2014年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数　学（理科）

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集$U=\{x\in N\mid x\geq 2\}$，集合$A=\{x\in N\mid x^2\geq 5\}$，则$C_U A=$（　）

A. $\varnothing$　　B. $\{2\}$　　C. $\{5\}$　　D. $\{2,5\}$

2. 已知i是虚数单位，$a,b\in R$,则“$a=b=1$”是“$(a+bi)^2=2i$”的（　）

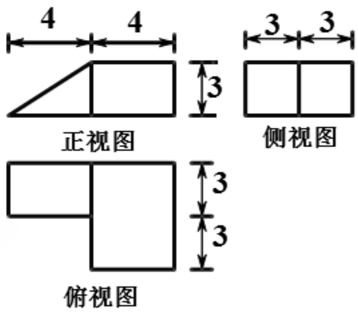
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则此几何体的表面积是(　)

A. $90\,cm^2$　　B. $129\,cm^2$

C. $132\,cm^2$　　D. $138\,cm^2$



4.

为了得到函数$y=\sin 3x+\cos 3x$的图像，可以将函数$y=\sqrt{2}\cos 3x$的图像（　）

A. 向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位　B. 向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位

C. 向右平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位　D. 向左平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位

5.在$(1+x)^6(1+y)^4$的展开式中,记$x^m y^n$项的系数$f(m,n)$，则

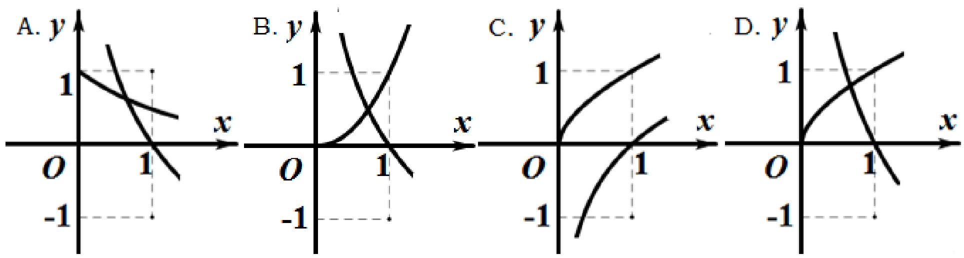
$f(3,0)+f(2,1)+f(1,2)+f(0,3)=$　　（　）

A. 45　　B. 60　　C. 120　　D. 210

6. 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且$0<f(-1)=f(-2)=f(-3)\leq 3$（　）

A. $c\leq 3$　　B. $3<c\leq 6$　　C. $6<c\leq 9$　　D. $c>9$

7. 在同一直角坐标系中，函数$f(x)=x^a(x\geq 0)$，$g(x)=\log_a x$ 的图像可能是（　）



8. 记$\max\{x,y\}=\begin{cases}x, x\geq y\\ y, x<y\end{cases}$，$\min\{x,y\}=\begin{cases}y, x\geq y\\ x, x<y\end{cases}$，设$\vec{a},\vec{b}$为平面向量，则（　）

A. $\min\{|\vec{a}+\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|\}\leq\min\{|\vec{a}|,|\vec{b}|\}$

B. $\min\{|\vec{a}+\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|\}\geq\min\{|\vec{a}|,|\vec{b}|\}$

C. $\max\{|\vec{a}+\vec{b}|^2,|\vec{a}-\vec{b}|^2\}\leq|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

D. $\max\{|\vec{a}+\vec{b}|^2,|\vec{a}-\vec{b}|^2\}\geq|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

9.

已知甲盒中仅有1个球且为红球，乙盒中有m个红球和n个篮球$(m \geq 3, n \geq 3)$，从乙盒中随机抽取$i\ (i=1,2)$个球放入甲盒中.

（a）放入i 个球后，甲盒中含有红球的个数记为$\xi_i(i=1,2)$；

（b）放入i个球后，从甲盒中取1个球是红球的概率记为$p_i(i=1,2)$.

则（ ）

A. $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$　　B. $p_1 < p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$

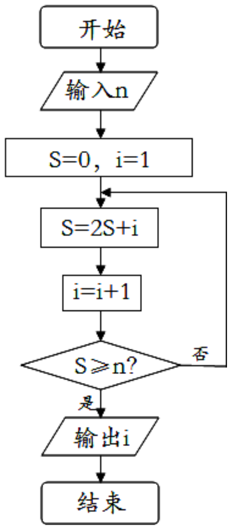
C. $p_1 > p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$　　D. $p_1 < p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$

10. 设函数$f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=2(x-x^2)$，$f_3(x)=\frac{1}{3}|\sin 2\pi x|$，$a_i=\frac{i}{99}$，$i=0,1,2,\cdots,99$，记$I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$，$k=1,2,3$ 则（ ）

A. $I_1 < I_2 < I_3$　B. $I_2 < I_1 < I_3$　C. $I_1 < I_3 < I_2$　D. $I_3 < I_2 < I_1$

二. 填空题：本大题共7小题，每小题4分，共28分.

11. 若某程序框图如图所示，当输入50时，则该程序运算后输出的结果是________.



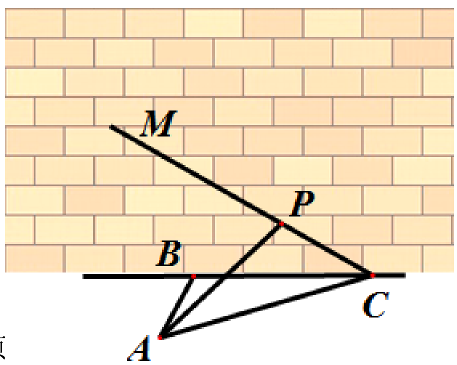
12. 随机变量ξ的取值为0,1,2，若$P(\xi=0)=\frac{1}{5}$，$E(\xi)=1$，则$D(\xi)=$________.

13.当实数x,y满足$\begin{cases} x+2y-4 \leq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$时，$1 \leq ax+y \leq 4$恒成立，则实数$a$的取值范围是________.

14. 在8张奖券中有一、二、三等奖各1张，其余5张无奖.将这8张奖券分配给4个人，每人2张，不同的获奖情况有_____种（用数字作答）.

15.设函数$f(x)=\begin{cases} x^2+x, & x<0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$若$f(f(a)) \leq 2$，则实数$a$的取值范围是______

16.设直线$x-3y+m=0\ (m \neq 0)$与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）两条渐近线分别交于点A，B.若点$P(m,0)$满足$|PA|=|PB|$,则该双曲线的离心率是__________



17、如图，某人在垂直于水平地面ABC的墙面前的点A处进行射击训练.已知点A到墙面的距离

为AB，某目标点P沿墙面上的射击线CM移动，此人为了准确瞄准目标点P，需计算由点A观察点P的仰角θ的大小.若$AB=15m$，$AC=25m$，$\angle BCM=30^\circ$,则$\tan\theta$的最大值是__________________(仰角θ为直线AP与平面ABC所成角)

三. 解答题：本大题共5小题，共72分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18.（本题满分14分）

在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c．已知$a\neq b, c=\sqrt{3}$

$\cos^2 A-\cos^2 B=\sqrt{3}\sin A\cos A-\sqrt{3}\sin B\cos B$

（I）求角C的大小；

（II）若$\sin A=\dfrac{4}{5}$，求△ABC的面积.

19.（本题满分14分）

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1a_2a_3\cdots a_n=(\sqrt{2})^{b_n}$ $(n\in N^*)$.若$\{a_n\}$为等比数列，且$a_1=2, b_3=6+b_2$

(I) 求a_n与b_n；

(II) 设$c_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{b_n}(n\in N^*)$.记数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$S_n$，

（i）求S_n；

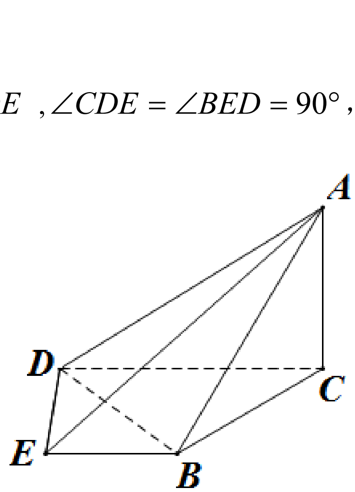
（ii）求正整数k，使得对任意$n\in N^*$均有$S_k\geq S_n$.

20.（本题满分15分）

如图，在四棱锥$A-BCDE$中，平面$ABC\perp$平面$BCDE$，$\angle CDE=\angle BED=90^\circ$，$AB=CD=2$，$DE=BE=1$，$AC=\sqrt{2}$.

(I) 证明：$DE\perp$平面ACD；

(II) 求二面角$B-AD-E$的大小.

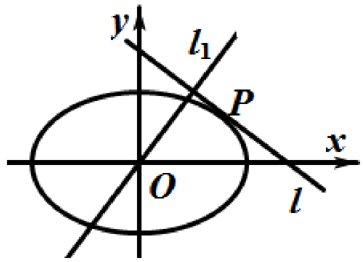


21(本题满分15分)

如图，设椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 动直线 l 与椭圆C只有一个公共点P，且点P在第一象限.

(I) 已知直线 l 的斜率为 k ，用 a,b,k 表示点P的坐标；

(II) 若过原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直，证明：点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a-b$.



22.（本题满分14分）

已知函数 $f\left(x\right)=x^3+3\left|x-a\right|(a\in R)$.

(I) 若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-1,1\right]$ 上的最大值和最小值分别记为 $M(a),m(a)$ ，求 $M(a)-m(a)$ ；

(II) 设 $b\in R$, 若 $\left[f\left(x\right)+b\right]^2\leq 4$ 对 $x\in\left[-1,1\right]$ 恒成立，求 $3a+b$ 的取值范围.

2014年高考浙江理科数学试题参考答案

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.
在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【解析】 $A=\{x\in N\mid x^2\ge 5\}=\{x\in N\mid x\ge\sqrt{5}\}$，

$C_U A=\{x\in N\mid 2\le x<\sqrt{5}\}=\{2\}$

【答案】B

2.【解析】当 $a=b=1$ 时，$(a+bi)^2=(1+i)^2=2i$，反之，$(a+bi)^2=2i$

即 $a^2-b^2+2abi=2i$ ，则 $\begin{cases}a^2-b^2=0\\2ab=2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

【答案】A

3.【解析】由三视图可知直观图左边一个横放的三棱柱右侧一个长方体，故几何体的表面积为：$S=2\times4\times6+2\times3\times4+3\times6+3\times3+3\times4+3\times5+2\times\frac{1}{2}\times3\times4=138$.

【答案】D

4.【解析】 $y=\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\sin(3x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin[3(x+\frac{\pi}{12})]$

而 $y=\sqrt{2}\cos 3x=\sqrt{2}\sin(3x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\sin[3(x+\frac{\pi}{6})]$

由 $3(x+\frac{\pi}{6})\to 3(x+\frac{\pi}{12})$ ，即 $x\to x-\frac{\pi}{12}$

故只需将 $y=\sqrt{2}\cos 3x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位. 故选C

【答案】C

5.【解析】令 $x=y$ ，由题意知 $f(3,0)+f(2,1)+f(1,2)+f(0,3)$ 即为 $(1+x)^{10}$ 展开式中 x^3 的系数，故 $f(3,0)+f(2,1)+f(1,2)+f(0,3)=C_{10}^{7}=120$，故选C

【答案】C

6.【解析】由 $f(-1)=f(-2)=f(-3)$ 得 $\begin{cases}-1+a-b+c=-8+4a-2b+c\\-1+a-b+c=-27+9a-3b+c\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6\\b=11\end{cases}$ ，所以 $f(x)=x^3+6x^2+11x+c$,由 $0<f(-1)\le 3$ 得 $0<-1+6-11+c\le 3$ ，即 $6<c\le 9$，故选C

【答案】C

7.【解析】函数 $f(x)=x^a(x\ge 0)$， $g(x)=\log_a x$ 分别的幂函数与对数函数

答案A中没有幂函数的图像, 不符合；答案B中， $f(x)=x^a(x\ge 0)$ 中 $a>1$ ， $g(x)=\log_a x$ 中 $0<a<1$ ，不符合；答案C中， $f(x)=x^a(x\ge 0)$ 中 $0<a<1$，

$g(x)=\log_a x$ 中 $a>1$，不符合；答案D中， $f(x)=x^a(x\ge 0)$ 中 $0<a<1$，$g(x)=\log_a x$ 中 $0<a<1$，符合．故选D

【答案】D

8.【解析】由向量运算的平行四边形法可知 $\min\{|\vec{a}+\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|\}$ 与 $\min\{|\vec{a}|,|\vec{b}|\}$ 的大小不确定，平行四边形法可知 $\max\{|\vec{a}+\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|\}$ 所对的角大于或等于 $90°$，由余弦定理知 $\max\{|\vec{a}+\vec{b}|^2,|\vec{a}-\vec{b}|^2\}\ge|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，

（或 $\max\{|\vec{a}+\vec{b}|^2,|\vec{a}-\vec{b}|^2\}\ge\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2}=\dfrac{2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)}{2}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$）．

【答案】D

9.【解析1】 $p_1=\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m+n}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2m+n}{2(m+n)}$ ，

$$p_2=\frac{C_n^2}{C_{m+n}^2}\bullet\frac{1}{3}+\frac{C_m^1C_n^1}{C_{m+n}^2}\bullet\frac{2}{3}+\frac{C_m^2}{C_{m+n}^2}=\frac{3m^2-3m+2mn+n^2-n}{3(m+n)(m+n-1)}$$

$$\therefore p_1-p_2=\frac{2m+n}{2(m+n)}-\frac{3m^2-3m+2mn+n^2-n}{3(m+n)(m+n-1)}=\frac{5mn+n(n-1)}{6(m+n)(m+n-1)}>0\ ,$$

故 $p_1>p_2$

又 $\because P(\xi_1=1)=\dfrac{n}{m+n}$ ， $P(\xi_1=2)=\dfrac{m}{m+n}$

$\therefore E(\xi_1)=1\times\dfrac{n}{m+n}+2\times\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{2m+n}{m+n}$

又 $P(\xi_2=1)=\dfrac{C_n^2}{C_{m+n}^2}=\dfrac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$

$P(\xi_2=2)=\dfrac{C_n^1C_m^1}{C_{m+n}^2}=\dfrac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}$

$P(\xi_2=3)=\dfrac{C_m^2}{C_{m+n}^2}=\dfrac{m(\mathrm{m}-1)}{(m+n)(m+n-1)}$

$$\therefore E(\xi_2)=1\times\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}+2\times\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}+3\times\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

$$=\frac{3m^2+n^2-3m-n+4mn}{(m+n)(m+n-1)}$$

$$E(\xi_2)-E(\xi_1)=\frac{3m^2+n^2-3m-n+4mn}{(m+n)(m+n-1)}-\frac{2m+n}{m+n}=\frac{m(m-1)+mn}{(m+n)(m+n-1)}>0$$

所以 $E(\xi_2)>E(\xi_1)$ ，故选A

【答案】A

【解析2】：在解法1中取 $m=n=3$ ，计算后再比较。

10.【解析】由 $\left|\left(\dfrac{i}{99}\right)^2-\left(\dfrac{i-1}{99}\right)^2\right|=\dfrac{1}{99}\bullet\dfrac{2i-1}{99}$ ，

故 $I_1=\frac{1}{99}(\frac{1}{99}+\frac{3}{99}+\frac{5}{99}+\cdots+\frac{2\times 99-1}{99})=\frac{1}{99}\bullet\frac{99^2}{99}=1$

由 $2\left|\frac{i}{99}-\frac{i-1}{99}-\left(\frac{i}{99}\right)^2+\left(\frac{i-1}{99}\right)^2\right|=2\times\frac{1}{99}\left|\frac{99-(2i-1)}{99}\right|$

故 $I_2=2\times\frac{1}{99}\times 2\times\frac{50(98+0)}{2\times 99}=\frac{98}{99}\bullet\frac{100}{99}<1$

$I_3=\frac{1}{3}(\left||\sin(2\pi\bullet\frac{1}{99})|-|\sin(2\pi\bullet\frac{0}{99})|\right|+\left||\sin(2\pi\bullet\frac{2}{99})|-|\sin(2\pi\bullet\frac{1}{99})|\right|+\cdots+\left||\sin(2\pi\bullet\frac{99}{99})|-|\sin(2\pi\bullet\frac{98}{99})|\right|)$

$=\frac{1}{3}[2\sin(2\pi\bullet\frac{25}{99})-2\sin(2\pi\bullet\frac{74}{99})]>1$

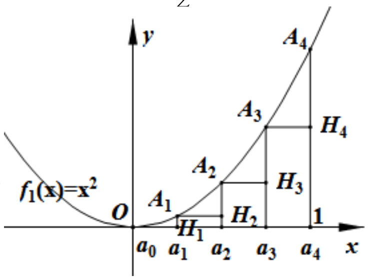
故 $I_2<I_1<I_3$ ，故选B

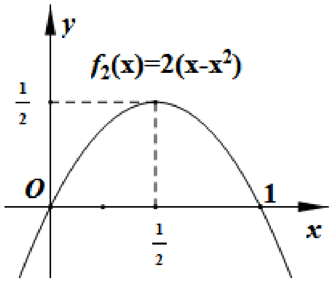
【答案】B

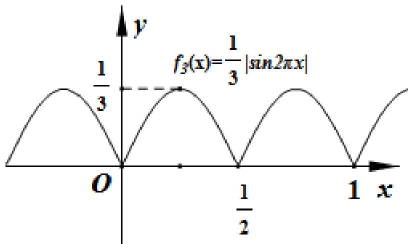
【解析2】估算法：I_k 的几何意义为将区间 $[0,1]$ 等分为99个小区间，每个小区间的端点的函数值之差的绝对值之和.如图为将函数 $f_1(x)=x^2$ 的区间 $[0,1]$ 等分为4个小区间的情形，因 $f_1(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，此时 $I_1=|f(a_1)-f(a_0)|+|f(a_2)-f(a_1)|+|f(a_3)-f(a_2)|+|f(a_4)-f(a_3)|$ $=A_1H_1+A_2H_2+A_3H_3+A_4H_4=f(1)-f(0)=1$，同理对题中给出的 I_1 同样有 $I_1=1$;

而 I_2 略小于 $2\times\frac{1}{2}=1$ ，I_3 略小于 $4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ，所以估算得 $I_2<I_1<I_3$

【







三. 填空题：本大题共7小题，每小题4分，共28分.

11.【解析】第一次运行结果 $S=1,i=2$

第二次运行结果 $S=4,i=3$

第三次运行结果 $S=11,i=4$

第四次运行结果 $S=26,i=5$

第五次运行结果 $S=57,i=6$

此时 $S=57>50$ ，$\therefore$输出 $i=6$ ，【答案】6

12.【解析】设 $\xi=1$ 时的概率为 p ，ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	p	$1-p-\frac{1}{5}$

由 $E(\xi)=0\times\frac{1}{5}+1\times p+2\times(1-p-\frac{1}{5})=1$ ，解得 $p=\frac{3}{5}$

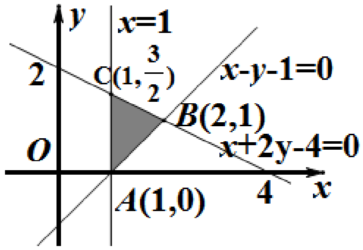
ξ的分布列为即为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

故

$E(\xi)=(0-1)^2\times\frac{1}{5}+(1-1)^2\times\frac{3}{5}+(2-1)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$. 【答案】$\frac{2}{5}$

13.【解析】作出不等式组$\begin{cases}x+2y-4\le 0\\ x-y-1\le 0\\ x\ge 1\end{cases}$ 所表示的区域如图，由$1\le ax+y\le 4$恒成立，故$A(1,0),B(2,1),C(1,\frac{3}{2})$三点坐标代入



$1\le ax+y\le 4$，均成立得$\begin{cases}1\le a\le 4\\ 1\le 2a+1\le 4\\ 1\le a+\frac{3}{2}\le 4\end{cases}$ 解得$1\le a\le\frac{3}{2}$ ，$\therefore$实数a的取值范围是$[1,\frac{3}{2}]$， 【答案】$[1,\frac{3}{2}]$

【解析2】作出不等式组$\begin{cases}x+2y-4\le 0\\ x-y-1\le 0\\ x\ge 1\end{cases}$ 所表示的区域如图，由$1\le ax+y\le 4$得，由图分析可知，$a\ge 0$ 且在$A(1,0)$ 点取得最小值，在$B(2,1)$ 取得最大值，故$\begin{cases}a\ge 1\\ 2a+1\le 4\end{cases}$得$1\le a\le\frac{3}{2}$，故实数$a$的取值范围是$[1,\frac{3}{2}]$， 【答案】$[1,\frac{3}{2}]$

14.【解析1】不同的获奖分两种，一是有一人获两张奖券，一人获一张奖券，共有$C_3^2A_4^2=36$

二是有三人各获得一张奖券，共有$A_4^3=24$ ，因此不同的获奖情况共有$36+24=60$ 种

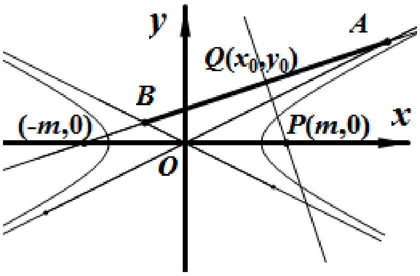
【解析2】将一、二、三等奖各1张分给4个人有$4^3=64$
种分法，其中三张奖券都分给一个人的有4种分法，因此不同的获奖情况共有64－4=60种.
【答案】60

15.【解析】由题意$\begin{cases}f(a)<0\\ f^2(a)+f(a)\le 2\end{cases}$ 或$\begin{cases}f(a)\ge 0\\ -f^2(a)\le 2\end{cases}$ ，解得$f(a)\ge -2$

$\therefore$当$\begin{cases}a<0\\ a^2+a\ge -2\end{cases}$ 或$\begin{cases}a\ge 0\\ -a^2\ge -2\end{cases}$ 解得$a\le\sqrt{2}$

【答案】$(-\infty,\sqrt{2}]$

16.【解析1】由双曲线的方程可知，它的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$，分别与直线 l： $x-3y+m=0$ 联立方程组，解得，$A(\frac{-am}{a-3b},\frac{-bm}{a-3b})$，$B(\frac{-am}{a+3b},\frac{bm}{a+3b})$，设AB中点为 Q，由 $|PA|=|PB|$ 得，则



$$Q(\frac{\frac{-am}{a-3b}+\frac{-am}{a+3b}}{2},\frac{\frac{-bm}{a-3b}+\frac{bm}{a+3b}}{2})$$

即 $Q(-\frac{a^2m}{a^2-9b^2},-\frac{3b^2m}{a^2-9b^2})$，PQ与已知直线垂直，

$\therefore k_{PQ}\bullet k_l=-1$，即 $\dfrac{-\frac{3b^2m}{a^2-9b^2}}{-\frac{a^2m}{a^2-9b^2}-m}\bullet\frac{1}{3}=-1$ 即得

$2a^2=8b^2$，即 $2a^2=8(c^2-a^2)$，即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{4}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析2】不妨设 $a=1$，渐近线方程为 $\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 即 $b^2x^2-y^2=0$

由 $\begin{cases}b^2x^2-y^2=0\\x-3y+m=0\end{cases}$ 消去 x 得 $(9b^2-1)y^2-6b^2my+b^2m=0$

设AB中点为 $Q(x_0,y_0)$，由韦达定理得：$y_0=\frac{3b^2m}{9b^2-1}$ ……①，

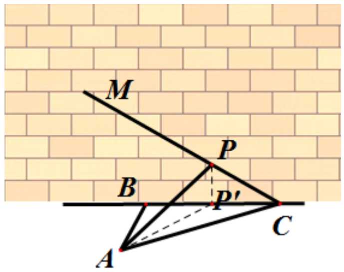
又 $x_0=3y_0-m$，由 $k_{PQ}\bullet k_l=-1$ 得 $\frac{y_0}{x_0-m}\bullet\frac{1}{3}=-1$ 即得 $\frac{y_0}{3y_0-2m}\bullet\frac{1}{3}=-1$ 得

$y_0=\frac{3}{5}m$ 代入①得 $\frac{3b^2m}{9b^2-1}=\frac{3}{5}m$

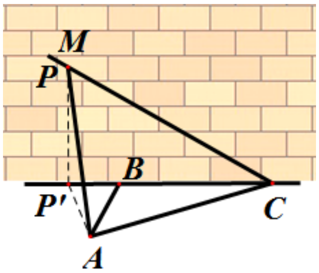
得 $b^2=\frac{1}{4}$，所以 $c^2=a^2+b^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，所以 $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$，得 $e=\frac{c}{a}=c=\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】$\frac{\sqrt{5}}{2}$

17.【解析1】：∵AB=15cm，AC=25cm，∠ABC=90°，
∴BC=20cm，
过P作PP′⊥BC，交BC于P′，
1°当P在线段BC上时，连接AP′，则 $\tan\theta=\frac{PP'}{AP'}$



设BP′=x，则CP′=20-x，（$0\le x<20$ ）



由∠BCM=30°，得 $PP'=CP'\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(20-x)$

在直角△ABP′中，$AP'=\sqrt{225+x^2}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{PP'}{AP'}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bullet\dfrac{20-x}{\sqrt{225+x^2}}$

令 $y=\dfrac{20-x}{\sqrt{225+x^2}}$，则函数在x∈[0，20]单调递减，

∴x=0时，$\tan\theta$ 取得最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bullet\dfrac{20-0}{\sqrt{225+0^2}}=\dfrac{20\sqrt{3}}{45}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

2°当P在线段CB的延长线上时，连接AP′，则 $\tan\theta=\dfrac{PP'}{AP'}$

设BP′=x，则CP′=20+x，（$x>0$ ）

由∠BCM=30°，得 $PP'=CP'\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(20+x)$

在直角△ABP′中，$AP'=\sqrt{225+x^2}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{PP'}{AP'}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bullet\dfrac{20+x}{\sqrt{225+x^2}}$，

令 $y=\dfrac{20+x}{\sqrt{225+x^2}}$，则 $y'=\dfrac{225-20x}{(225+x^2)\sqrt{225+x^2}}$，

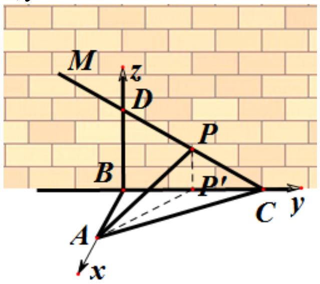
所以，当 $0<x<\dfrac{225}{20}=\dfrac{45}{4}$ 时 $y'>0$ ；当 $x>\dfrac{45}{4}$ 时 $y'<0$

所以当 $x=\dfrac{45}{4}$ 时 $y_{\max}=\dfrac{20+\dfrac{45}{4}}{\sqrt{225+(\dfrac{45}{4})^2}}=\dfrac{5}{3}$

此时 $x=\dfrac{45}{4}$时，$\tan\theta$ 取得最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bullet\dfrac{5}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

综合1°，2°可知 $\tan\theta$ 取得最大值为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

【解析2】：如图以B为原点，BA、BC所在的直线分别为x,y轴，建立如图所示的空间直角坐标系，∵AB=15cm，AC=25cm，∠ABC=90°，



∴BC=20cm，由∠BCM=30°，可设 $P(0,x,\frac{\sqrt{3}}{3}(20-x))$

（其中 $x\le 20$ ），$P'(0,x,0)$ ，$A(15,0,0)$，所以

$$\tan\theta=\frac{PP'}{AP'}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(20-x)}{\sqrt{15^2+x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\bullet\frac{20-x}{\sqrt{225+x^2}}$$

设 $\mathrm{f(x)}=\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\bullet\frac{20-x}{\sqrt{225+x^2}}$（$x\le 20$），$\mathrm{f\,'(x)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\bullet\frac{225+20x}{(225+x^2)\sqrt{225+x^2}}$

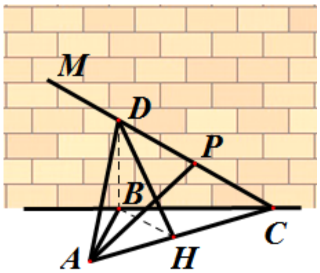
所以，当 $x<-\frac{225}{20}=-\frac{45}{4}$ 时 $y'>0$ ；当 $-\frac{45}{4}<x\le 20$ 时 $y'<0$

所以当 $x=-\frac{45}{4}$ 时 $f(x)_{\max}=f(-\frac{45}{4})=\frac{\sqrt{3}}{3}\bullet\frac{20+\frac{45}{4}}{\sqrt{225+(\frac{45}{4})^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

所以 $\tan\theta$ 取得最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

【解析3】:分析知，当 $\tan\theta$
取得最大时，即 θ 最大，最大值即为平面ACM与地面ABC所成的锐二面角的度量值
，
如图，过B在面BCM内作BD⊥BC交CM于D，过B作BH⊥AC于H，连DH，则∠BHD即为平面ACM与地面ABC所成的二面角的平面角，$\tan\theta$ 的最大值即为 $\tan\angle BHD$
，在 $Rt\Delta ABC$ 中，

由等面积法可得 $BH=\frac{AB\bullet BC}{AC}=\frac{15\bullet 20}{25}$=12，



$DB=BC\bullet\tan 30°=\frac{20\sqrt{3}}{3}$

所以 $(\tan\theta)_{\max}=\tan\angle BHD=\frac{DB}{BH}=\frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{12}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

三. **解答题：本大题共5小题，共72分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

18.【解析】：（I）由题得 $\frac{1+\cos 2A}{2}-\frac{1+\cos 2B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B$ ，

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\frac{1}{2}\cos 2A=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B-\frac{1}{2}\cos 2B$

$\sin(2A-\frac{\pi}{6})=\sin(2\mathrm{B}-\frac{\pi}{6})$

由 $a\neq b$ 得 $A\neq B$ ，又 $A+B\in(0,\pi)$ ，得 $2A-\dfrac{\pi}{6}+2\mathrm{B}-\dfrac{\pi}{6}=\pi$

即 $A+B=\dfrac{2\pi}{3}$ ，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$

（II） $c=\sqrt{3}$， $\sin A=\dfrac{4}{5}$， $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin\mathrm{C}}$ ，得 $a=\dfrac{8}{5}$

由 $a<c$ 得 $A<C$ ，从而 $\cos A=\dfrac{3}{5}$ 故 $\sin B=\sin(A+C)$ $=$

$\mathrm{sinAcosC}+\mathrm{cosAsinC}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

所以，△ABC的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{8\sqrt{3}+18}{25}$

19.【解析】：（I）$\because a_1a_2a_3\cdots a_n=(\sqrt{2})^{b_n}\ (n\in N^*)$ ①，

当n≥2，$n\in N^*$时， $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}=(\sqrt{2})^{b_{n-1}}$ ②，

由①÷②知：当 $n\geq 2$ 时， $a_n=(\sqrt{2})^{b_n-b_{n-1}}$ ，令n=3，则有 $a_3=(\sqrt{2})^{b_3-b_2}$

$\because b_3=6+b_2$， $\therefore a_3=8$．

$\because\{a_n\}$为等比数列，且$a_1=2$，$\therefore\{a_n\}$的公比为q，则 $q^2=\dfrac{a_3}{a_2}=4$

由题意知$a_{n>0}$，∴q＞0，∴q=2．

$\therefore a_n=2^n$（$n\in N^*$）．

又由 $a_1a_2a_3\cdots a_n=(\sqrt{2})^{b_n}\ (n\in N^*)$，得： $2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^n=(\sqrt{2})^{b_n}$

即 $2^{\frac{n(n+1)}{2}}=(\sqrt{2})^{b_n}$

$\therefore b_n=n(n+1)$（$n\in N^*$）．

（II）（i）$\because c_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{2^n}-(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$\therefore S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\dfrac{1}{2}-(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{2^2}-(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-(1-\dfrac{1}{n+1})=1-\dfrac{1}{2^n}-1+\dfrac{1}{n+1}$

$=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2^n}$

（ii）因为$c_1=0$，$c_2>0$，$c_3>0$，$c_4>0$；

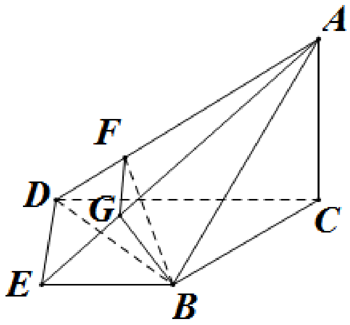
当n≥5时， $c_n=\dfrac{1}{n(n+1)}[\dfrac{n(n+1)}{2^n}-1]$

而 $\dfrac{n(n+1)}{2^n}-\dfrac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}=\dfrac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}-2)}{2^{n+1}}>0$ ，得 $\dfrac{n(n+1)}{2^n}\leq\dfrac{5\cdot(5+1)}{2^5}<1$

所以，当n≥5时，$c_n<0$，

综上，对任意$n\in N^*$恒有 $S_4\geq S_n$ ，故k=4．

20.证明：（I）在直角梯形BCDE中，由DE=BE=1，CD=2，得BD=BC=$\sqrt{2}$，



由 $AC=\sqrt{2}$，AB=2得 $AB^2=AC^2+BC^2$，即AC⊥BC，又平面ABC⊥平面BCDE，

从而AC⊥平面BCDE，

所以AC⊥DE，又DE⊥DC，从而

DE⊥平面ACD；

(II)【方法1】

作BF⊥AD，与AD交于点F，过点F作FG∥DE，与AB交于点G，连接BG，由（I）知DE⊥AD，则FG⊥AD，所以∠BFG就是二面角B-AD-E的平面角，在直角梯形BCDE中，由$CD^2=BC^2+BD^2$，得BD⊥BC，

又平面ABC⊥平面BCDE，得BD⊥平面ABC，从而BD⊥AB，由于AC⊥平面BCDE，得AC⊥CD.

在Rt△ACD中，由DC=2, $AC=\sqrt{2}$，得 $AD=\sqrt{6}$；

在Rt△AED中，由ED=1，$AD=\sqrt{6}$ 得 $AE=\sqrt{7}$；

在Rt△ABD中，由 $BD=\sqrt{2}$，AB=2，$AD=\sqrt{6}$

得 $BF=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$AF=\dfrac{2}{3}AD$，从而 $GF=\dfrac{2}{3}$，

在△ABE，△ABG中，利用余弦定理分别可得 $\cos\angle BAE=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，$BC=\dfrac{2}{3}$.

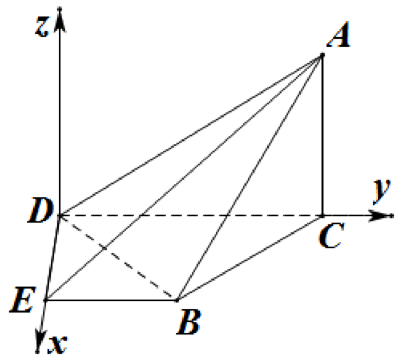
在△BFG中, $\cos\angle BFG=\dfrac{GF^2+BF^2-BG^2}{2BF\bullet GF}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以，∠BFG=$\dfrac{\pi}{6}$，即二面角B-AD-E的大小为$\dfrac{\pi}{6}$.

【方法2】以D的原点，分别以射线DE，DC为x,y轴的正半轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图所示.

由题意知各点坐标如下：$D(0,0,0)$，$E(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A(0,2,\sqrt{2})$，$B(1,1,0)$.

设平面ADE的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$



平面ABD的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，可算得：

$\overrightarrow{AD}=(0,-2,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AE}=(1,-2,-\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$

由 $\begin{cases}\vec{m}\bullet\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{m}\bullet\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y_1-\sqrt{2}z_1=0\\ x_1-2y_1-\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，可取

$\vec{m}=(0,1,-\sqrt{2})$

由$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$即$\begin{cases}-2y_2-\sqrt{2}z_2=0\\ x_2+y_2=0\end{cases}$可取$\vec{n}=(0,-1,\sqrt{2})$

于是$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{|\vec{m}\bullet\vec{n}|}{|\vec{m}|\bullet|\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\bullet2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

由题意可知，所求二面角是锐角，故二面角B-AD-E的大小为$\dfrac{\pi}{6}$

21.【解析】：（I）【方法1】设直线l的方程为$y=kx+m(k<0)$，由

$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，消去y得

$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$

由于直线l与椭圆C只有一个公共点P，故△=0，即$b^2-m^2+a^2k^2=0$，解得点P的坐标为

$P(-\dfrac{a^2km}{b^2+a^2k^2},\dfrac{b^2m}{b^2+a^2k^2})$

又点P在第一象限，故点P的坐标为$P(-\dfrac{a^2k}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2k^2}})$

【方法2】作变换$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=x'\\ \dfrac{y}{b}=y'\end{cases}$，则椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$变为圆$C'$：

$x'^2+y'^2=1$

切点$P(x_0,y_0)$变为点$P'(x'_0,y'_0)$，切线$l:y-y_0=k(x-x_0)$（$k<0$）变为$l':by'-\mathrm{y}_0=k(ax'-x_0)$．

在圆C'中设直线$O'P'$的方程为$y'=mx'$（$m>0$），

由$\begin{cases}y'=mx'\\ x'^2+y'^2=1\end{cases}$解得$\begin{cases}x'_0=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}\\ y'_0=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}\end{cases}$

即$P'(\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}},\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}})$，由于$O'P'\perp l'$，

所以$k_{O'P'}\bullet k_{l'}=-1$，得$m\cdot\dfrac{ak}{b}=-1$，

即 $m=-\dfrac{b}{ak}$ 代入得 $P'(\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{(ak)^2}}},\dfrac{-\dfrac{b}{ak}}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{(ak)^2}}})$

即 $P'(-\dfrac{ak}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2k^2+b^2}})$，

利用逆变换 $\begin{cases}x'=\dfrac{x}{a}\\ y'=\dfrac{y}{b}\end{cases}$ 代入即得：

$P(-\dfrac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}})$

（II）由于直线l_1过原点O且与直线l垂直，故直线l_1的方程为x+ky=0，所以点P到直线l_1的距离

$d=\dfrac{|-\dfrac{a^2k}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}+\dfrac{b^2k}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}|}{\sqrt{1+k^2}}$ 整理得: $d=\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+a^2+a^2k^2+\dfrac{b^2}{k^2}}}$

因为 $a^2k^2+\dfrac{b^2}{k^2}\ge 2ab$，所以 $d=\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+a^2+a^2k^2+\dfrac{b^2}{k^2}}}\le\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}}=a-b$

当且仅当 $k^2=\dfrac{b}{a}$ 时等号成立.

所以，点P到直线 l_1 的距离的最大值为 $a-b$.

23.【解析】：（I）$\because f(x)=x^3+3|x-a|=\begin{cases}x^3+3x-3a,\ x\ge a\\ x^3-3x+3a,\ x<a\end{cases}$，

$\therefore f'(x)=\begin{cases}3x^2+3,\ x\ge a\\ 3x^2-3,\ x<a\end{cases}$，由于 $-1\le x\le 1$

（i）当 $a\le -1$ 时，有 $x\ge a$ ，故

$f(x)=x^3+3x-3a$

此时，f（x）在 $(-1,1)$ 上是增函数，因此 $M(a)=f(1)=4-3a$ ，

$m(a)=f(-1)=-4-3a$ ，

故 $M(a)-m(a)=(4-3a)-(-4-3a)=8$

（ii）当 $-1<a<1$时，若x∈（a，1），$f(x)=x^3+3x-3a$，在（a，1）上是增函数；若x∈（-1，a），$f(x)=x^3-3x-3a$，在（-1，a）上是减函数，

$\therefore M(a)=\max\{f(1),f(-1)\}$ ，$m(a)=f(a)=\mathrm{a}^3$

由于 $f(1)-f(-1)=-6a+2$ ，因此

当 $-1<a\le\frac{1}{3}$ 时， $M(a)-m(a)=-a^3-3a+4$；

当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，$M(a)-m(a)=-a^3+3a+2$；

（iii）当 $a\ge1$时，有 $x\le a$，故 $f(x)=x^3-3x+3a$，

此时 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数，

因此 $M(a)=f(-1)=2+3a$， $m(a)=f(1)=-2+3a$，

故 $M(a)-m(a)=4$；

综上，

$$M(a)-m(a)=\begin{cases}8, & a\le-1\\ -a^3-3a+4, & -1<a\le\frac{1}{3}\\ -a^3+3a+2, & \frac{1}{3}<a<1\\ 4, & a\ge1\end{cases}$$

（II）令 $h(x)=f(x)+b$，则 $\mathrm{h}(x)=\begin{cases}x^3+3x-3a+b, & x\ge a\\ x^3-3x+3a+b, & x<a\end{cases}$

$\mathrm{h}'(x)=\begin{cases}3x^2+3, & x\ge a\\ 3x^2-3, & x<a\end{cases}$,

因为$[f（x）+b]^2\le4$对$x\in[-1，1]$恒成立，

即 $-2\le h(x)\le2$ 对$x\in[-1，1]$恒成立，

所以由（I）知，

（i）当 $a\le-1$时，$h(x)$在 $(-1,1)$ 上是增函数，$h(x)$ 在 $[-1,1]$上的最大值是 $h(1)=4-3a+b$，最小值 $h(-1)=-4-3a+b$，则 $-4-3a+b\ge-2$ 且 $4-3a+b\le2$ 矛盾；

（ii）当 $-1<a\le\frac{1}{3}$ 时，$h(x)$在 $[-1,1]$上的最小值是 $h(a)=a^3+b$，最大值是 $h(1)=4-3a+b$，所以 $a^3+b\ge-2$ 且 $4-3a+b\le2$，从而

$-2-a^3+3a\le3a+b\le6a-2$ 且 $0\le a\le\frac{1}{3}$

令 $t(a)=-2-a^3+3a$，则 $t'(a)=3-3a^2>0$，$\therefore t(a)$ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 上是增函数，

故 $t(a)>t(0)=-2$，

因此 $-2\le3a+b\le0$

（iii）当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，$h(x)$在 $[-1,1]$上的最小值是 $h(a)=a^3+b$，最大值是

$h(-1)=3a+b+2$，所以由 $a^3+b\geq -2$ 且 $3a+b+2\leq 2$，解得 $-\frac{28}{27}<3a+b\leq 0$

(iv)当 $a\geq 1$ 时，$h(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值是 $h(-1)=3a+b+2$，最小值是 $h(1)=3a+b-2$，

所以由 $3a+b-2\geq -2$ 且 $3a+b+2\leq 2$，解得3a+b=0．

综上，$3a+b$ 的取值范围是 $-2\leq 3a+b\leq 0$．