

# 2009年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷 I）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）设集合 $A=\{4, 5, 7, 9\}$ ， $B=\{3, 4, 7, 8, 9\}$ ，全集 $U=A\cup B$ ，则集合 $C_U(A\cap B)$ 中的元素共有（ ）

- A. 3个                      B. 4个                      C. 5个                      D. 6个

**【考点】**1H：交、并、补集的混合运算.

**【分析】**根据交集含义取A、B的公共元素写出 $A\cap B$ ，再根据补集的含义求解.

**【解答】**解： $A\cup B=\{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ，

$A\cap B=\{4, 7, 9\}$ ： $C_U(A\cap B)=\{3, 5, 8\}$  故选A.

也可用摩根律： $C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$

故选：A.

**【点评】**本题考查集合的基本运算，较简单.

2. （5分）已知 $\frac{\bar{z}}{1+i}=2+i$ ，则复数 $z=( )$

- A.  $-1+3i$                       B.  $1-3i$                       C.  $3+i$                       D.  $3-i$

**【考点】**A1：虚数单位i、复数.

**【分析】**化简复数直接求解，利用共轭复数可求z.

**【解答】**解： $\bar{z}=(1+i)\cdot(2+i)=1+3i$ ， $\therefore z=1-3i$

故选：B.

**【点评】**求复数，需要对复数化简，本题也可以用待定系数方法求解.

3. （5分）不等式 $|\frac{x+1}{x-1}|<1$ 的解集为（ ）

- A.  $\{x|0<x<1\}\cup\{x|x>1\}$                       B.  $\{x|0<x<1\}$                       C.  $\{x|-1<x<0\}$   
D.  $\{x|x<0\}$

**【考点】** 7E: 其他不等式的解法.

**【分析】** 本题为绝对值不等式, 去绝对值是关键, 可利用绝对值意义去绝对值, 也可两边平方去绝对值.

**【解答】** 解:  $\because \left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1,$

$$\therefore |x+1| < |x-1|,$$

$$\therefore x^2+2x+1 < x^2-2x+1.$$

$$\therefore x < 0.$$

$\therefore$  不等式的解集为  $\{x|x < 0\}$ .

故选: D.

**【点评】** 本题主要考查解绝对值不等式, 属基本题. 解绝对值不等式的关键是去绝对值, 去绝对值的方法主要有: 利用绝对值的意义、讨论和平方.

4. (5分) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的渐近线与抛物线  $y = x^2 + 1$  相切

, 则该双曲线的离心率为 ( )

A.  $\sqrt{3}$

B. 2

C.  $\sqrt{5}$

D.  $\sqrt{6}$

**【考点】** KC: 双曲线的性质; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** 先求出渐近线方程, 代入抛物线方程, 根据判别式等于0, 找到a和b的关系, 从而推断出a和c的关系, 答案可得.

**【解答】** 解: 由题双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线方程为  $y = \frac{bx}{a}$ ,

代入抛物线方程整理得  $ax^2 - bx + a = 0$ ,

因渐近线与抛物线相切, 所以  $b^2 - 4a^2 = 0$ ,

$$\text{即 } c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{5},$$

故选: C.

**【点评】** 本小题考查双曲线的渐近线方程直线与圆锥曲线的位置关系、双曲线的离心率, 基础题.

5. (5分) 甲组有5名男同学, 3名女同学; 乙组有6名男同学、2名女同学. 若从甲、乙两组中各选出2名同学, 则选出的4人中恰有1名女同学的不同选法共有 ( )
- A. 150种                  B. 180种                  C. 300种                  D. 345种

【考点】D1: 分类加法计数原理; D2: 分步乘法计数原理.

【专题】50: 排列组合.

【分析】选出的4人中恰有1名女同学的不同选法, 1名女同学来自甲组和乙组两类.

【解答】解: 分两类 (1) 甲组中选出一名女生有  $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 = 225$  种选法;  
(2) 乙组中选出一名女生有  $C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_2^1 = 120$  种选法. 故共有345种选法.

故选: D.

【点评】分类加法计数原理和分类乘法计数原理, 最关键做到不重不漏, 先分类, 后分步!

6. (5分) 设  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  是单位向量, 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 则  $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$  的最小值为 ( )
- A. -2                  B.  $\sqrt{2} - 2$                   C. -1                  D.  $1 - \sqrt{2}$

【考点】90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】16: 压轴题.

【分析】由题意可得  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$ , 故要求的式子即  $\vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 1 - |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = 1 - \sqrt{2} \cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle$ , 再由余弦函数的值域求出它的最小值.

【解答】解:  $\because \vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  是单位向量,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ,  $\therefore \vec{a} \perp \vec{b}$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$ .

$$\therefore (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 0 - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + 1 = 1 - |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{c}|$$

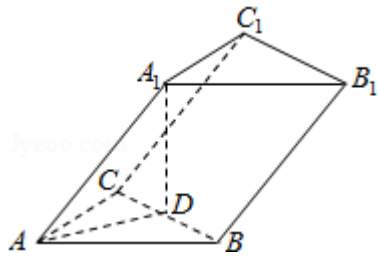
$$\cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$= 1 - \sqrt{2} \cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle \geq 1 - \sqrt{2}.$$

故选：D.

**【点评】** 考查向量的运算法则；交换律、分配律但注意不满足结合律.

7. (5分) 已知三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱与底面边长都相等,  $A_1$  在底面  $ABC$  上的射影  $D$  为  $BC$  的中点, 则异面直线  $AB$  与  $CC_1$  所成的角的余弦值为 ( )



A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{5}}{4}$

C.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D.  $\frac{3}{4}$

**【考点】** LO: 空间中直线与直线之间的位置关系.

**【分析】** 首先找到异面直线  $AB$  与  $CC_1$  所成的角 (如  $\angle A_1AB$ ); 而欲求其余弦值可考虑余弦定理, 则只要表示出  $A_1B$  的长度即可; 不妨设三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱与底面边长为 1, 利用勾股定理即可求之.

**【解答】** 解: 设  $BC$  的中点为  $D$ , 连接  $A_1D$ 、 $AD$ 、 $A_1B$ , 易知  $\theta = \angle A_1AB$  即为异面直线  $AB$  与  $CC_1$  所成的角;

并设三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱与底面边长为 1, 则  $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $|A_1D| = \frac{1}{2}$ ,  $|A_1B| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

由余弦定理, 得  $\cos \theta = \frac{1+1-\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ .

故选：D.

**【点评】** 本题主要考查异面直线的夹角与余弦定理.

8. (5分) 如果函数  $y = 3\cos(2x + \phi)$  的图象关于点  $(\frac{4\pi}{3}, 0)$  中心对称, 那么

$|\phi|$ 的最小值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

**【考点】** HB: 余弦函数的对称性.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** 先根据函数 $y=3\cos(2x+\phi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称, 令 $x=$

$\frac{4\pi}{3}$ 代入函数使其等于0, 求出 $\phi$ 的值, 进而可得 $|\phi|$ 的最小值.

**【解答】** 解:  $\because$ 函数 $y=3\cos(2x+\phi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称.

$$\therefore 2 \cdot \frac{4\pi}{3} + \phi = k\pi + \frac{\pi}{2} \therefore \phi = k\pi - \frac{13\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 由此易得 } |\phi|_{\min} = \frac{\pi}{6}.$$

故选: A.

**【点评】** 本题主要考查余弦函数的对称性. 属基础题.

9. (5分) 已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切, 则 $a$ 的值为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. -1                      D. -2

**【考点】** 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

**【分析】** 切点在切线上也在曲线上得到切点坐标满足两方程; 又曲线切点处的导数值是切线斜率得第三个方程.

**【解答】** 解: 设切点 $P(x_0, y_0)$ , 则 $y_0=x_0+1$ ,  $y_0=\ln(x_0+a)$ ,

$$\text{又} \because y' \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0+a} = 1$$

$$\therefore x_0+a=1$$

$$\therefore y_0=0, x_0=-1$$

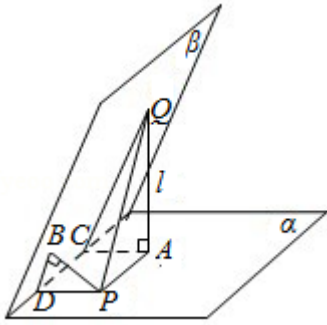
$$\therefore a=2.$$

故选: B.

**【点评】** 本题考查导数的几何意义, 常利用它求曲线的切线

10. (5分) 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 $60^\circ$ , 动点 $P$ 、 $Q$ 分别在面 $\alpha$ 、 $\beta$ 内,  $P$ 到 $\beta$ 的距离

为 $\sqrt{3}$ ，Q到 $\alpha$ 的距离为 $2\sqrt{3}$ ，则P、Q两点之间距离的最小值为（ ）



- A. 1                      B. 2                      C.  $2\sqrt{3}$                       D. 4

**【考点】** LQ: 平面与平面之间的位置关系.

**【专题】** 11: 计算题; 16: 压轴题.

**【分析】** 分别作 $QA \perp \alpha$ 于A,  $AC \perp l$ 于C,  $PB \perp \beta$ 于B,  $PD \perp l$ 于D, 连CQ, BD则 $\angle ACQ = \angle PDB = 60^\circ$ , 在三角形APQ中将PQ表示出来, 再研究其最值即可.

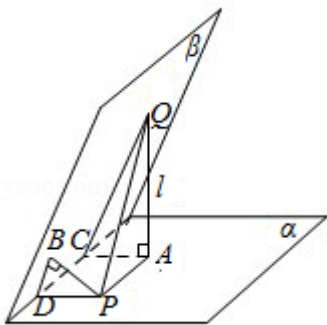
**【解答】** 解: 如图

分别作 $QA \perp \alpha$ 于A,  $AC \perp l$ 于C,  $PB \perp \beta$ 于B,  $PD \perp l$ 于D,  
连CQ, BD则 $\angle ACQ = \angle PDB = 60^\circ$ ,  $AQ = 2\sqrt{3}$ ,  $BP = \sqrt{3}$ ,

$$\text{又} \because PQ = \sqrt{AQ^2 + AP^2} = \sqrt{12 + AP^2} \geq 2\sqrt{3}$$

当且仅当 $AP = 0$ , 即点A与点P重合时取最小值.

故选: C.



**【点评】** 本题主要考查了平面与平面之间的位置关系, 以及空间中直线与平面之间的位置关系, 考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力, 属于基础题.

11. (5分) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ , 若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数, 则 ( )

A.  $f(x)$ 是偶函数

B.  $f(x)$ 是奇函数

C.  $f(x) = f(x+2)$

D.  $f(x+3)$ 是奇函数

**【考点】**3I: 奇函数、偶函数.

**【专题】**16: 压轴题.

**【分析】**首先由奇函数性质求 $f(x)$ 的周期, 然后利用此周期推导选择项.

**【解答】**解:  $\because f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 及点 $(-1, 0)$ 对称,

$\therefore f(x) + f(2-x) = 0, f(x) + f(-2-x) = 0,$

故有 $f(2-x) = f(-2-x),$

函数 $f(x)$ 是周期 $T = [2 - (-2)] = 4$ 的周期函数.

$\therefore f(-x-1+4) = -f(x-1+4),$

$f(-x+3) = -f(x+3),$

$f(x+3)$ 是奇函数.

故选: D.

**【点评】**本题主要考查奇函数性质的灵活运用, 并考查函数周期的求法.

12. (5分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 $F$ , 右准线为 $l$ , 点 $A \in l$ , 线段 $AF$ 交 $C$

于点 $B$ , 若 $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则 $|\overrightarrow{AF}| = ( )$

A.  $\sqrt{2}$

B. 2

C.  $\sqrt{3}$

D. 3

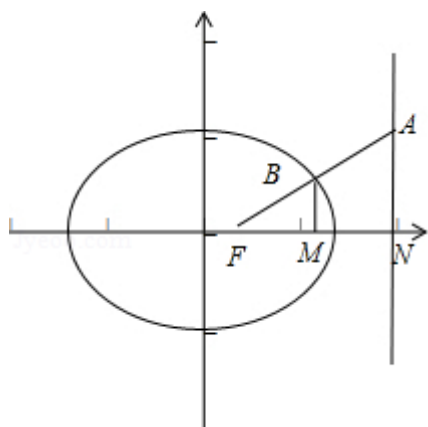
**【考点】**K4: 椭圆的性质.

**【专题】**11: 计算题; 16: 压轴题.

**【分析】**过点 $B$ 作 $BM \perp x$ 轴于 $M$ , 设右准线 $l$ 与 $x$ 轴的交点为 $N$ , 根据椭圆的性质可

知 $FN=1$ , 进而根据 $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ , 求出 $BM, AN$ , 进而可得 $|\overrightarrow{AF}|$ .

**【解答】**解: 过点 $B$ 作 $BM \perp x$ 轴于 $M$ ,



并设右准线 $l$ 与 $x$ 轴的交点为 $N$ ，易知 $FN=1$ 。

由题意 $\vec{FA}=3\vec{FB}$ ，

故 $FM=\frac{1}{3}$ ，故 $B$ 点的横坐标为 $\frac{4}{3}$ ，纵坐标为 $\pm\frac{1}{3}$

即 $BM=\frac{1}{3}$ ，

故 $AN=1$ ，

$\therefore |AF|=\sqrt{2}$ 。

故选：A。

**【点评】** 本小题考查椭圆的准线、向量的运用、椭圆的定义，属基础题。

## 二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

13. （5分） $(x-y)^{10}$ 的展开式中， $x^7y^3$ 的系数与 $x^3y^7$ 的系数之和等于 -240

**【考点】** DA：二项式定理。

**【专题】** 11：计算题。

**【分析】** 首先要了解二项式定理： $(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+C_n^ra^{n-r}b^r+\dots+C_n^na^0b^n$ ，各项的通项公式为： $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$ 。然后根据题目已知求解即可。

**【解答】** 解：因为 $(x-y)^{10}$ 的展开式中含 $x^7y^3$ 的项为 $C_{10}^3x^{10-3}y^3(-1)^3=-C_{10}^3x^7y^3$ ，

含 $x^3y^7$ 的项为 $C_{10}^7x^{10-7}y^7(-1)^7=-C_{10}^7x^3y^7$ 。

由 $C_{10}^3=C_{10}^7=120$ 知， $x^7y^3$ 与 $x^3y^7$ 的系数之和为 - 240.

故答案为 - 240.

**【点评】**此题主要考查二项式定理的应用问题，对于公式： $(a+b)^n=C_n^0a^n b^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+C_n^ra^{n-r}b^r+\dots+C_n^na^0b^n$ ，属于重点考点，同学们需要理解记忆.

14. (5分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，若 $S_9=81$ ，则 $a_2+a_5+a_8=$  27 .

**【考点】** 83：等差数列的性质； 85：等差数列的前 $n$ 项和.

**【分析】**由 $S_9$ 解得 $a_5$ 即可.

**【解答】**解： $\because S_9 = \frac{9(a_1+a_9)}{2} = 9a_5$

$\therefore a_5=9$

$\therefore a_2+a_5+a_8=3a_5=27$

故答案是27

**【点评】**本题考查前 $n$ 项和公式和等差数列的性质.

15. (5分) 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB=AC=AA_1=2$ ， $\angle BAC=120^\circ$ ，则此球的表面积等于  $20\pi$  .

**【考点】** LR：球内接多面体.

**【专题】** 11：计算题； 16：压轴题.

**【分析】**通过正弦定理求出底面外接圆的半径，设此圆圆心为 $O'$ ，球心为 $O$ ，在 $RT\triangle OBO'$ 中，求出球的半径，然后求出球的表面积.

**【解答】**解：在 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC=2$ ， $\angle BAC=120^\circ$ ，

可得 $BC=2\sqrt{3}$

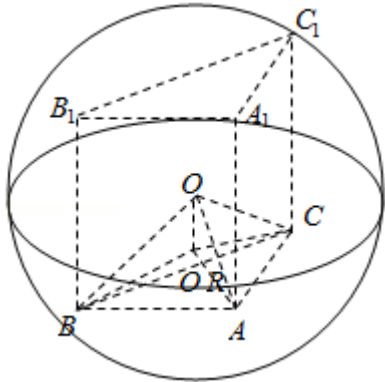
由正弦定理，可得 $\triangle ABC$ 外接圆半径 $r=2$ ，

设此圆圆心为 $O'$ ，球心为 $O$ ，在 $RT\triangle OBO'$ 中，

易得球半径 $R=\sqrt{5}$ ，

故此球的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$

故答案为：20π



**【点评】** 本题是基础题，解题思路是：先求底面外接圆的半径，转化为直角三角形，求出球的半径，这是三棱柱外接球的常用方法；本题考查空间想象能力，计算能力。

16. (5分) 若  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ，则函数  $y = \tan 2x \tan^3 x$  的最大值为 -8。

**【考点】** 3H：函数的最值及其几何意义；GS：二倍角的三角函数。

**【专题】** 11：计算题；16：压轴题。

**【分析】** 见到二倍角  $2x$

就想到用二倍角公式，之后转化成关于  $\tan x$  的函数，将  $\tan x$  看破成整体，最后转化成函数的最值问题解决。

**【解答】** 解：令  $\tan x = t$ ， $\because \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \therefore t > 1$ ，

$$\therefore y = \tan 2x \tan^3 x = \frac{2 \tan^4 x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2t^4}{1 - t^2} = \frac{2}{\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}} = \frac{2}{\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \leq \frac{2}{\frac{1}{4}} = -8$$

故填：-8。

**【点评】** 本题主要考查二倍角的正切，二次函数的方法求最大值等，最值问题是中学数学的重要内容之一，它分布在各块知识点，各个知识水平层面。以最值为载体，可以考查中学数学的所有知识点。

### 三、解答题（共6小题，满分70分）

17. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角A、B、C的对边长分别为a、b、c, 已知 $a^2 - c^2 = 2b$ , 且 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$ , 求b.

**【考点】**HR: 余弦定理.

**【分析】**根据正弦定理和余弦定理将 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$ 化成边的关系, 再根据 $a^2 - c^2 = 2b$ 即可得到答案.

**【解答】**解: 法一: 在 $\triangle ABC$ 中 $\because \sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$ ,

则由正弦定理及余弦定理有:

$$a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 3 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot c,$$

化简并整理得:  $2(a^2 - c^2) = b^2$ .

又由已知 $a^2 - c^2 = 2b \therefore 4b = b^2$ .

解得 $b = 4$ 或 $b = 0$  (舍);

法二: 由余弦定理得:  $a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cos A$ .

又 $a^2 - c^2 = 2b$ ,  $b \neq 0$ .

所以 $b = 2c \cos A + 2$  ① 又 $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$ ,

$\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C = 4 \cos A \sin C \sin(A+C) = 4 \cos A \sin C$ ,

即 $\sin B = 4 \cos A \sin C$ 由正弦定理得  $\sin B = \frac{b}{c} \sin C$ ,

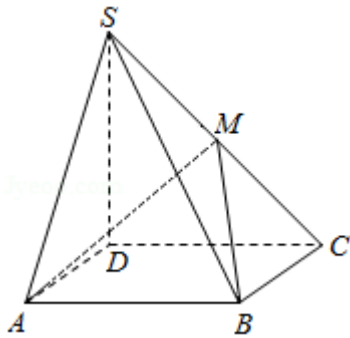
故 $b = 4c \cos A$  ② 由①, ②解得 $b = 4$ .

**【点评】**本题主要考查正弦定理和余弦定理的应用. 属基础题.

18. (12分) 如图, 四棱锥S - ABCD中, 底面ABCD为矩形,  $SD \perp$ 底面ABCD,  $AD = \sqrt{2}$ ,  $DC = SD = 2$ , 点M在侧棱SC上,  $\angle ABM = 60^\circ$

(I) 证明: M是侧棱SC的中点;

(II) 求二面角S - AM - B的大小.



【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系；MJ：二面角的平面角及求法

【专题】11：计算题；14：证明题.

【分析】（I）法一：要证明M是侧棱SC的中点，作 $MN \parallel SD$ 交CD于N，作 $NE \perp AB$ 交AB于E，连ME、NB，则 $MN \perp$ 面ABCD， $ME \perp AB$ ， $NE = AD = \sqrt{2}$ ，设 $MN = x$ ，则 $NC = EB = x$ ，解 $RT\triangle MNE$ 即可得x的值，进而得到M为侧棱SC的中点；

法二：分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，并求出S点的坐标、C点的坐标和M点的坐标，然后根据中点公式进行判断；

法三：分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，构造空间向量，然后数乘向量的方法来证明.

（II）我们可以以D为坐标原点，分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，我们可以利用向量法求二面角S - AM - B的大小.

【解答】证明：（I）作 $MN \parallel SD$ 交CD于N，作 $NE \perp AB$ 交AB于E，

连ME、NB，则 $MN \perp$ 面ABCD， $ME \perp AB$ ， $NE = AD = \sqrt{2}$

设 $MN = x$ ，则 $NC = EB = x$ ，

在 $RT\triangle MEB$ 中， $\because \angle MBE = 60^\circ \therefore ME = \sqrt{3}x$ .

在 $RT\triangle MNE$ 中由 $ME^2 = NE^2 + MN^2 \therefore 3x^2 = x^2 + 2$

解得 $x = 1$ ，从而 $MN = \frac{1}{2}SD \therefore M$ 为侧棱SC的中点M.

（I）证法二：分别以DA、DC、DS为x、y、z轴如图建立空间直角坐标系D - xyz，则 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ ， $B(\sqrt{2}, 2, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ ， $S(0, 0, 2)$ .

设 $M(0, a, b)$  ( $a > 0, b > 0$ )，

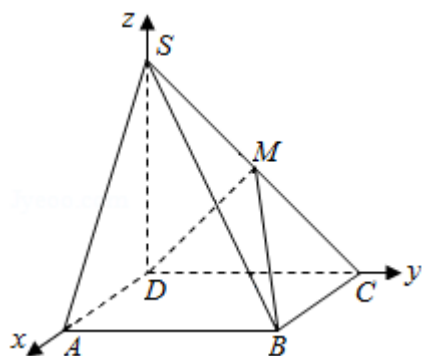
则 $\overrightarrow{BA} = (0, -2, 0)$ ， $\overrightarrow{BM} = (-\sqrt{2}, a-2, b)$ ， $\overrightarrow{SM} = (0, a, b-2)$ ， $\overrightarrow{SC} = (0, 2, -2)$ ，

$$\text{由题得} \begin{cases} \cos \langle \overrightarrow{BABM} \rangle = \frac{1}{2}, \\ \overrightarrow{SM} \parallel \overrightarrow{SC} \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{-2(a-2)}{2 \cdot \sqrt{(a-2)^2 + b^2 + 2}} = \frac{1}{2} \\ -2a = 2(b-2) \end{cases}$$

解之个方程组得  $a=1, b=1$  即  $M(0, 1, 1)$

所以  $M$  是侧棱  $SC$  的中点.



(I) 证法三: 设  $\overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{MC}$ ,

$$\text{则 } M(0, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{2}{1+\lambda}), \overrightarrow{MB} = (\sqrt{2}, \frac{2}{1+\lambda}, \frac{-2}{1+\lambda})$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AB} \rangle = 60^\circ$$

$$\text{故 } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{MB}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } \frac{4}{1+\lambda} = \sqrt{2 + (\frac{2}{1+\lambda})^2 + (\frac{2}{1+\lambda})^2},$$

解得  $\lambda=1$ , 所以  $M$  是侧棱  $SC$  的中点.

(II) 由 (I) 得  $M(0, 1, 1), \overrightarrow{MA} = (\sqrt{2}, -1, -1)$ ,

$$\text{又 } \overrightarrow{AS} = (-\sqrt{2}, 0, 2), \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0),$$

设  $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  分别是平面  $SAM, MAB$  的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AS} = 0 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases},$$

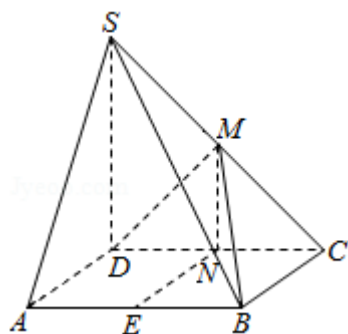
$$\text{即} \begin{cases} \sqrt{2}x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ -\sqrt{2}x_1 + 2z_1 = 0 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \sqrt{2}x_2 - y_2 - z_2 = 0 \\ 2y_2 = 0 \end{cases}$$

分别令  $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$  得  $z_1 = 1, y_1 = 1, y_2 = 0, z_2 = 2,$

即  $\vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1), \vec{n}_2 = (\sqrt{2}, 0, 2),$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{2+0+2}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

二面角  $S-AM-B$  的大小  $\pi - \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}.$



**【点评】** 空间两条直线夹角的余弦值等于他们方向向量夹角余弦值的绝对值；  
空间直线与平面夹角的余弦值等于直线的方向向量与平面的法向量夹角的正弦值；

空间锐二面角的余弦值等于他的两个半平面方向向量夹角余弦值的绝对值；

19. (12分) 甲、乙二人进行一次围棋比赛，约定先胜3局者获得这次比赛的胜利，比赛结束，假设在一局中，甲获胜的概率为0.6，乙获胜的概率为0.4，各局比赛结果相互独立，已知前2局中，甲、乙各胜1局.

(I) 求甲获得这次比赛胜利的概率；

(II) 设  $\xi$  表示从第3局开始到比赛结束所进行的局数，求  $\xi$  的分布列及数学期望

**【考点】** C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式; CG: 离散型随机变量及其分布列; CH: 离散型随机变量的期望与方差.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** (1) 由题意知前2局中，甲、乙各胜1局，甲要获得这次比赛的胜利需在后边的比赛中先胜两局，根据各局比赛结果相互独立，根据相互独立事件的概率公式得到结果.

(2) 由题意知  $\xi$  表示从第3局开始到比赛结束所进行的局数，由上一问可知  $\xi$  的

可能取值是2、3，由于各局相互独立，得到变量的分布列，求出期望.

**【解答】**解：记 $A_i$ 表示事件：第 $i$ 局甲获胜，（ $i=3、4、5$ ）

$B_j$ 表示第 $j$ 局乙获胜， $j=3、4$

（1）记 $B$ 表示事件：甲获得这次比赛的胜利，

∵前2局中，甲、乙各胜1局，

∴甲要获得这次比赛的胜利需在后面的比赛中先胜两局，

$$\therefore B = A_3A_4 + B_3A_4A_5 + A_3B_4A_5$$

由于各局比赛结果相互独立，

$$\therefore P(B) = P(A_3A_4) + P(B_3A_4A_5) + P(A_3B_4A_5)$$

$$= 0.6 \times 0.6 + 0.4 \times 0.6 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 \times 0.6$$

$$= 0.648$$

（2） $\xi$ 表示从第3局开始到比赛结束所进行的局数，由上一问可知 $\xi$ 的可能取值是2、3

由于各局相互独立，得到 $\xi$ 的分布列

$$P(\xi=2) = P(A_3A_4 + B_3B_4) = 0.52$$

$$P(\xi=3) = 1 - P(\xi=2) = 1 - 0.52 = 0.48$$

$$\therefore E\xi = 2 \times 0.52 + 3 \times 0.48 = 2.48.$$

**【点评】**认真审题是前提，部分考生由于考虑了前两局的概率而导致失分，这是很可惜的，主要原因在于没读懂题。另外，还要注意表述，这也是考生较薄弱的环节。

20. （12分）在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n + \frac{n+1}{2^n}$ .

（1）设 $b_n = \frac{a_n}{n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ .

**【考点】**8E：数列的求和；8H：数列递推式.

**【专题】**11：计算题；15：综合题.

**【分析】**（1）由已知得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{2^n}$ ，即 $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2^n}$ ，由此能够推导出所求的

通项公式.

(2) 由题设知 $a_n=2n - \frac{n}{2^{n-1}}$ , 故 $S_n=(2+4+\dots+2n) - (1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^{n-1}})$ , 设 $T_n=1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^{n-1}}$ , 由错位相减法能求出 $T_n=4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ . 从而导出数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ .

**【解答】**解: (1) 由已知得 $b_1=a_1=1$ , 且 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{2^n}$ ,

$$\text{即 } b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2^n}, \text{ 从而 } b_2=b_1+\frac{1}{2},$$

$$b_3=b_2+\frac{1}{2^2},$$

$$b_n=b_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

$$\text{于是 } b_n=b_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

又 $b_1=1$ ,

故所求的通项公式为 $b_n=2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ .

(2) 由(1)知 $a_n=2n - \frac{n}{2^{n-1}}$ ,

故 $S_n=(2+4+\dots+2n) - (1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^{n-1}})$ ,

$$\text{设 } T_n=1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^{n-1}}, \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}, \quad \textcircled{2}$$

① - ②得,

$$\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n}=2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n},$$

$$\therefore T_n=4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

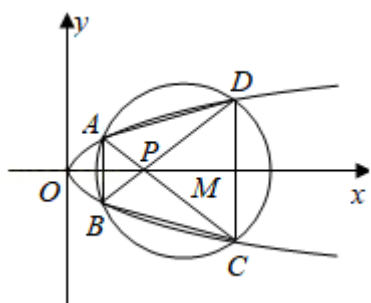
$$\therefore S_n=n(n+1) + \frac{n+2}{2^{n-1}} - 4.$$

**【点评】** 本题考查数列的通项公式和前 $n$ 项和的求法, 解题时要注意错位相减法的合理运用.

21. (12分) 如图, 已知抛物线E:  $y^2=x$ 与圆M:  $(x-4)^2+y^2=r^2$  ( $r>0$ ) 相交于A、B、C、D四个点.

(I) 求r的取值范围;

(II) 当四边形ABCD的面积最大时, 求对角线AC、BD的交点P的坐标.



**【考点】** IR: 两点间的距离公式; JF: 圆方程的综合应用; K8: 抛物线的性质.

**【专题】** 15: 综合题; 16: 压轴题.

**【分析】** (1) 先联立抛物线与圆的方程消去y, 得到x的二次方程, 根据抛物线E:  $y^2=x$ 与圆M:  $(x-4)^2+y^2=r^2$  ( $r>0$ ) 相交于A、B、C、D四个点的充要条件是此方程有两个不相等的正根, 可求出r的范围.

(2) 先设出四点A, B, C, D的坐标再由(1)中的x二次方程得到两根之和、两根之积, 表示出面积并求出其的平方值, 最后根据三次均值不等式确定得到最大值时的点P的坐标.

**【解答】** 解: (I) 将抛物线E:  $y^2=x$ 代入圆M:  $(x-4)^2+y^2=r^2$  ( $r>0$ ) 的方程,

消去 $y^2$ , 整理得 $x^2 - 7x + 16 - r^2 = 0$  (1)

抛物线E:  $y^2=x$ 与圆M:  $(x-4)^2+y^2=r^2$  ( $r>0$ ) 相交于A、B、C、D四个点的充要条件是:

方程(1)有两个不相等的正根

$$\therefore \begin{cases} 49 - 4(16 - r^2) > 0 \\ x_1 + x_2 = 7 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 16 - r^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} r < \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ 或 } r > \frac{\sqrt{15}}{2} \\ -4 < r < 4 \end{cases}$$

解这个方程组得  $\frac{\sqrt{15}}{2} < r < 4$ ,  $r \in (\frac{\sqrt{15}}{2}, 4)$ .

(II) 设四个交点的坐标分别为

$$A(x_1, \sqrt{x_1}), B(x_1, -\sqrt{x_1}), C(x_2, -\sqrt{x_2}), D(x_2, \sqrt{x_2}).$$

则直线AC、BD的方程分别为  $y - \sqrt{x_1} = \frac{-\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ ,  $y + \sqrt{x_1} = \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1}$

$$(x - x_1),$$

解得点P的坐标为  $(\sqrt{x_1 x_2}, 0)$ ,

则由 (I) 根据韦达定理有  $x_1 + x_2 = 7$ ,  $x_1 x_2 = 16 - r^2$ ,  $r \in (\frac{\sqrt{15}}{2}, 4)$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |x_2 - x_1| (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = |x_2 - x_1| (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$$

$$\therefore S^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] (x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}) = (7 + 2\sqrt{16 - r^2})(4r^2 - 15)$$

$$\text{令 } \sqrt{16 - r^2} = t,$$

则  $S^2 = (7 + 2t)^2 (7 - 2t)$  下面求  $S^2$  的最大值.

$$\text{由三次均值有: } S^2 = (7 + 2t)^2 (7 - 2t) = \frac{1}{2} (7 + 2t) (7 + 2t) (14 - 4t)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left( \frac{7 + 2t + 7 + 2t + 14 - 4t}{3} \right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{28}{3} \right)^3$$

当且仅当  $7 + 2t = 14 - 4t$ , 即  $t = \frac{7}{6}$  时取最大值.

经检验此时  $r \in (\frac{\sqrt{15}}{2}, 4)$  满足题意.

故所求的点P的坐标为  $(\frac{7}{6}, 0)$ .

**【点评】** 本题主要考查抛物线和圆的综合问题. 圆锥曲线是高考必考题, 要强化复习.

22. (12分) 设函数  $f(x) = x^3 + 3bx^2 + 3cx$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 \in [-1, 0]$ ,  $x$

$x_2 \in [1, 2]$ .

(1) 求b、c满足的约束条件，并在下面的坐标平面内，画出满足这些条件的点(b, c)的区域；

(2) 证明： $-10 \leq f(x_2) \leq -\frac{1}{2}$ .

**【考点】** 6D: 利用导数研究函数的极值； 7B: 二元一次不等式(组)与平面区域； R6: 不等式的证明.

**【专题】** 11: 计算题； 14: 证明题； 16: 压轴题.

**【分析】** (1) 根据极值的意义可知，极值点 $x_1$ 、 $x_2$ 是导函数等于零的两个根，根据根的分布建立不等关系，画出满足条件的区域即可；

(2) 先用消元法消去参数b，利用参数c表示出 $f(x_2)$ 的值域，再利用参数c的范围求出 $f(x_2)$ 的范围即可.

**【解答】** 解：(I)  $f'(x) = 3x^2 + 6bx + 3c$ , (2分)

依题意知，方程 $f'(x) = 0$ 有两个根 $x_1$ 、 $x_2$ ，且 $x_1 \in [-1, 0]$ ， $x_2 \in [1, 2]$

等价于 $f'(-1) \geq 0$ ， $f'(0) \leq 0$ ， $f'(1) \leq 0$ ， $f'(2) \geq 0$ .

由此得b, c满足的约束条件为 
$$\begin{cases} c \geq 2b - 1 \\ c \leq 0 \\ c \leq -2b - 1 \\ c \geq -4b - 4 \end{cases} \quad (4分)$$

满足这些条件的点(b, c)的区域为图中阴影部分. (6分)

(II) 由题设知 $f'(x_2) = 3x_2^2 + 6bx_2 + 3c = 0$ ,

则  $bx_2 = -\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}c$ ,

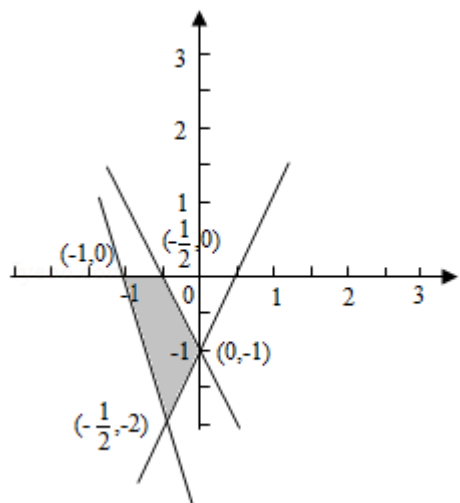
故  $f(x_2) = x_2^3 + 3bx_2^2 + 3cx_2 = -\frac{1}{2}x_2^3 + \frac{3c}{2}x_2$ . (8分)

由于 $x_2 \in [1, 2]$ ，而由(I)知 $c \leq 0$ ,

故  $-4 + 3c \leq f(x_2) \leq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}c$ .

又由(I)知  $-2 \leq c \leq 0$ , (10分)

所以  $-10 \leq f(x_2) \leq -\frac{1}{2}$ .



**【点评】** 本题主要考查了利用导数研究函数的极值，以及二元一次不等式（组）与平面区域和不等式的证明，属于基础题.