2005年天津高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第Ⅰ卷（选择题　共50分）

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．不能答在试题卷上．

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

P(A+B)=P(A)+P(B)

如果事件A、B相互独立，那么

P(A•B)=P(A)•P(B)

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

柱体（棱柱、圆柱）的体积公式

V柱体=Sh

其中S表示柱体的底面积，

h表示柱体的高．

一、选择题 本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x||4x-1|\ge 9,x\in R\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x}{x+3}\ge 0,x\in R\right.\right\}$，　则A∩B=　　（　　）

A．$(-3,-2]$　　B．$(-3,-2]\cup[0,\frac{5}{2}]$

C．$(-\infty,-3]\cup[\frac{5}{2},+\infty)$　　D．$(-\infty,-3)\cup[\frac{5}{2},+\infty)$

2．若复数 $\frac{a+3i}{1+2i}$（a∈R，i为虚数单位位）是纯虚数，则实数a的值为　（　　）

A．－2　B．4　C．－6　　D．6

3．给出下列三个命题

①若 $a\ge b>-1$，则 $\frac{a}{1+a}\ge\frac{b}{1+b}$

②若正整数m和n满足 $m\le n$，则 $\sqrt{m(n-m)}\le\frac{n}{2}$

③设 $P(x_1,y_1)$ 为圆 $O_1:x^2+y^2=9$ 上任一点，圆02以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为1．当

$(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$时,圆 01 与圆 02 相切

其中假命题的个数为　　　　　　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4．设α、、β、γ为平面，m、n、l为直线，则$m\perp\beta$的一个充分条件是　（　　）

A. $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,m\perp l$　　B. $\alpha\cap\gamma=m,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

C. $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,m\perp\alpha$　　D. $n\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp\alpha$

5．设双曲线以椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$长轴的两个端点为焦点，其准线过椭圆的焦点，则双曲线的渐近线的斜率为　　　　　　（　　）

A. ±2　B. $\pm\dfrac{4}{3}$　C. $\pm\dfrac{1}{2}$　D. $\pm\dfrac{3}{4}$

6．从集合{1,2,3…，11}中任选两个元素作为椭圆方程$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$中的 m 和 n,则能组成落在矩形区域 B={(x,y)|　|x|<11 且|y|<9}内的椭圆个数为　　　　（　　）

A. 43　　B.　72　C.　86　D.　90

7．某人射击一次击中的概率为 0.6,经过 3 次射击,此人至少有两次击中目标的概率为（　　）

A. $\dfrac{81}{125}$　　B. $\dfrac{54}{125}$　　C. $\dfrac{36}{125}$　　D. $\dfrac{27}{125}$

8．要得到函数$y=\sqrt{2}\cos x$的图象，只需将函数$y=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$的图象上所有的点的（　　）

A．横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变），再向左平行移动$\dfrac{\pi}{8}$个单位长度

B．横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变），再向右平行移动$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度

C．横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平行移动$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度

D．横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动$\dfrac{\pi}{8}$个单位长度

9．设$f^{-1}(x)$是函数$f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})\,(a>1)$的反函数，则使$f^{-1}(x)>1$成立的 x 的取值范围为　　　　　　（　　）

A. $(\frac{a^2-1}{2a},+\infty)$ B. $(-\infty,\frac{a^2-1}{2a})$ C. $(\frac{a^2-1}{2a},a)$ D. $[a,+\infty)$

10．若函数$f(x)=\log_a(x^3-ax)\ (a>0,a\neq 1)$在区间$(-\frac{1}{2},0)$内单调递增，则 a 的取值范围是 （ ）

A. $[\frac{1}{4},1)$ B. $[\frac{3}{4},1)$ C. $(\frac{9}{4},+\infty)$ D. $(1,\frac{9}{4})$

第Ⅱ卷（非选择题 共 100 分）

注意事项：

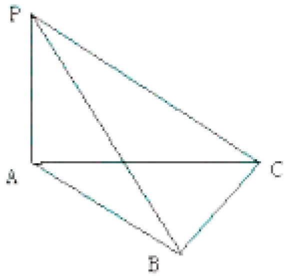
1．答卷前将密封线内的项目填写清楚.

2．用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上.

二、填空题：本大题共 6 小题， 每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.

11．设$n\in N^*$，则$C_n^1+C_n^2 6+C_n^3 6^2+\cdots+C_n^n 6^{n-1}=$.

12．如图，PA⊥平面 ABC，∠ABC=90° 且 PA=AC=BC=a，则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于________ _.



13．在数列{an}中，a1=1，a2=2，且$a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n\ (n\in N^*)$，

则$S_{100}=$__ ___.

14．在直角坐标系 x0y 中，已知点 A(0,1)和点 B(－3,4)，若点 C 在∠AOB 的平分线上且$|\overrightarrow{OC}|=2$，则$\overrightarrow{OC}=$

15．某公司有 5 万元资金用于投资开发项目，如果成功，一年后可获利 12%，一旦失败，一年后将丧失全部资金的 50%，下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果：

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是___________（元）.

16．设 f(x)是定义在 R 上的奇函数，且 y=f (x)的图象关于直线$x=\frac{1}{2}$对称，则 f (1)+ f (2)+ f (3)+ f (4)+ f (5)=________________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分 12 分）

在ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边长分别为a、b、c，设a、b、c满足条件

$b^2+c^2-bc=a^2$和$\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$，求$\angle A$和$\tan B$的值.

18.（本小题满分 12 分）

已知$u_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n\ (n\in N^*,a>0,b>0)$.

（Ⅰ）当$a=b$时，求数列$\{u_n\}$的前 n 项和S_n；

（Ⅱ）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$.

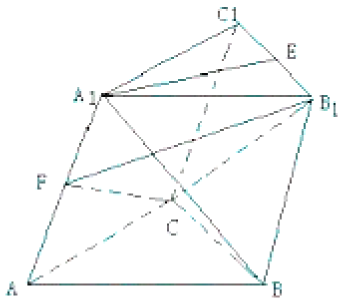
19.（本小题满分 12 分）

如图，在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle A_1AB=\angle A_1AC,AB=AC,A_1A=A_1B=a$，侧面$B_1BCC_1$与底面 ABC 所成的二面角为$120^\circ$，E、F 分别是棱$B_1C_1$、$A_1A$的中点.

（Ⅰ）求A_1A与底面 ABC 所成的角；

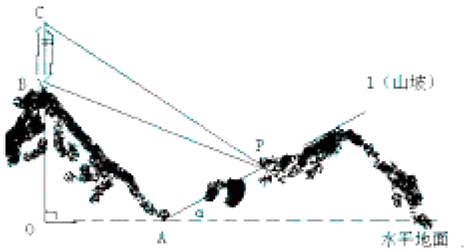
（Ⅱ）证明A_1E //平面B_1FC；

（Ⅲ）求经过A_1、A、B、C四点的球的体积.



20.（本小题满分 12 分）

某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔，如图所示，塔高 BC=80（米），塔所在的山高 OB=220（米），OA=200（米），图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上，l与水平地面的夹角为α，tanα=1/2 试问此人距水平地面多远时，观看塔的视角∠BPC 最大（不计此人的身高）



21.（本小题满分 14 分）

抛物线 C 的方程为 $y = ax^2 (a < 0)$，过抛物线 C 上一点 P(x0, y0)(x0≠0)作斜率为 k1, k2 的两条直线分别交抛物线 C 于 A(x1, y1)B(x2, y2)两点(P, A, B 三点互不相同)，且满足 $k_2 + \lambda k_1 = 0(\lambda \neq 0 且 \lambda \neq -1)$.

（Ⅰ）求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程；

（Ⅱ）设直线 AB 上一点 M，满足 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MA}$，证明线段 PM 的中点在 y 轴上；

（Ⅲ）当 λ =1 时，若点 P 的坐标为（1，-1)，求∠PAB 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

22.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x) = x \sin x \,(x \in R)$.

（Ⅰ）证明 $f(x + 2k\pi) - f(x) = 2k\pi \sin x$，其中 k 为整数；

（Ⅱ）设 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点，证明 $[f(x_0)]^2 = \dfrac{{x_0}^4}{1 + {x_0}^2}$；

（Ⅲ）设 $f(x)$ 在(0, +∞)内的全部极值点按从小到大的顺序排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，证明

$$\frac{\pi}{2} < a_{n+1} - a_n < \pi \ (n = 1,2,\cdots)$$.

参考答案

说明：

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算.每小题 5 分，满分 50 分.

1．D　2．C　3．B　4．D　5．C　6．B　7．A　8．C　9．A　10．B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分，满分 24 分.

11．$\frac{1}{6}(7^n-1)$　12．$\sqrt{2}$　13．2600　14．$(-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{3\sqrt{10}}{5})$　15．4760　16．0

三、解答题：

17．本小题考查余弦定理、正弦定理、两角差的正弦公式、同角三角函数的基本关系等基础知识，考查基本运算能力. 满分 12 分.

解法一：由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因此，$\angle A=60^\circ$ 在△ABC 中，∠C=180°－∠A－∠B=120°－∠B.

由已知条件，应用正弦定理 $\frac{1}{2}+\sqrt{3}=\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin(120^\circ-B)}{\sin B}$

$$=\frac{\sin 120^\circ\cos B-\cos 120^\circ\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cot B+\frac{1}{2},$$

解得 $\cot B=2,$ 从而 $\tan B=\frac{1}{2}.$

解法二：由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因此，$\angle A=60^\circ$，由 $b^2+c^2-bc=a^2$，

得 $(\frac{a}{b})^2=1+(\frac{c}{b})^2-\frac{c}{b}=1+\frac{1}{4}+\sqrt{3}+3-\frac{1}{2}-\sqrt{3}=\frac{15}{4}.$

所以 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$　　①

由正弦定理 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

由①式知 $a>b,$ 故∠B<∠A，因此∠B 为锐角，于是 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{2}{\sqrt{15}}$，

从而 $\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{1}{2}.$

18．本小题主要考查等差数列和等比数列的前 n 项和公式、求数列的前 n 项和的基本方法、求数列的极限等基础知识，考查运算能力．满分 12 分．

（I）解：当$a=b$时,$u_n=(n-1)a^n$，这时数列$\{u_n\}$的前 n 项和

$$S_n=2a+3a^2+4a^3+\cdots+na^{n-1}+(n+1)a^n. \quad ①$$

①式两边同乘以a，得$aS_n=2a^2+3a^3+4a^4+\cdots+na^n+(n+1)a^{n+1}. \quad ②$

①式减去②式，得$(1-a)S_n=2a+a^2+a^3+\cdots+a^n-(n+1)a^{n+1}.$

若$a\neq 1,\qquad (1-a)S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-(n+1)a^{n+1}+a$，

$$S_n=\frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}+\frac{a-(n+1)a^{n+1}}{1-a}=\frac{(n+1)a^{n+2}-(n+2)a^{n+1}-a^2+2a}{(1-a)^2}.$$

若$a=1$，$S_n=2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{n(n+3)}{2}.$

（II）解：由（I），当$a=b$时，$a_n=(n+1)a^n$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)a_n}{na^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(n+1)}{n}=a.$

当$a\neq b$时，$a_n=a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n=a^n[1+\dfrac{b}{a}+(\dfrac{b}{a})^2+\cdots+(\dfrac{b}{a})^n]$

$$=a^n\frac{1-(\frac{b}{a})^{n+1}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{1}{a-b}(n^{n+1}-b^{n+1}).$$

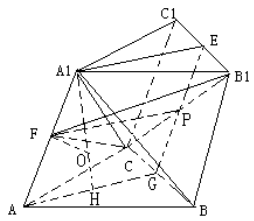
此时，$\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}.$若$a>b>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-b(\frac{b}{a})^n}{1-(\frac{b}{a})^n}=a.$$

若$b>a>0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(\frac{a}{b})^n-b}{(\frac{a}{b})^n-1}=b.$

19．本小题主要考查棱柱、球、二面角、线面关系等基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力.满分 12 分.

（Ⅰ）解：过 A1 作 A1H⊥平面 ABC，垂足为 H.



连结 AH，并延长交 BC 于 G，连结 EG，于是∠A1AH 为 A1A 与底面 ABC 所成的角.

∵∠A1AB=∠A1AC，　∴AG 为∠BAC 的平分线.

又∵AB=AC，　∴AG⊥BC，且 G 为 BC 的中点

因此，由三垂线定理，A1A⊥BC.

∵A1A//B1B，且 EG//B1B，　EG⊥BC　于是

∠AGE 为二面角 A—BC—E 的平面角，即

∠AGE=120°

由于四边形 A1AGE 为平行四边形，得∠A1AG=60°，

所以，A1A 与底面 ABC 所成的角为 60°，

（Ⅱ）证明：设 EG 与 B1C 的交点为 P，则点 P 为 EG 的中点，连结 PF.

在平行四边形 AGEA1 中，因 F 为 A1A 的中点，故 A1E//FP.

而 FP⊂平面 B1FC，A1E//平面 B1FC，所以 A1E//平面 B1FC.

（Ⅲ）解：连结 A1C，在△A1AC 和△A1AB 中，由于 AC=AB，∠A1AC=∠A1AB，A1A=A1A，则△A1AC≌△A1AB，故 A1C=A1B，由已知得 A1A=A1B=A1C=a.

又∵A1H⊥平面 ABC，　∴H 为△ABC 的外心.

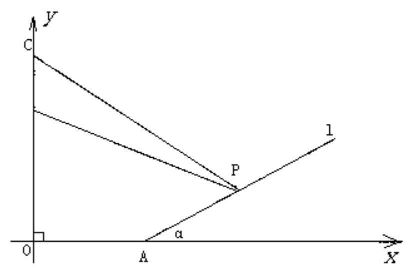
设所求球的球心为 O，则 O∈A1H，且球心 O 与 A1A 中点的连线 OF⊥A1A.

在 Rt△A1FO 中，$A_1O=\dfrac{A_1F}{\cos AA_1H}=\dfrac{\frac{1}{2}a-}{\cos 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}.$

故所求球的半径 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^3=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

20.本小题考查根据实际问题建立函数关系并应用解析几何和代数的方法解决实际问题的能力，满分 12 分.

解：如图所示，建立平面直角坐标系，



则 A（200，0），B（0，220），C（0，300），

直线 l 的方程为 $y=(x-200)\tan\alpha$，即

$y=\dfrac{x-200}{2}.$ 设点 P 的坐标为（x，y），

则 $P(x,\dfrac{x-200}{2})(x>200).$

由经过两点的直线的斜率公式 $k_{PC}=\dfrac{\frac{x-200}{2}-300}{x}=\dfrac{x-800}{2x},$

$$k_{PB}=\frac{\frac{x-200}{2}-220}{x}=\frac{x-640}{2x}.$$

由直线 PC 到直线 PB 的角的公式得

$$\tan BPC=\frac{k_{PB}-k_{PC}}{1-k_{PB}\cdot k_{PC}}=\frac{\frac{160}{2x}}{1+\frac{x-800}{2x}\cdot\frac{x-640}{2x}}=\frac{64x}{x^2-288x+160\times 640}$$

$$=\frac{64}{x+\frac{160\times 640}{x}-288}(x>200).$$

要使 tanBPC 达到最大，只须 $x+\frac{160\times 640}{x}-288$ 达到最小，由均值不等式

$$x+\frac{160\times 640}{x}-288\ge 2\sqrt{160\times 640}-288,$$

当且仅当 $x=\frac{160\times 640}{x}$ 时上式取得等号，故当 x=320 时 tanBPC 最大，这时，点 P 的纵坐标 y 为 $y=\frac{320-200}{2}=60.$

由此实际问题知，$0<\angle BPC<\frac{\pi}{2},$ 所以 tanBPC 最大时，∠BPC 最大，故当此人距水平地面 60 米高时，观看铁塔的视角∠BPC 最大.

21．本小题主要考查抛物线的几何性质、直线方程、平面向量、直线与曲线相交、两条直线的夹角等解析几何的基础知识、基本思想方法和综合解题能力，满分 14 分.

（Ⅰ）解：由抛物 C 的方程 $y=ax^2(a<0)$得,焦点坐标为$(0,\frac{1}{4a})$，准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}.$

（Ⅱ）证明：设直线 PA 的方程 $y-y_0=k_1,(x-x_0)$，直线 PB 的方程为 $y-y_0=k_2(x-x_0)$.

点$P(x_0,y_0)$和点$A(x_1,y_1)$的坐标是方程组

$$\begin{cases}y=y_0=k_1(x-x_0) & ①\\ y=ax^2 & ②\end{cases}$$

的解、将②式代入①式得 $ax^3-k_1x+k_1x_0-y_0=0,$于是$x_1+x_0=\frac{k_1}{a},$故$x_1=\frac{k_1}{a}-x_0.$ ③

又点$P(x_0,y_0)$和点$B(x_2,y_2)$的坐标是方程组$\begin{cases}y-y_0=k_2(x-x_0) & ④\\ y=ax^2 & ⑤\end{cases}$

的解、将⑤式代入④式得 $ax^3-k_2x+k_2x_0-y_0=0$,于是$x_2+x_0=\frac{k_2}{a}$,故$x_1=\frac{k_2}{a}-x_0$.

由已知得,$k_2=-\lambda k_1$,则$x_2=-\frac{\lambda}{a}k_1-x_0$. ⑥

设点M的坐标为(x_M,y_M),由$\overrightarrow{BM}=\lambda,\overrightarrow{MA}$,则 $x_M=\frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$.

将③式和⑥式代入上式得 $x_M=\frac{-x_0-\lambda x_0}{1+\lambda}=-x_0$.

即$x_M+x_0=0$.所以,线段PM的中点在y轴上.

（Ⅲ）解：因为点 P（1，－1）在抛物线 $y=ax^2$ 上，所以 $a=-1$,抛物线方程$y=-x^2$.

由③式知 $x_1=-k_1-1$,代入$y=-x^2$得$y_1=-(k_1+1)^2$.

将$\lambda=1$代入 ⑥式得 $x_2=k_1-1$,代入$y=-x^2$得$y_2=-(k_1-1)^2$.

因此，直线 PA、PB 分别与抛物线 C 的交点 A、B 的坐标为

$A(-k_1-1,-k_1{}^2-2k_1-1),B(k_1-1,-k_1{}^2+2k_1-1)$.

于是 $\overrightarrow{AP}=(k_1+2,k_1{}^2+2k_1)$, $\overrightarrow{AB}=(2k_1,4k_1)$,

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2k_1(k_1+2)+4k_1(k_1{}^2+2k_1)=2k_1(k_1+2)(2k_1+1)$.

因∠PAB 为钝角且 P、A、B 三点互不相同，故必有 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}<0$,即

$k_1(k_1+2)(2k+1)<0$. 求得 k1 的取值范围为 $k_1<-2$或$-\frac{1}{2}<k_1<0$.

又点 A 的纵坐标 y_1满足$y_1=-(k_1+1)^2$,故

当$k_1<-2$时,$y_1<-1$;

当$-\frac{1}{2}<k_1<0$时,$-1<y_1<-\frac{1}{4}$.

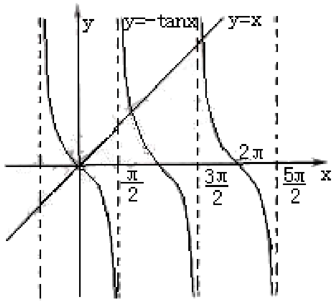
所以，∠PAB 为钝角时点 A 的纵坐标 y1 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(-1,-\frac{1}{4})$.

22．本小题考查函数和函数的极值的基本概念和方法，考查应用导数、同角三角函数、数形结合等方法分析问题和综合解题能力，满分 14 分.

（Ⅰ）证明：由函数 f （x)的定义，对任意整数 k，有

$f(x+2k\pi)-f(x)=(x+2k\pi)\sin(x+2k\pi)-x\sin x$

$$=(x+2k\pi)\sin x-x\sin x$$
$$=2k\pi\sin x.$$



（Ⅱ）证明：函数$f(x)$在定义域R上

可导$f'(x)=\sin x+x\cos x$, ①

令$f'(x)=0$,得$\sin x+x\cos x=0$.

显然，对于满足上述方程的 x 有$\cos x\neq 0$，上述方程化简为$x=-\tan x$.如图所示，此方程一定有解，$f(x)$的极值点x_0一定满足$\tan x_0=-x_0$.

由$\sin^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$,得$\sin^2 x_0=\dfrac{\tan^2 x_0}{1+\tan^2 x_0}$.

因此，$[f(x)]^2=x_0^2\sin^2 x_0=\dfrac{x_0^4}{1+x_0^2}$

（Ⅲ）证明：设$x_0>0$是$f'(x)=0$的任意正实根,即$x_0=-\tan x_0$,则存在一个非负整数k,使

$x_0\in(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi)$,即$x_0$在第二或第四象限内. 由①式，$f'(x)=\cos x(\tan x+x)$在第二象限或第四象限中的符号可列表如下：

x		$(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,x_0)$	x0	$(x_0,\pi+k\pi)$
$f'(x)$的符号	k 为奇数	—	0	+
	k 为偶数	+	0	—

所以满足$f'(x)=0$的正根 x0 都为$f(x)$的极值点.

由题设条件，$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$为方程$x=-\tan x$的全部 正实根且满足

$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$, 那么对于 n=1, 2, ⋯,

$a_{n+1}-a_n=-(\tan a_{n+1}-\tan a_n)$

$$=-(1+\tan a_{n+1}\cdot\tan a_n)\tan(a_{n+1}-a_n).\quad ②$$

由于$\dfrac{\pi}{2}+(n-1)\pi<a_n<\pi+(n-1)\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi<a_{n+1}<\pi+n\pi$,则$\dfrac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\dfrac{3\pi}{2}$,

由于 $\tan a_{n+1}\cdot\tan a_n>0,$ 由②式知 $\tan(a_{n+1}-a_n)<0.$ 由此可知 $a_{n+1}-a_n$ 必在第二象限，即

$a_{n+1}-a_n<\pi.$ 综上，$\frac{\pi}{2}<a_{n+1}-a_n<\pi.$