2013 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷理科）

[学科网试卷总评]

2013 年安徽理科卷比 2012 年安徽理科卷的难度还要大一些，整体试卷出的水平比较高，区分度大，能够很好的拉开差距，尤其是选择题第 5，8，9，10 题，填空题第 14，15 题，解答题第 20，21 题.

从试卷命题特点方面：（1）对主干知识（函数、数列、圆锥曲线、立体几何、三角函数、概率统计）的重点考查，尤其是函数，考了三道小题，一道大题，而且函数小题三道都需要去思考，不能一步就能算出；（2）注重能力的考查：一方面在知识的交汇处命题，如第 9，14，20 题；另一方面重视对数学能力和思想方法的考查，如计算能力考查（第 1，13，18 题），转化思想的考查（第 8，10，17 题），数形结合的考查（第 4，8，9，10，14 题）等等；（3）注重理论联系实际，如第 21 题概率统计；（4）注重对创新意识的考查，如第 17，20 题；（5）注重对课本知识的考查，如第 3，5 题.

从试卷难度方面：选择填空的每道题都需要思考一下或稍微计算才能得出答案.第 1 题考查共轭复数的概念，复数的运算，难度不大；第 2 题考查程序框图，简单；第 3 题考查点、直线、面位置关系的相关公理和定理；第 4 题充分必要条件以及含绝对值函数单调性的考查；第 5 题考查几种抽样方法以及方差和平均数的概念；第 6 题考查一元二次不等式和指数的运算性质，第 7 题极坐标的概念，简单；第 8 题考查函数转化思想以及数形结合，难度很大，考生不一定能想到方法；第 9 题考查向量的几何意义以及与线性规划的综合；第 10 题函数零点的考查，难度很大，不容易做好.第 11 题二项式定理的相关运算，简答题；第 12 题三角函数，对正弦余弦定理的考查，计算量大；第 13 题考查圆锥曲线的概念和性质，解决圆锥曲线的坐标方法和几何意义；第 14 题考查数列与平面几何的综合，了解题意，做起来不难；第 15 题立体几何的截面问题，是考生平时学习中最不容易弄明白的地方.大题第 16 题三角函数：容易，主要考查恒等变形，三角函数图像变换；大题第 17 题函数：题型新颖，考查考生对新问题冷静处理的能力，对区间长度的准确理解；大题第 18 题：圆锥曲线，难度较大，计算量大，点比较多，也容易把考生绕进去，要将这题做好，需要一定的计算基本功；大题第 19 题立体几何，图形新颖，迷惑性大，考查点、直线、面的位置关系，非常规，以及对几何图形的认识和把握；大题 20 题数列证明题，难度极大，考查了数列与函数的综合，含双变量，考生在做的时候，不能有效的把握好，同时还考查了常见的放缩方法；大题第 21 题：概率压轴题，意思难懂，计算了较大，还考查了分类讨论思想.

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

一．选择题选择题：本大题共 10 小题.每小题 5 分，共 50 分.在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设 i 是虚数单位，$\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数，若 $z\cdot\bar{z}i+2=2z$，则 z =（　）

（A）$1+i$　　（B）$1-i$　　（C）$-1+i$　　（D）$-1-i$

【答案】 A

【解析】 令 $z=a+bi, z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$，

由 $z\cdot\bar{z}i+2=2z$ 即

$(a^2+b^2)i+2=2(a+bi)=2a+2bi$

所以 $\left.\begin{matrix} 2=2a \\ a^2+b^2=2b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a=1, b=1$

故选择 A

【学科网考点定位】 考查复数的运算，共轭复数的概念，以及复数相等问题.

（2）如图所示，程序框图（算法流程图）的输出结果是（　）

（A）$\dfrac{1}{6}$　　（B）$\dfrac{25}{24}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{11}{12}$

第（2）题图

【答案】 D

【解析】$n=2,s=0,s=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

$n=4,s=\frac{1}{2},s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$；

$n=6,s=\frac{3}{4},s=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

$n=8,s=\frac{11}{12}$，输出

所以答案选择 D

【学科网考点定位】本题考查算法框图的识别，逻辑思维，属于中等难题.

（3）在下列命题中，不是公理的是（　　）

（A）平行于同一个平面的两个平面相互平行

（B）过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面

（C）如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在此平面内

（D）如果两个不重合的平面有一个公共点，那么他们有且只有一条过该点的公共直线

【答案】A

【解析】A 选项是证明平面平行的一个定理，而 B,C,D 是课本上的定理，体现了高考不脱离课本.

【学科网考点定位】公理与定理的概念，对课本知识的熟练程度.

（4）“$a\le 0$”“是函数 $f(x)=|(ax-1)x|$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增”的（　　）

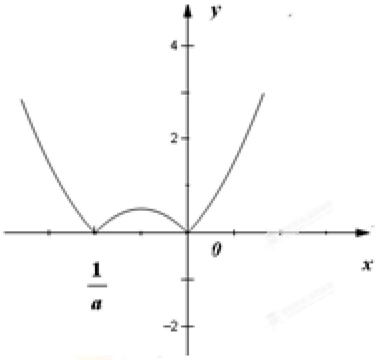
（A）　充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）　充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

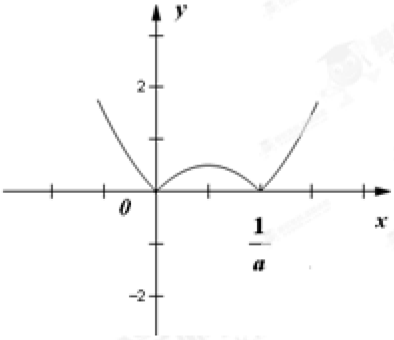
【答案】C

【解析】$f(x)=|(ax-1)x|=|ax^2-x|$，令 $ax^2-x=0$，解得 $x_1=0,x_2=\frac{1}{a}$

当 $a\le 0$，$f(x)$ 的图像如下图



当$a>0$，$f(x)$的图像如下图



由上两图可知，是充要条件

【学科网考点定位】考查充分条件和必要条件的概念，以及函数图像的画法.

（5）某班级有 50 名学生，其中有 30 名男生和 20 名女生，随机询问了该班五名男生和五名女生在某次数学测验中的成绩，五名男生的成绩分别为 86,94,88,92,90，五名女生的成绩分别为 88,93,93,88,93.下列说法一定正确的是（　　）

（A）这种抽样方法是一种分层抽样

（B）这种抽样方法是一种系统抽样

（C）这五名男生成绩的方差大于这五名女生成绩的方差

（D）该班级男生成绩的平均数小于该班女生成绩的平均数

【答案】C

【解析】一般地，在抽样时，将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样的方法叫分层抽样.分层抽样又称类型抽样，应用分层抽样应遵循以下要求：（1）分层：将相似的个体归人一类，即为一层，分层要

求每层的各个个体互不交叉，即遵循不重复、不遗漏的原则.（2）分层抽样为保证每个个体等可能入样，需遵循在各层中进行简单随机抽样，每层样本数量与每层个体数量的比与这层个体数量与总体容量的比相等，则可知 A 错误，

一般地，要从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本，可将总体分成均衡的若干部分，然后按照预先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到所需要的样本，这种抽样的方法叫做系统抽样.则 B 不正确，经过计算可知 C 正确.

【学科网考点定位】抽样方法以及平均数与方差.

（6）已知一元二次不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\left\{x\,|\,x<-1或x>\frac{1}{2}\right\}$，则 $f(10^x)>0$ 的解集为（　　）

（A）$\{x\,|\,x<-1或x>-\lg 2\}$　　　（B）$\{x\,|-1<x<-\lg 2\}$

(C) $\{x\,|\,x>-\lg 2\}$　　　(D) $\{x\,|\,x<-\lg 2\}$

【答案】D

【解析】由一元二次不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\left\{x\,|\,x<-1或x>\frac{1}{2}\right\}$，可以设函数解析式为：

$f(x)=(-x-1)(x-\frac{1}{2})<0$，将 $f(10^x)>0$ 代入得 $(10^x+1)(10^x-\frac{1}{2})<0$，由指数函数的值域可得，

$10^x-\frac{1}{2}<0\Rightarrow x<-\lg 2$，则 D 正确.

【学科网考点定位】一元二次不等式与指数不等式的考察.

（7）在极坐标系中，圆 $\rho=2\cos\theta$ 的垂直于极轴的两条切线方程分别为（　　　）

（A）$\theta=0(\rho\in R)$ 和 $\rho\cos\theta=2$　　　（B）$\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in R)$ 和 $\rho\cos\theta=2$

（C）$\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in R)$ 和 $\rho\cos\theta=1$　　　（D）$\theta=0(\rho\in R)$ 和 $\rho\cos\theta=1$

【答案】B

【解析】将圆 $\rho=2\cos\theta$ 转化为直角坐标系方程：$x^2+y^2=2x$，可求的垂直与 x 轴的方程为

$x=0和x=2$ 再将 $x=0和x=2$ 转化为极坐标系方程为：

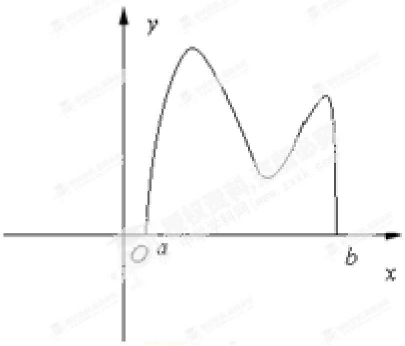
$\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in R)$ 和 $\rho\cos\theta=2$

【学科网考点定位】极坐标与直角坐标系的相互转化，极坐标运算.

(8) 函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\geq 2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值范围为（　　）

(A) $\{2,3\}$　　(B) $\{2,3,4\}$

(C) $\{3,4\}$　　(D) $\{3,4,5\}$



【答案】 B

【解析】

$\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_1)-0}{x_1-0}$ 表示 $(x_1, f(x_1))$ 到原点的斜率；

$\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$ 表示 $(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2)),\cdots,(x_n, f(x_n))$ 与原点连线的斜率，而 $(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2)),\cdots,(x_n, f(x_n))$ 在曲线图像上，故只需考虑经过原点的直线与曲线的交点有几个，很明显有 3 个，故选 B.

【学科网考点定位】 考查数学中的转化思想，对函数的图像认识.

（9）在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A,B 满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集 $\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leq 1,\lambda,\mu\in R\}$ 所表示的区域的面积是（　　）

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）$4\sqrt{2}$　　（D）$4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】$\left|\vec{OA}\right|=\left|\vec{OB}\right|=\vec{OA}\cdot\vec{OB}=2$，则知 ΔOAB 是等边三角形，以 O 为直角坐标系原点，OA 在 x 轴，则 $A(2,0),B(1,\sqrt{3})$，

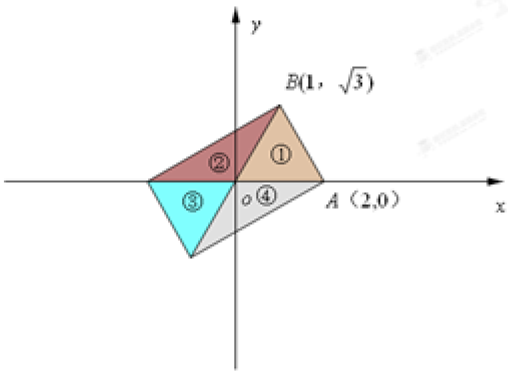
当 $\lambda>0,\mu>0$， P 表示的区域是下图中的①；

当 $\lambda<0,\mu>0$， P 表示的区域是下图中的②；

当 $\lambda<0,\mu<0$， P 表示的区域是下图中的③；

当 $\lambda>0,\mu<0$， P 表示的区域是下图中的④；

则 P 表示的区域就是图中的平行四边形，其面积为 $S=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$



【学科网考点定位】考查平面向量的概念，平面向量基本定理，以及线性规划面积，以及考查逻辑思维能力和转化思想.

（10）若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值点 x_1,x_2，且 $f(x_1)=x_1$，则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数是（　　）

（A）3　　　　（B）4

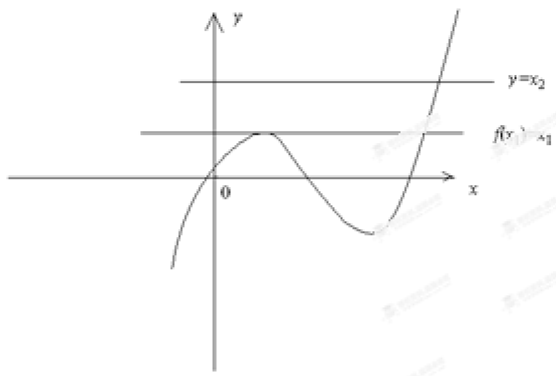
（C）　5　　　（D）6

【答案】A

【解析】$f'(x)=3x^2+2ax+b$，x_1,x_2是方程$3x^2+2ax+b=0$的两根，

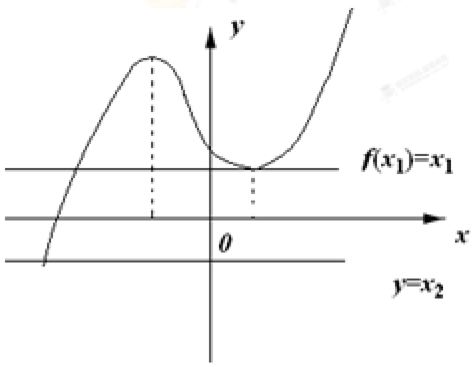
由$3(f(x))^2+2af(x)+b=0$，则又两个$f(x)$使得等式成立，$x_1=f(x_1)$，

当$x_2>x_1=f(x_1)$，其函数图象如下：



如图则有 3 个交点，

当$x_2<x_1=f(x_1)$，其函数图象如下：



以上两种情况都有三个交点，故选 A.

【学科网考点定位】考查函数零点的概念，分类讨论的思想，以及对嵌套型函数的理解.

二．填空题

（11）若$\left(x+\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$的展开式中$x^4$的系数为 7，则实数$a=$________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】通项 $T_{r+1}=C_n^r x^{8-r}(ax^{-\frac{1}{3}})^r=C_n^r a^r x^{8-\frac{4}{3}r}\Rightarrow 8-\frac{4}{3}r=4\Rightarrow r=3$

当 $r=3$ 时， $C_8^3a^3=7\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

【学科网考点定位】二项式中参数的考察

（12）设 ΔABC 的内角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c .若 $b+c=2a$ ，则 $3\sin A=5\sin B$ 则角 $C=$________.

【答案】 $C=\frac{2\pi}{3}$

【解析】 $\because 3\sin A=5\sin B$ 由正弦定理，所以 $3a=5b$, 即 $a=\frac{5}{3}b$；

因为 $b+c=2a$，所以 $c=\frac{7}{3}a$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

【学科网考点定位】考查正弦定理和余弦定理，属于中等难度.

（13）已知直线 $y=a$ 交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点.若该抛物线上存在点 C ，使得 $\angle ACB$ 为直角，则 a 的取值范围为___________.

【答案】 $[1,+\infty)$

【解析】由题意得：

$A(\sqrt{a},a)B(-\sqrt{a},a)$ 设 $C(x,x^2)$

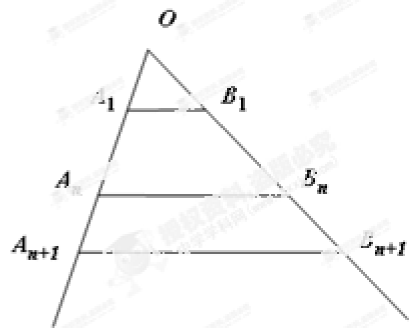
$\overline{AC}=(x-\sqrt{a},x^2-a),\overline{BC}=(x+\sqrt{a},x^2-a)$

$A\dot{C}\cdot B\dot{C}=0\Rightarrow(x^2-a)\cdot(x^2-a+1)=0$

$a=x^2$ 或 $a=x^2+1\Rightarrow a\geq 1$

【学科网考点定位】抛物线与直线的关系，以及向量的简单应用和参数的取值范围.

（14）如图，互不相同的点 A_1，$A_2,\ldots A_n\ldots$ 和 B_1，$B_2\ldots B_n\ldots$ 分别在角 O 的两条边上，所有 A_nB_n 相互平行，且所有梯形 $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$ 的面积均相等.设 $OA_n=a_n$ 若 $a_1=1,a_2=2$ 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是____________.



第（14）题图

【答案】 $a_n=\sqrt{3n-2}$

【解析】

$$\frac{S_{\triangle OA_1B_1}}{S_{\triangle OA_2B_2}}=\left(\frac{OA_1}{OA_2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

设 $S_{\triangle OA_1B_1}=S$，则 $S_{A_1B_1A_2B_2}=3S$， $S_{A_1B_1A_2B_2}=S_{A_2B_2A_3B_3}=\cdots=S_{A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n}=S$

$$S_{\triangle OA_nB_n}=3(n-1)S+S=(3n-2)S$$

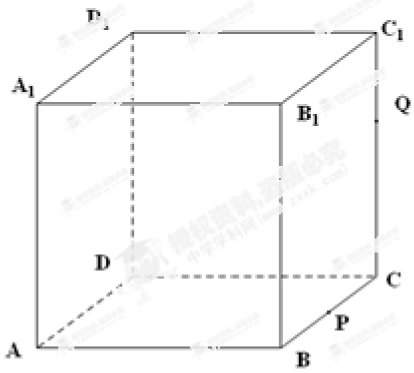
由相似可知：

$$\frac{S_{\triangle OA_1B_1}}{S_{\triangle OA_nB_n}}=\frac{S}{(3n-2)S}=\left(\frac{1}{a_n}\right)^2$$

所以 $a_n=\sqrt{3n-2}$

【学科网考点定位】考查对图形的认识，数列通项公式的求法，三角形相似等知识.

（15）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为 BC 的中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，过点 A,P,Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S，则下列命题正确的是__________（写出所有正确命题的编号）.



①当$0<CQ<\frac{1}{2}$时，S为四边形

②当$CQ=\frac{1}{2}$时，S为等腰梯形

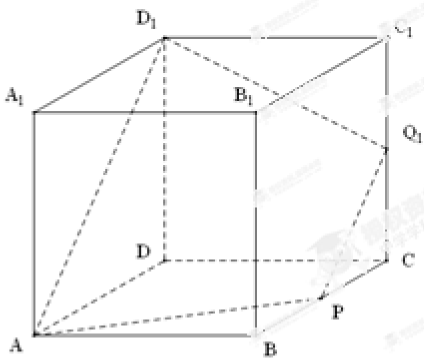
③当$CQ=\frac{3}{4}$时，S与C_1D_1的交点R满足$C_1R=\frac{1}{3}$

④当$\frac{3}{4}<CQ<1$时，S为六边形

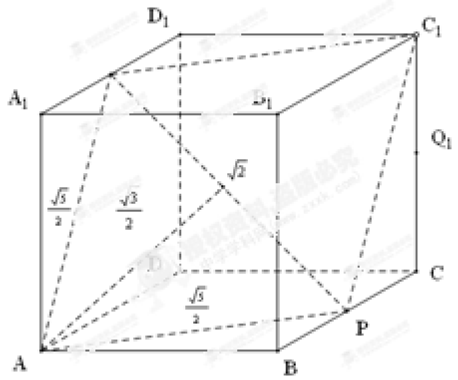
⑤当$CQ=1$时，S的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】①②③⑤

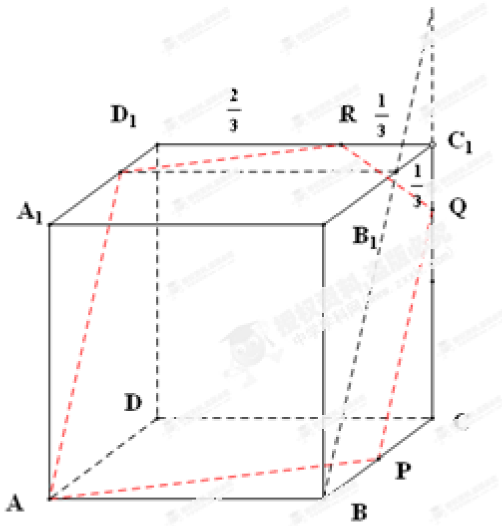
【解析】（1）$CQ=\frac{1}{2}$，S 等腰梯形，②正确，图如下：



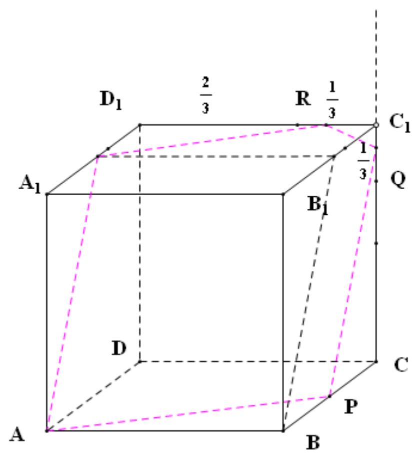
（2）$CQ=1$，S 是菱形，面积为$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，⑤正确，图如下：



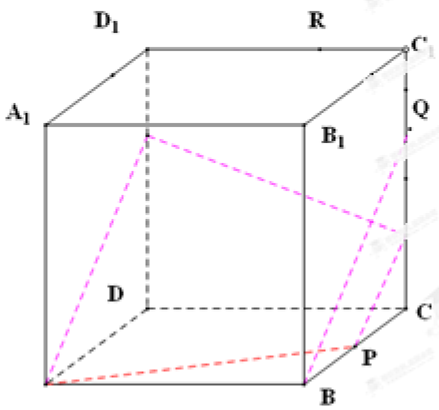
（3）$CQ=\frac{3}{4}$，画图如下：$C_1R=\frac{1}{3}$，③正确



（4）$\frac{3}{4}<CQ<1$，如图是五边形，④不正确；



（5）$0<CQ<\frac{1}{2}$，如下图，是四边形，故①正确



【学科网考点定位】考查立体几何中关于切割的问题，以及如何确定平面.

三.解答题

（16）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=4\cos\omega x\cdot\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ $(\omega>0)$的最小正周期为π.

（I）求ω的值；

（II）讨论$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性.

【答案】（1）$f(x)=4\cos\omega x\cdot\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$
\begin{aligned}
&=4\cos\omega x\cdot(\sin\omega x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\omega x\cdot\sin\frac{\pi}{4})\\
&=2\sqrt{2}\cos\omega x\cdot(\sin\omega x+\cos\omega x)\\
&=2\sqrt{2}(\cos\omega x\cdot\sin\omega x+\cos^2\omega x)\\
&=\sqrt{2}\sin 2\omega x+\sqrt{2}\cos 2\omega x+\sqrt{2}\\
&=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

由题意 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$

（2）由（1）知 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}$

若 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$

当 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$，即 $0\le x\le\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，即 $\frac{\pi}{8}\le x\le\frac{\pi}{2}$，$f(x)$ 单调递减.

【解析】第（1）题根据三角函数的和差化简，二倍角公式以及辅助角公式，最后化成 $y=A\sin(\omega x+\alpha)$ 的形式，利用 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$ 确定 ω 的值；第（2）题用整体法的思想确定 $y=\sin t$ 的单调性，再反求出 x 在指定范围内的单调性.本题属简单题.

【学科网考点定位】本题主要考查三角恒等变形、三角函数的图像及性质与三角函数图像的变换.考查逻辑推理和运算求解能力，中等难度.

（17）（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=ax-(1+a^2)x^2$，其中 $a>0$，区间 $I=\{x\,|\,f(x)>0\}$

（I）求 I 的长度（注：区间 $(\alpha,\ \beta)$ 的长度定义为 $\beta-\alpha$）；

（II）给定常数 $k\in(0,1)$，当 $1-k\le a\le 1+k$ 时，求 I 长度的最小值.

【答案】（1）令 $f(x)=x\left[a-(1+a^2)x\right]=0$

解得 $x_1=0\quad x_2=\frac{a}{1+a^2}$

$\therefore I=\left\{x\,|\,0<x<\frac{a}{1+a^2}\right\}$

$\therefore I$ 的长度 $x_2-x_1=\frac{a}{1+a^2}$

（2）$k\in(0,1)$ 则 $0<1-k\le a\le 1+k<2$

由 （1）$I=\dfrac{a}{1+a^2}$

$I'=\dfrac{1-a^2}{(1+a^2)^2}>0$，令$I'=0$，得$a=1$，由于$0<k<1$

故I关于a在$[1-k,1)$上单调递增，在$(1,1+k]$上单调递减，I必定在$a=1-k$或$a=1+k$处取得

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{\dfrac{1-k}{1+(1-k)^2}}{\dfrac{1+k}{1+(1+k)^2}}=\frac{2-k^2-k^3}{2-k^2+k^3}<1$$

$I_1<I_2$

$\therefore I_{\min}=\dfrac{1-k}{2-2k+k^2}$

因此当$a=1-k$时，I在区间$\left[1-k,1+k\right]$上取得最小值$\dfrac{1-k}{2-2k+k^2}$.

【解析】第（1）题求解一元二次不等式确定区间I的取值范围．根据题意能够求出I的长度，简单题；第（2）题要能理解其实就是求I关于a在给定区间内的最小值，通过求导就能确定最小值是当a取何值，但此题易错点在于需要比较a在$1-k$与$1+k$处I的大小，利用作差或作商都可以解决，出题思路比较新颖，容易迷惑，但只要能够理解题意，基本能够求解出来.

【学科网考点定位】考查二次不等式的求解，以及导数的计算和应用，并考查分类讨论思想和综合运用数学知识解决问题的能力.

（18）（本小题满分 12 分）

设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1-a^2}=1$的焦点在$x$轴上

（I）若椭圆E的焦距为 1，求椭圆E的方程；

（II）设F_1，F_2分别是椭圆的左、右焦点，P为椭圆E上第一象限内的点，直线F_2P交y轴与点Q，并且$F_1P\perp F_1Q$，证明：当a变化时，点P在某定直线上.

【答案】

（1）由题意 $2c=1$，得 $c=\frac{1}{2}$，

而 $a^2-(1-a^2)=\frac{1}{4}$，所以 $a^2=\frac{5}{8},b^2=\frac{3}{8}$

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{8x^2}{5}+\frac{8y^2}{3}=1$$

（2）设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$

直线 PF_2 的直线方程为 $\frac{y}{y_0}=\frac{x-c}{x_0-c}$，当 $x=0$ 时，$y=\frac{-c}{x_0-c}\cdot y_0$，

故 Q 点坐标 $(0,\frac{-c}{x_0-c}\cdot y_0)$，

由题意 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=0$

得 $(x_0+c,y_0)\cdot(c,\frac{-c}{x_0-c}y_0)=0$

即 $(x_0+c)c-\frac{cy_0^2}{x_0-c}=0$

解得 $y_0^2=x_0^2-c^2=x_0^2-(2a^2-1)$

又 P 点在曲线上，$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{1-a^2}=1$，解得 $x_0=a^2,y_0=1-a^2$

则 P 点在定直线 $x+y=1$.

【解析】根据题意确定 c 的大小，以及 $a^2=b^2+c^2$，可以很快求出椭圆 E 的方程，但容易弄混长轴长（$2a$）、短轴长（$2b$）和焦距（$2c$）的概念，简单题，第（2）属于定直线问题，对于定直线问题，需要根据题意确定动点的坐标，再确定动点横纵坐标的关系，其实是变向的考查求动点 P 的轨迹方程问题，本题可以设出 P 点的坐标，根据垂直关系，利用向量或斜率求出 P 的坐标关系式，再利用 P 在圆锥曲线上，即可求出 P 点坐标，继而能够确定 P 点在定直线上，属于中档题.

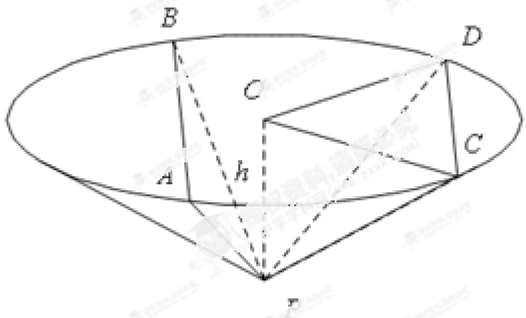
【学科网考点定位】考查椭圆的标准方程及其几何性质，直线与直线，直线与椭圆的位置关系.

（19）（本小题满分 13 分）

如图，圆锥顶点为P.底面圆心为O，其母线与底面所成的角为22.5°. AB和CD是底面圆O上的两条平行的弦，轴OP与平面PCD所成的角为60°，

（I）证明：平面PAB与平面PCD的交线平行于底面；

（II）求$\cos\angle COD$.



【答案】

（1）由公理可知，两面相交必交于一条直线，设面PAB与面PCD的交线为l

$\because CD\ /\!/\ AB$

$CD\not\subset$面PAB,而$AB\subset$面PAB

$\therefore CD\ /\!/$面PAB

而$CD\subset$面PCD

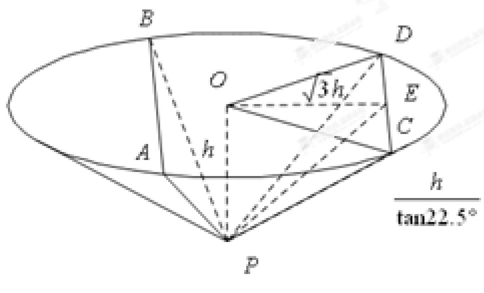
面$PAB\cap$面$PCD=l$

$\therefore l\ /\!/\ CD$

而$CD\subset$底面$ABDC$

所以，平面PAB与平面PCD的交线平行于底面

（2）



取CD的中点E，连接OE， PE，则$OE\perp CD, PE\perp CD$

$\therefore CD\perp$面OEP， $CD\subset$底面$ABDC$

$\therefore OEP\perp PCD$

所以直线 PO 在面 PCD 上的射影为 PE

$\therefore \angle OPE = 60^\circ$

设 $OP = h$，则 $OE = OP \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}h$

由题意 $\angle OCP = 22.5^\circ$

则 $OC = \dfrac{h}{\tan 22.5^\circ}$

而 $\tan 45^\circ = \dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$， $\tan 22.5^\circ > 0$，解得 $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$

$$\cos\angle COE = \frac{OE}{OC} = \frac{\sqrt{3}h}{\dfrac{h}{\tan 22.5^\circ}} = \sqrt{6}-\sqrt{3}$$

$$\cos\angle COD = \cos 2\angle COE = 2\cos^2\angle COE - 1 = 2(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2 - 1 = 17 - 12\sqrt{2}$$

【解析】本题一反常态，考查旋转体的特征，考生一时有点迷惑，但只要静下心来，这道题其实不难.第（1）题，考生要知道两面相交必交于一条直线 l，接着只需根据线线平行证明线面平行，而线线平行又要通过线面平行来证明，理顺这个关系，这道题就可以准确的证出了，通过这道题提醒考生课本上一些证明的定理和性质要熟练掌握.第（2）题，考生先要找出母线与底面所成的角是 $\angle CPO$，设 OP 的长度表示出 CO，接着要能找出 OP 与平面 PCD 所成的角，利用这个角度求出 ΔCDO 高的长度，再利用三角函数二倍角公式，三角形中的位置关系最终求出 $\cos\angle COD$ 的值.

【学科网考点定位】考查空间直线与直线，直线与平面，平面与平面的位置关系，线面垂直，面面垂直，直线与面所成的角等知识.

（20）（本小题满分 13 分）

设函数 $f_x(x) = -1 + x + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n^2}(x \in R, n \in N^*)$，证明：

（I）对每个 $n \in N^*$，存在唯一的 $x_n \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$，满足 $f_x(x_n) = 0$；

（II）对任意 $p \in N^*$，由（I）中 x_n 构成的数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n - x_{n+p} < \dfrac{1}{n}$.

【答案】（1）对每个 $n\in N^*$，当 $x>0$ 时，$f_n'(x)=1+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n}>0$，

则 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，

而 $f_1(1)=0$，当 $n\geq 2$ 时，$f_n(1)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>0$，

故 $f_n(1)\geq 0$，

又 $f_n(\frac{2}{3})=-1+\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k^2}\leq -\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}]}{1-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<0$$

所以对每个 $n\in N^*$，存在唯一的 $x_n\in\left[\frac{2}{3},1\right]$，满足 $f_x(x_n)=0$

（1）当 $x>0$ 时，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}>f_n(x)$，并由（1）知

$f_{n+1}(x_n)>f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})=0$

由 $f_{n+1}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增知，$x_{n+1}<x_n$，故 $\{x_n\}$ 为单调递减数列，

从而对任意 $n,\ p\in N^*$，$x_{n+p}<x_n$

对任意 $p\in N^*$，

$$f_n(x_n)=-1+x_n+\frac{x_n^{\ 2}}{2^2}+\cdots+\frac{x_n^{\ 2}}{n^2}=0 \qquad ①$$

$$f_{n+p}(x_{n+p})=-1+x_{n+p}+\frac{x_{n+p}^{\ 2}}{2^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^{\ n}}{n^2}+\frac{x_{n+p}^{\ n+1}}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^{\ n+p}}{(n+p)^2}=0 \qquad ②$$

①$-$②并移项，利用 $0<x_{n+p}<x_n\leq 1$，得

$$x_n - x_{n+p} = \sum_{k=2}^{n} \frac{x_{n+p}^k - x_n^k}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x_{n+p}^k}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x_{n+p}^k}{k^2}$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

因此，对任意 $p \in N^*$，$0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$.

【解析】本题考查的是数列函数，而且含双变量，考生在做题的过程中需要冷静的处理好每个变量.第（1）题考查函数的零点问题，要证明对每个 $n \in N^*$，函数在某个区间上只有一个零点，一方面要证明函数是单调的，求导即可，另一方面要判断 $f_n(1), f_n(\frac{2}{3})$ 的正负问题，此题难点在于判断 $f_n(\frac{2}{3})$ 的正负时，要利用放缩的思想，将这个数列函数放缩到可以利用等比数列求和，从而证明此函数在指定区间内只有一个零点；第（2）题要将数列从数列函数中分离出来，就要通过函数的单调性，由 $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$，$f_{n+1}(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，确定 $x_{n+p} < x_n$，则不等式左半边成立，右半边通过作差，数列放缩确定最终 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$.本题属于较难题.

【学科网考点定位】考查函数的导数及其应用，函数零点的判定，等比数列的求和，不等式的放缩等知识.

（21）（本小题满分 13 分）

某高校数学系计划在周六和周日各举行一次主题不同的心理测试活动，分别由李老师和张老师负责，已知该系共有 n 位学生，每次活动均需该系 k 位学生参加（n 和 k 都是固定的正整数）.假设李老师和张老师分别将各自活动通知的信息独立、随机地发给该系 k 位学生，且所发信息都能收到.记该系收到李老师或张老师所发活动通知信息的学生人数为 x

（I）求该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息的概率；

（II）求使 $P(X = m)$ 取得最大值的整数 m.

【答案】设事件 A："学生甲收到李老师所发信息"，事件 B："学生甲收到张老师所发信息"，由题意 A 和 B 是相互独立的事件，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立，

而 $P(A) = P(B) = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \dfrac{k}{n}$

所以 $P(\overline{A})=P(\overline{B})=1-\dfrac{k}{n}$

因此，学生甲收到活动通知信息的概率为

$$P=1-(1-\frac{k}{n})^2=\frac{2kn-k^2}{n^2}.$$

（1）当 $k=n$ 时，m 只能取 n，有 $P(X=m)=P(X=n)=1$

当 $k<n$，整数 m 满足 $k\le m\le t$，其中 t 是 $2k$ 和 n 中的较小者.“李老师和张老师各自独立、随机地发活动通知信息给 k 位同学”所包含的基本事件总数为 $(C_n^k)^2$.

当 $X=m$ 时，同时收到李老师和张老师转发信息的学生人数恰为 $2k-m$，仅收到李老师或仅收到张老师转发信息的学生人数为 $m-k$，则由乘法计数原理知：事件 $\{X=m\}$ 所含基本事件数为

$$C_n^kC_k^{2k-m}C_{n-k}^{m-k}=C_n^kC_k^{m-k}C_{n-k}^{m-k}$$

此时 $P(X=m)=\dfrac{C_n^kC_k^{2k-m}C_{n-k}^{m-k}}{(C_n^k)^2}=\dfrac{C_k^{m-k}C_{n-k}^{m-k}}{C_n^k}$

当 $k\le m<t$，$P(X=m)\le P(X=m+1)\Leftrightarrow C_k^{m-k}C_{n-k}^{m-k}\le C_k^{m+1-k}C_{n-k}^{m+1-k}$

化简解得 $m\le 2k-\dfrac{(k+1)^2}{n+2}$

假如 $k\le 2k-\dfrac{(k+1)^2}{n+2}<t$ 成立，

则当 $(k+1)^2$ 能被 $n+2$ 整除时，

$k\le 2k-\dfrac{(k+1)^2}{n+2}<2k+1-\dfrac{(k+1)^2}{n+2}\le t$，故 $P(X=m)$ 在 $m=2k-\dfrac{(k+1)^2}{n+2}$ 和 $m=2k+1-\dfrac{(k+1)^2}{n+2}$ 处达到最大值；

则当 $(k+1)^2$ 不能被 $n+2$ 整除时，$P(X=m)$ 在 $m=2k-\left[\dfrac{(k+1)^2}{n+2}\right]$ 处达最大值.（注：$[x]$ 表示不

超过 x 的最大整数）.

下证：$k \le 2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < t$

因为 $1 \le k < n$，所以 $2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} - k = \dfrac{kn - k^2 - 1}{n+2} \ge \dfrac{k(k+1) - k^2 - 1}{n+2} = \dfrac{k-1}{n+2} \ge 0$，

$2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} - n = -\dfrac{(n-k+1)^2}{n+2} < 0$，故 $2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < n$，显然 $2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < 2k$.

因此 $k \le 2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < t$.

【解析】本题是概率压轴题，难度大，文字多，考生不一定能够有时间去读懂，不仅如此还考查到了分类讨论思想，难度更高一层，但细细想来，它也就那回事.第（1）题该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息要从反面角度去思考，没有收到信息的概率是什么，由于 A 和 B 是相互独立，$P(A) = P(B) = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \dfrac{k}{n}$，没有收到信息的概率正好是 $(1-\dfrac{k}{n})^2$，所以最后的结果就能求出；第（2）题考查的考点比较多，而且 n 和 k 都是变量，遇到变量就要做好讨论的准备，于是本题要从 $k = n$ 和 $k < n$ 两个角度考虑.当 $k = n$ 时，$m = n$，$P(X = m) = P(X = n) = 1$；当 $k < n$ 时，整数 m 满足 $k \le m \le t$，其中 t 是 $2k$ 和 n 中的较小者，从而表示出 $P(X = m) = \dfrac{C_n^k C_k^{2k-m} C_{n-k}^{m-k}}{(C_n^k)^2} = \dfrac{C_k^{m-k} C_{n-k}^{m-k}}{C_n^k}$，接着要根据题意找出不等关系：$P(X = m) \le P(X = m+1)$，化简分离出 $m \le 2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2}$，而 $2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2}$ 是否为整数，需要讨论.还需要考虑 $k \le 2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < t$ 是否成立的问题，于是，接下来一方面需要讨论是否为整，另一方面要证明 $k \le 2k - \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < t$，详细的解答如下.

【学科网考点定位】考查古典概型，计数原理，分类讨论思想等基础知识，以及运用数学知识分析和解决实际问题的能力.