldots\bullet\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{n}$，即 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n},a_n=\frac{1}{n},n=1,2$，

故答案为：$\frac{1}{n}$.

16.（5 分）如图，E、F 分别是正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是__②③__.（要求：把可能的图的序号都填上）





【解答】解：因为正方体是对称的几何体，

所以四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可分为：上下、左右、前后三个方向的射影，

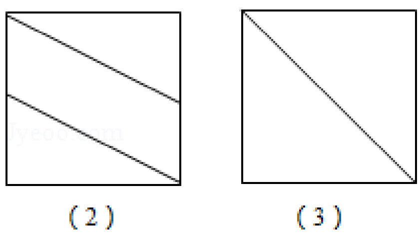
也就是在面 $ABCD$、面 ABB_1A_1、面 ADD_1A_1 上的射影.

四边形 BFD_1E 在面 $ABCD$ 和面 ABB_1A_1 上的射影相同，如图②所示；

四边形 BFD_1E 在该正方体对角面的 ABC_1D_1 内，它在面 ADD_1A_1 上的射影显然是一条线段，

如图③所示．故②③正确

故答案为　②③



三、解答题（共 7 小题，满分 82 分）

17．（10 分）甲、乙二人参加普法知识竞答，共有 10 个不同的题目，其中选择题 6 个，判断题 4 个．甲、乙二人依次各抽一题．

（1）甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少？

（2）甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少？

【解答】解：（1）由题意知本题是一个等可能事件的概率，

甲从选择题中抽到一题的可能结果有 C_6^1 个，乙依次从判断题中抽到一题的可能结果有 C_4^1 个，

故甲抽到选择题、乙依次抽到判断题的可能结果有 $C_6^1C_4^1$ 个；

试验发生包含的所有事件是甲、乙依次抽一题的可能结果有概率为 $C_{10}^1C_9^1$ 个，

$\therefore$ 甲抽到选择题、乙依次抽到判断题的概率为 $\dfrac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{4}{15}$，

$\therefore$ 所求概率为 $\dfrac{4}{15}$．

（2）甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的对立事件是甲、乙二人依次都抽到判断题，

$\because$ 甲、乙二人依次都抽到判断题的概率为 $\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^1C_9^1}$，

$\therefore$ 甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率为 $1-\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{13}{15}$，

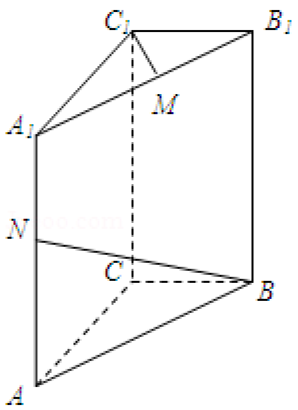
$\therefore$ 所求概率为 $\dfrac{13}{15}$．

18．（12 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面 ΔABC 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，棱 $AA_1=2$，M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点．

（1）求 $\overrightarrow{BN}$ 的长；

（2）求 $\cos(\overrightarrow{BA_1}\bullet\overrightarrow{CB_1})$ 的值；

（3）求证 $A_1B\perp C_1M$．



【解答】解：如图，以 C 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

（1）依题意得 $B(0，1，0)$， $N(1，0，1)$，

$\therefore |\overrightarrow{BN}|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$ （2 分）

（2）依题意得 $A_1(1，0，2)$， $B(0，1，0)$， $C(0，0，0)$， $B_1(0，1，2)$.

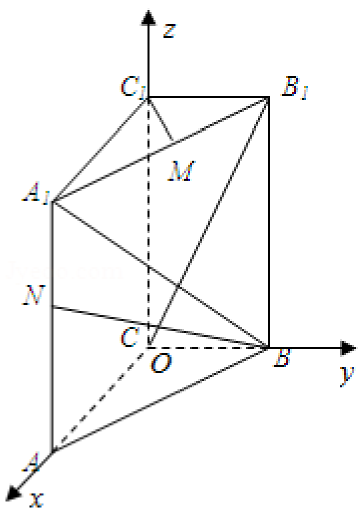
$\therefore \overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2)$， $\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$， $\overrightarrow{BA_1}\bullet\overrightarrow{CB_1}=3$， $|\overrightarrow{BA_1}|=\sqrt{6}$， $|\overrightarrow{CB_1}|=\sqrt{5}$ （5 分）

$\therefore \cos<\overrightarrow{BA_1}\bullet\overrightarrow{CB_1}>=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}\bullet\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}|\bullet|\overrightarrow{CB_1}|}=\dfrac{1}{10}\sqrt{30}$ （9 分）

（3）证明：依题意得 $C_1(0，0，2)$， $M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2)\overrightarrow{A_1B}=(-1，1，-2)$， $\overrightarrow{C_1M}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1B}\bullet\overrightarrow{C_1M}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+0=0$，

$\therefore \overrightarrow{A_1B}\perp\overrightarrow{C_1M}$ （12 分）

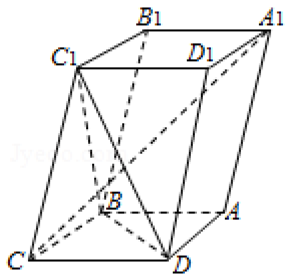


19．（12 分）如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形，且

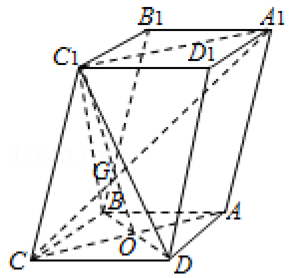
$\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$，

（1）证明：$C_1C\perp BD$；

（2）当$\dfrac{CD}{CC_1}$的值为多少时，能使$A_1C\perp$平面C_1BD？请给出证明．



【解答】(1）证明：如图，连接A_1C_1、AC和BD交于O，连接C_1O．



$\because$四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，$BC=CD$．

又$\because \angle BCC_1=\angle DCC_1$，$C_1C=C_1C$，

$\therefore\triangle C_1BC\cong\triangle C_1DC$，

$\therefore C_1B=C_1D$，

$\because DO=OB$

$\therefore C_1O\perp BD$，（3 分）

又$AC\perp BD$，$AC\bigcap C_1O=O$，

$\therefore BD\perp$平面AC_1，

又$C_1C\subset$平面AC_1，

$\therefore C_1C\perp BD$．（6 分）

（2）当$\dfrac{CD}{CC_1}=1$时，能使$A_1C\perp$平面C_1BD．

$\because \dfrac{CD}{CC_1}=1$，

$\therefore BC=CD=C_1C$，

又$\angle BCD=\angle C_1CB=\angle C_1CD$，

由此可推得$BD=C_1B=C_1D$．

$\therefore$三棱锥$C-C_1BD$是正三棱锥．（9 分）

设A_1C与C_1O相交于G．

$\because A_1C_1//AC$，且$A_1C_1:OC=2:1$，

$\therefore C_1G:GO=2:1$．

又C_1O是正三角形C_1BD的BD边上的高和中线，

$\therefore$点G是正三角形C_1BD的中心，

$\therefore CG\perp$平面C_1BD，

即$A_1C\perp$平面C_1BD．（12 分）

20．（12 分）设$\{a_n\}$为等差数列，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$S_7=7$，$S_{15}=75$，T_n为数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$的前$n$项和，求$T_n$．

【解答】解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则

$S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$．

$\because S_7=7$，$S_{15}=75$，

$\therefore \begin{cases}7a_1+21d=7\\15a_1+105d=75.\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1+3d=1\\a_1+7d=5.\end{cases}$

解得$a_1=-2$，$d=1$．

$\therefore \dfrac{S_n}{n}=a_1+\dfrac{1}{2}(n-1)d=-2+\dfrac{1}{2}(n-1)$，

$\because \dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，其首项为 -2，公差为 $\dfrac{1}{2}$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{4}n^2-\dfrac{9}{4}n$.

21．（12 分）设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$，

（1）解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

（2）证明：当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0，+\infty)$ 上是单调函数.

【解答】（1）解：不等式 $f(x)\leqslant 1$ 即 $\sqrt{x^2+1}\leqslant 1+ax$，

由此得 $1\leqslant 1+ax$，即 $ax\geqslant 0$，其中常数 $a>0$.

所以，原不等式等价于 $\begin{cases}x^2+1\leqslant (1+ax)^2\\ x\geqslant 0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ (a^2-1)x+2a\geqslant 0\end{cases}$（3 分）

所以，当 $0<a<1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant \dfrac{2a}{1-a^2}\}$；

当 $a\geqslant 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 0\}$.（6 分）

（2）证明：在区间 $[0，+\infty)$ 上任取 x_1，x_2

使得 $x_1<x_2 f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$

$=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$

$=(x_1-x_2)\left(\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right)\cdot(9分)$

$\because \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1,且a\geqslant 1$，

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$，

又 $x_1-x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以，当 $a\ldots 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0，+\infty)$ 上是单调递减函数.（12 分）

22.（12 分）用总长 $14.8m$ 的钢条制成一个长方体容器的框架，如果所制做容器的底面的一边比另一边长 $0.5m$，那么高为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积.

【解答】解：设容器底面短边长为 xm，则另一边长为 $(x+0.5)m$，

高为 $\dfrac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=3.2-2x$

由 $3.2-2x>0$ 和 $x>0$，得 $0<x<1.6$，

设容器的容积为 ym^3，则有 $y=x(x+0.5)(3.2-2x)(0<x<1.6)$

整理，得 $y=-2x^3+2.2x^2+1.6x$，（4 分）

$\therefore y'=-6x^2+4.4x+1.6$（6 分）

令 $y'=0$，有 $-6x^2+4.4x+1.6=0$，即 $15x^2-11x-4=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{4}{15}$（不合题意，舍去）.（8 分）

从而，在定义域 $(0,1.6)$ 内只有在 $x=1$ 处使 $y'=0$.

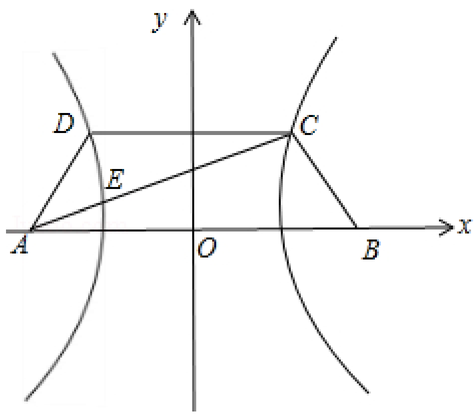
由题意，若 x 过小（接近 $0)$ 或过大（接近 $1.6)$ 时，y 值很小（接近 $0)$，

因此，当 $x=1$ 时 y 取得最大值，$y_{最大值}=-2+2.2+1.6=1.8$，这时，高为 $3.2-2\times 1=1.2$.

答：容器的高为 $1.2m$ 时容积最大，最大容积为 $1.8m^3$.（12 分）

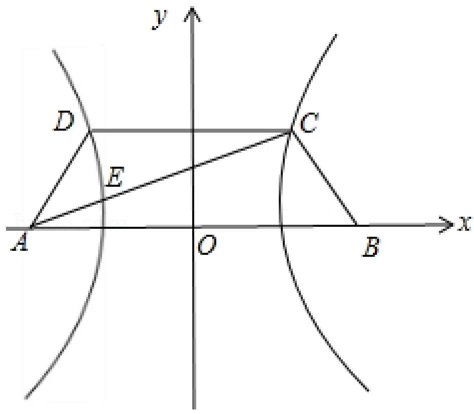
23.（12 分）如图，已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB|=2|CD|$，点 E 分有向线段 $\overline{AC}$ 所成的比为 $\dfrac{8}{11}$，双曲线过 C、D、E

三点，且以 A、B 为焦点．求双曲线的离心率.



【解答】解：如图，以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系 xOy，

则 $CD\perp y$ 轴.



因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于 y 轴对称.（2 分）

依题意，记 $A(-c,0)$，$C(\frac{c}{2}，h)$，$B(c,0)$，

其中 c 为双曲线的半焦距，$c=\frac{1}{2}|AB|$，h 是梯形的高.

由定比分点坐标公式，得点 E 的坐标为 $x_E=\dfrac{-c+\frac{8}{11}\times\frac{c}{2}}{1+\frac{8}{11}}=-\frac{7}{19}c$，$y_E=\dfrac{0+\frac{8}{11}\times h}{1+\frac{8}{11}}=\frac{8}{19}h$.（5 分）

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则离心率 $e=\frac{c}{a}$.

由点 C、E 在双曲线上，

得 $\begin{cases}\frac{1}{4}\bullet\frac{c^2}{a^2}-\frac{h^2}{b^2}=1\\ \frac{49}{361}\bullet\frac{c^2}{a^2}-\frac{64}{361}\bullet\frac{h^2}{b^2}=1.\end{cases}$（10 分）

解得$\frac{h^2}{b^2}=\frac{1}{4}\bullet\frac{c^2}{a^2}-1$，化简可得$\frac{c^2}{a^2}=9$，

所以，离心率$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=3$（14分）