

# 2007 年辽宁高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷（选择题 共 60 分）

**参考公式：**

如果事件  $A, B$  互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件  $A, B$  相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $P$ ，那么

$n$  次独立重复试验中事件  $A$  恰好发生  $k$  次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (n=0,1,2,\dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中  $R$  表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中  $R$  表示球的半径

一、选择题 本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $U = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $A = \{1,3\}$ ,  $B = \{2,3,4\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = ( \quad )$

- A.  $\{1\}$       B.  $\{2\}$       C.  $\{2,4\}$       D.  $\{1,2,3,4\}$

2. 若函数  $y = f(x)$  的反函数图象过点  $(1,5)$ , 则函数  $y = f(x)$  的图象必过点  $( \quad )$

- A.  $(1,1)$       B.  $(1,5)$       C.  $(5,1)$       D.  $(5,5)$

3. 若向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  不共线,  $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ , 且  $\vec{c} = \vec{a} - \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right) \vec{b}$ , 则向量  $\vec{a}$  与  $\vec{c}$  的夹角为  $( \quad )$

- A. 0      B.  $\frac{\pi}{6}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{\pi}{2}$

4. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_3 = 9$ ,  $S_6 = 36$ , 则  $a_7 + a_8 + a_9 = ( \quad )$

- A. 63      B. 45      C. 36      D. 27

5. 若  $\theta \in \left( \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right)$ , 则复数  $(\cos \theta + \sin \theta) + (\sin \theta - \cos \theta)i$  在复平面内所对应的点在  $( \quad )$

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

6. 若函数  $y = f(x)$  的图象按向量  $\vec{a}$  平移后, 得到函数  $y = f(x+1) - 2$  的图象, 则向量  $\vec{a} = ( \quad )$

- A.  $(-1, -2)$     B.  $(1, -2)$     C.  $(-1, 2)$     D.  $(1, 2)$

7. 若  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 则下列命题中的真命题是 ( )

A. 若  $m \subset \beta, \alpha \perp \beta$ , 则  $m \perp \alpha$     B. 若  $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n, m \parallel n$ , 则  $\alpha \parallel \beta$

C. 若  $m \perp \beta, m \parallel \alpha$ , 则  $\alpha \perp \beta$     D. 若  $\alpha \perp \gamma, \alpha \perp \beta$ , 则  $\beta \perp \gamma$

8. 已知变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 2 \leq 0, \\ x \geq 1, \\ x + y - 7 \leq 0, \end{cases}$  则  $\frac{y}{x}$  的取值范围是 ( )

A.  $(\frac{9}{5}, 6)$     B.  $(-\infty, \frac{9}{5}] \cup [6, +\infty)$

C.  $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$     D.  $[3, 6]$

9. 一个坛子里有编号为 1, 2, ..., 12 的 12 个大小相同的球, 其中 1 到 6 号球是红球, 其余的是黑球, 若从中任取两个球, 则取到的都是红球, 且至少有 1 个球的号码是偶数的概率是 ( )

A.  $\frac{1}{22}$     B.  $\frac{1}{11}$     C.  $\frac{3}{22}$     D.  $\frac{2}{11}$

10. 设  $p, q$  是两个命题:  $p: \log_{\frac{1}{2}}(|x| - 3) > 0, q: x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} > 0$ , 则  $p$  是  $q$  的 ( )

A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件    D. 既不充分也不必要条件

11. 设  $P$  为双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{12} = 1$  上的一点,  $F_1, F_2$  是该双曲线的两个焦点, 若

$|PF_1| : |PF_2| = 3 : 2$ , 则  $\triangle PF_1F_2$  的面积为 ( )

A.  $6\sqrt{3}$     B. 12    C.  $12\sqrt{3}$     D. 24

12. 已知  $f(x)$  与  $g(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的连续函数, 如果  $f(x)$  与  $g(x)$  仅当  $x = 0$  时的函数值为 0, 且  $f(x) \geq g(x)$ , 那么下列情形不可能出现的是 ( )

A. 0 是  $f(x)$  的极大值, 也是  $g(x)$  的极大值

B. 0 是  $f(x)$  的极小值, 也是  $g(x)$  的极小值

C. 0 是  $f(x)$  的极大值, 但不是  $g(x)$  的极值

D. 0 是  $f(x)$  的极小值, 但不是  $g(x)$  的极值

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分.

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a \cos x (x \geq 0), \\ x^2 - 1 (x < 0) \end{cases}$  在点  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 设椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  上一点  $P$  到左准线的距离为 10,  $F$  是该椭圆的左焦点, 若点  $M$  满足  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{DF})$ , 则  $|\overrightarrow{OM}| =$  \_\_\_\_\_.

15. 若一个底面边长为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 棱长为  $\sqrt{6}$  的正六棱柱的所有顶点都在一个平面上, 则此球的体积为 \_\_\_\_\_.

16. 将数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 拼成一列, 记第  $i$  个数为  $a_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ , 若  $a_1 \neq 1$ ,  $a_3 \neq 3$ ,  $a_5 \neq 5$ ,  $a_1 < a_3 < a_5$ , 则不同的排列方法有 \_\_\_\_\_ 种 (用数字作答).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos^2 \frac{\omega x}{2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  (其中  $\omega > 0$ )

(I) 求函数  $f(x)$  的值域;

(II) 若对任意的  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $y = f(x)$ ,  $x \in (a, a + \pi]$  的图象与直线  $y = -1$  有且仅有两个不同的交点, 试确定  $\omega$  的值 (不必证明), 并求函数  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  的单调增区间.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = BC = a$ ,  $D, E$  分别为棱  $AB, BC$  的中点,  $M$  为棱  $AA_1$  上的点, 二面角  $M - DE - A$  为  $30^\circ$ .

(I) 证明:  $A_1B_1 \perp C_1D$ ;

(II) 求  $MA$  的长, 并求点  $C$  到平面  $MDE$  的距离.



20. (本小题满分 14 分)

已知正三角形  $OAB$  的三个顶点都在抛物线  $y^2 = 2x$  上, 其中  $O$  为坐标原点, 设圆  $C$  是  $OAB$  的内接圆 (点  $C$  为圆心)

(I) 求圆  $C$  的方程;

(II) 设圆  $M$  的方程为  $(x - 4 - 7 \cos \theta)^2 + (y - 7 \cos \theta)^2 = 1$ , 过圆  $M$  上任意一点  $P$  分别作圆  $C$  的两条切线  $PE, PF$ , 切点为  $E, F$ , 求  $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}$  的最大值和最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  与函数  $f(x), g(x), x \in \mathbf{R}$  满足条件:

$$a_n = b_n, f(b_n) = g(b_{n+1}) (n \in \mathbf{N}^*).$$

(I) 若  $f(x) \geq tx + 1, t \neq 0, t \neq 2, g(x) = 2x, f(b) \neq g(b), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 求  $x$  的取值范围;

(II) 若函数  $y = f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数,  $g(x) = f^{-1}(x), b = 1, f(1) < 1$ , 证明对任意  $n \in \mathbf{N}^*, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (用  $t$  表示).

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^{2t} - 2t(x^2 + x) + x^2 + 2t^2 + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$ .

(I) 证明: 当  $t < 2\sqrt{2}$  时,  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数;

(II) 对于给定的闭区间  $[a, b]$ , 试说明存在实数  $k$ , 当  $t > k$  时,  $g(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上是减函数;

(III) 证明:  $f(x) \geq \frac{3}{2}$ .

### 参考答案

一、选择题: 本在题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分, 满分 60 分。

1. C    2. A    3. C    4. D    5. B    6. B  
7. C    8. A    9. D    10. D    11. A    12. B

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算, 每小题 4 分, 共 16 分。

13. 1  
14. 72  
15.  $4\sqrt{3}n$   
16. 2

### 三、解答题

17. (本小题满分 12 分)

本小题主要考查频率、概率、总体分布的估计、独立重复试验等基础知识, 考查运用统计的有关知识解决实际问题的能力, 满分 12 分。

( I ) 解:

分组	[500,900]	[900 , 1100)	[1100 , 1300)	[1300 , 1500)	[1500 , 1700)	[1700 , 1900)	[1900 , +∞)
频数	48	121	208	223	193	165	42
频率	0.048	0.121	0.208	0.223	0.193	0.165	0.042

……4分

( II ) 解: 由 ( I ) 可得  $0.048+0.121+0.208+0.223=0.6$ , 所以灯管使用寿命不是 1500 小时的频率为 0.6. ……8分

( III ) 解: 由 ( II ) 知: 1 只灯管使用寿命不足 1500 小时的概率  $P=0.6$ . 根据在  $n$  次独立重复试验中事件恰好发生  $k$  次的概率公式可得

$$P_1(2) + P_3(3) = C_1^1 \times 0.6^2 \times 0.4 + 0.6^2 = 0.648。$$

所以至少有 2 支灯管的使用寿命不足 1500 小时的概率是 0.648. ……12分

18. (本小题满分 12分)

本小题主要考查空间中的线面关系、解三角形等基础知识, 考查空间想象能力与思维能力。满分 12分。

( I ) 证明: 连结 CD,

∵三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  是直三棱柱。

∴ $CC_1 \perp$  平面 ABC,

∴CD 为  $C_1D$  在平面 ABC 内的射影,

∵ $\triangle ABC$  中,  $AC=BC$ , D 为 AB 中点。

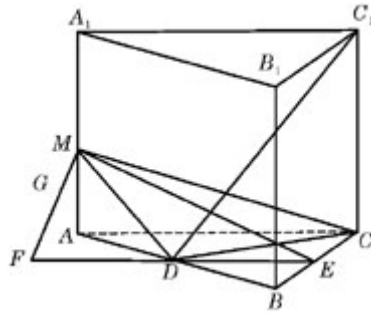
∴ $AB \perp CD$ ,

∴ $AB \perp C_1D$ ,

∵ $A_1B_1 \parallel AB$ ,

∴ $A_1B_1 \perp C_1D$ 。

( II ) 解法一: 过点 A 作 CE 的平行线, 交 ED 的延长线于 F, 连结 MF.



∵D、E 分别为 AB、BC 的中点。

∴DE // AC。

又∵AF // CE, CE ⊥ AC,

∴AF ⊥ DE。

∵MA ⊥ 平面 ABC,

∴AF 为 MF 在平面 ABC 内的射影。

∴MF ⊥ DE,

∴∠MFA 为二面角 M-DE-A 的平面角, ∠MFA = 30° 。

在 Rt△MAF 中,  $AF = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ , ∠MFA = 30°,

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

作 AC ⊥ MF, 垂足为 G。

∵MF ⊥ DE, AF ⊥ DE,

∴DE ⊥ 平面 AMF,

∴平面 MDE ⊥ 平面 AMF.

∴AG ⊥ 平面 MDE

在 Rt△GAF 中, ∠GFA = 30° ,  $AF = \frac{a}{2}$ ,

∴AG =  $\frac{a}{4}$ , 即 A 到平面 MDE 的距离为  $\frac{a}{4}$ 。

∵CA // DE, ∴CA // 平面 MDE,

∴C 到平面 MDE 的距离与 A 到平面 MDE 的距离相等, 为  $\frac{a}{4}$ 。

**解法二:** 过点 A 作 CE 的平行线, 交 ED 的延长线于 F, 连结 MF,

$\because$  D、E 分别为 AB、CB 的中点，  
 $DE \parallel AC$ ，  
 又  $\because AF \parallel CE, CE \perp AC$ ，  
 $\therefore AF \perp DE$ ，  
 $\because MA \perp$  平面 ABC，  
 $\therefore AF$  为 MF 在平面 ABC 内的射影，  
 $\therefore MF \perp DE$ ，  
 $\therefore \angle MFA$  为二面角 M-DE-A 的平面角， $\angle MFA = 30^\circ$ 。

在  $Rt\triangle MAF$  中， $AF = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \angle MFA = 30^\circ$ ，

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{3}}{6}a. \dots\dots 8 \text{ 分}$$

设 C 到平面 MDE 的距离为 h。

$$\because V_{M-CDE} = V_{C-MOC},$$

$$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle CDE} \cdot MA = \frac{1}{3}S_{\triangle MDE} \cdot h,$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CE \cdot DE = \frac{a^2}{8}, MA = \frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

$$S_{\triangle MDE} = \frac{1}{2}CE \cdot MF = \frac{1}{2}DE \cdot \frac{AF}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2,$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{a^2}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \times h,$$

$$\therefore h = \frac{a}{4}, \text{ 即 C 到平面 MDE 的距离为 } \frac{a}{4}. \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

本小题主要考查三角函数公式，三角函数图象和性质等基础知识，考查综合运用三角函数有关知识的能力。满分 12 分。

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - (\cos x + 1)$$

$$(I) \text{ 解: } = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) - 1$$

$$= 2\sin\left(\cos - \frac{\pi}{6}\right) - 1.$$

由  $-1 \leq \sin(\cos x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$ , 得  $-3 \leq 2 \sin(\cos x - \frac{\pi}{6}) - 1 \leq 1$ 。

可知函数  $f(x)$  的值域为  $[-3, 1]$

(II) 解: 由题设条件及三角函数图象和性质可知,  $y = f(x)$  的周期为  $w$ , 又由  $w > 0$ , 得  $\frac{2\pi}{w} \pi$ , 即得  $w=2$ 。

于是有  $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$ , 再由  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ , 解得

$$k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})。$$

所以  $y = f(x)$  的单调增区间为  $[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})]$

20. (本小题满分 12 分)

本小题主要考查等差数列、等比数列等基础知识, 考查基本运算能力, 满分 12 分。

(I) 解: 由题设得  $a_n + b_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) + 2 (n \geq 2)$ , 即

$$C_n = C_{n-1} + 2 (n \geq 2)$$

易知  $\{C_n\}$  是首项为  $a_1 + b_1 = 3$ , 公差为 2 的等差数列, 通项公式为

$$C_n = 2n + 1$$

(II) 解: 由题设得  $a_n - b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) (n \geq 2)$ , 令  $d_n = a_n - b_n$ , 则

$$d_n = \frac{1}{2} d_{n-1} (n \geq 2)。$$

易知  $\{d_n\}$  是首项  $a_1 - b_1 = 1$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列, 通项公式为

$$d_n = \frac{1}{2^{n-1}} \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由于} \begin{cases} a_n + b_n = 2n + 1, \\ a_n - b_n = \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases} \text{ 解得}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} + n + \frac{1}{2}。 \dots\dots 10 \text{ 分}$$

求和得

$$S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{n^2}{2} + n + 1。 \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (本小题满分 14 分)

本小题主要考查平面向量, 圆与抛物线的方程及几何性质等基本知识, 考查综合运用解析几何知识解决问题的能力。满分 14 分。

(I) **解法一:** 设 A、B 两点坐标分别为  $(\frac{y_1^2}{2}, y_1)$ ,  $(\frac{y_2^2}{2}, y_2)$ , 由题设知

$$\sqrt{(\frac{y_1^2}{2})^2 + y_1^2} = \sqrt{(\frac{y_2^2}{2})^2 + y_2^2} = \sqrt{(\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2})^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

$$\text{解得 } y_1^2 = y_2^2 = 12,$$

所以 A  $(6, 2\sqrt{3})$ , B  $(6, -2\sqrt{3})$  或 A  $(6, -2\sqrt{3})$ , B  $(6, 2\sqrt{3})$ 。

设圆心 C 的坐标为  $(r, 0)$ , 则  $r = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ , 所以圆 C 的方程为

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16.$$

**解法二:** 设 A、B 两点坐标分别为  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , 由题设知

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

又因为  $y_1^2 = 2x_1, y_2^2 = 2x_2$ , 可得  $x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 + 2x_2$ , 即

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0。$$

由  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 可知  $x_1 = 0$ , 故 A、B 两点关于 x 轴对称, 所以圆心 C 在 x 轴上,

设 C 点的坐标为  $(r, 0)$ , 则 A 点的坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r)$ , 于是有  $(\frac{\sqrt{3}}{2}r)^2 = 2 \times \frac{3}{2}$ , 解得  $r = 4$ , 所以圆 C 的方程为

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16。 \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 解: 设  $\angle ECF = 2a$ , 则

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = |\overrightarrow{CE}| \cdot |\overrightarrow{CF}| \cdot \cos 2a = 32 \cos^2 a - 16 \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

在  $\text{Rt}\triangle PCE$  中,  $\cos a = \frac{r}{|PC|} = \frac{4}{|PC|}$ , 由圆的几何性质得

$$|PC| \leq |MC| + 1 = 7 + 1 = 8, |PC| \geq |MC| - 1 = 7 - 1 = 6$$

所以  $\frac{1}{2} \leq \cos a \leq \frac{2}{3}$ , 由此可得

$$-8 \leq \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} \leq -\frac{16}{9}$$

故  $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$  的最大值为  $-\frac{16}{9}$ , 最小值为  $-8$ 。

22. (本小题满分 12 分)

本小题主要考查函数的性质、导数的应用、不等式的解法等知识, 考查数形结合能力以及综合运用基本关系解决问题的能力。满分 12 分。

解 (I) 由题设得  $g(x) = 3x^2 - 18x \cos \alpha + 48 \cos \beta$ , 由  $g(1 + e^{-|t|}) \geq 0, g(x + \sin t) \leq 0$

得:  $g(1 + e^{-|t|}) = g(2) \geq 0, g(3 + \sin \frac{3\pi}{2}) = g(2) \leq 0, g(4) = g(3 + \sin \frac{\pi}{2}) \leq 0$

即有:

$$\begin{cases} g(2) = 12 - 36 \cos \alpha + 48 \cos \beta = 0 \\ g(4) = 48 - 72 \cos \alpha + 48 \cos \beta \leq 0 \end{cases}$$

由上式得  $36 - 36 \cos \alpha \leq 0$ , 即  $1 - \cos \alpha \geq 0$  又  $1 - \cos \alpha \geq 0$ , 故  $\cos \alpha = 1$  得:

$$f(x) = x^2 - 9x^2 + 24x$$

(II) 解: 由题设知, 对任意的  $m \in [-26, 6]$  恒有  $mx - 9x^2 + 24x + 11 \geq 0$ , 令

$$h(m) = mx - 9x^2 + 24x + 11,$$

则有

$$\begin{cases} h(-26) = -26x - 9x^2 + 24x + 11 \geq 0 \\ h(6) = 6x - 9x^2 + 24x + 11 \geq 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} -\frac{11}{9} \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$