2006年江西高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）已知集合 $P=\{x\,|\,x(x-1)\geqslant 0\}$， $Q=\left\{x\left|\dfrac{1}{x-1}>0\right.\right\}$，则 $P\bigcap Q$ 等于（　　）

A． $\varnothing$　　　B． $\{x\,|\,x\geqslant 1\}$　　　C． $\{x\,|\,x>1\}$　　　D． $\{x\,|\,x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

2．（5分）函数 $y=4\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$ 的最小正周期为（　　）

A． $\dfrac{\pi}{2}$　　　B． π　　　C． 2π　　　D． 4π

3．（5分）在各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_{n+1}-a_n^2+a_{n-1}=0(n\geqslant 2)$，则 $S_{2n-1}-4n=$（

）

A． -2　　　B． 0　　　C． 1　　　D． 2

4．（5分）下列四个条件中， p 是 q 的必要不充分条件的是（　　）

A． $p:a>b$， $q:a^2>b^2$

B． $p:a>b$， $q:2^a>2^b$

C． $p:ax^2+by^2=c$ 为双曲线， $q:ab<0$

D． $p:ax^2+bx+c>0$， $q:\dfrac{c}{x^2}-\dfrac{b}{x}+a>0$

5．（5分）若 $f(x)$ 是定义在 R 上的可导函数，且满足 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$，则必有（　　）

A． $f(0)+f(2)<2f(1)$　　　B． $f(0)+f(2)>2f(1)$

C． $f(0)+f(2)\leqslant 2f(1)$　　　D． $f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$

6．（5分）若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 成立，则 a 的最小值为（　　）

A． 0　　　B． -2　　　C． $-\dfrac{5}{2}$　　　D． -3

7．（5分）在 $(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x})^n$ 的二项展开式中，若常数项为60，则 n 等于（　　）

A． 3　　　B． 6　　　C． 9　　　D． 12

8．（5分）袋中有40个小球，其中红色球16个、蓝色球12个，白色球8个，黄色球4个，

从中随机抽取 10 个球作成一个样本，则这个样本恰好是按分层抽样方法得到的概率为( )

A. $\dfrac{C_4^1C_8^2C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

B. $\dfrac{C_4^2C_8^1C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

C. $\dfrac{C_4^2C_8^3C_{12}^1C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

D. $\dfrac{C_4^1C_8^3C_{12}^4C_{16}^2}{C_{40}^{10}}$

9.（5 分）如果四棱锥的四条侧棱都相等，就称它为“等腰四棱锥”，四条侧棱称为它的腰，以下 4 个命题中，假命题是(　　)

A. 等腰四棱锥的腰与底面所成的角都相等

B. 等腰四棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等或互补

C. 等腰四棱锥的底面四边形必存在外接圆

D. 等腰四棱锥的各顶点必在同一球面上

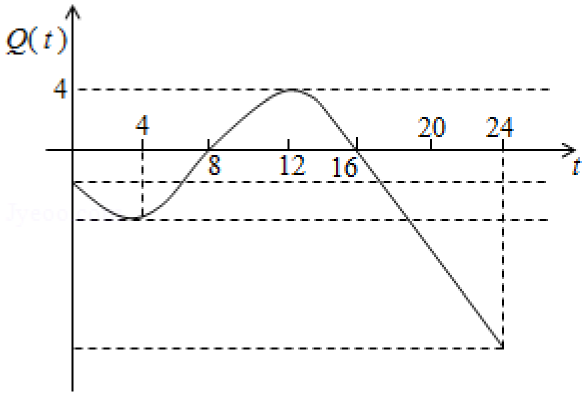
10.（5 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$，且$A$、$B$、$C$三点共线（该直线不过原点$O$），则$S_{200}=($　　)

A. 100　　B. 101　　C. 200　　D. 201

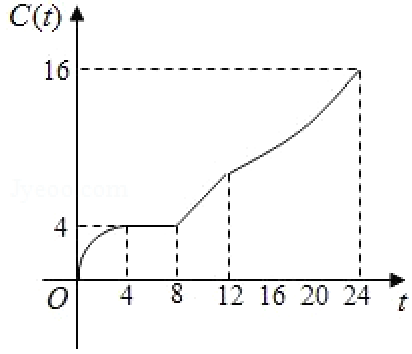
11.（5 分）P是双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的右支上一点，$M$、$N$分别是圆$(x+5)^2+y^2=4$和$(x-5)^2+y^2=1$上的点，则$|PM|-|PN|$的最大值为(　　)

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

12.（5 分）某地一天内的气温$Q(t)$（单位：$^\circ C$)与时刻t（单位：时）之间的关系如图所示，令$C(t)$表示时间段$[0,t]$内的温差（即时间段$[0,t]$内最高温度与最低温度的差）．$C(t)$与t之间的函数关系用下列图象表示，则正确的图象大致是(　　)

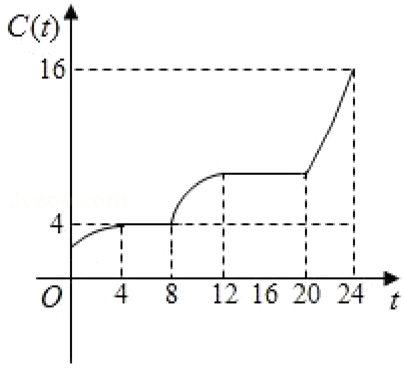


Q(t)
4
4
20
24
8
12
16
t



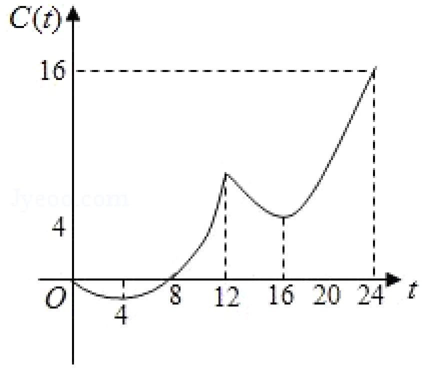
C(t)
16
4
O
4
8
12
16
20
24
t

A．



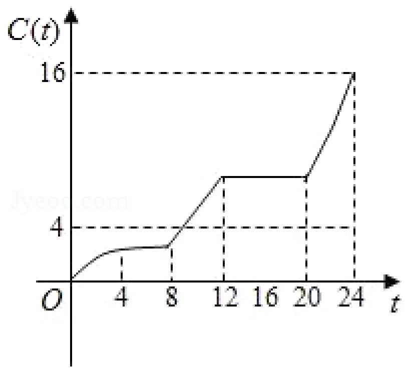
C(t)
16
4
O
4
8
12
16
20
24
t

B．



C(t)
16
4
O
4
8
12
16
20
24
t

C．



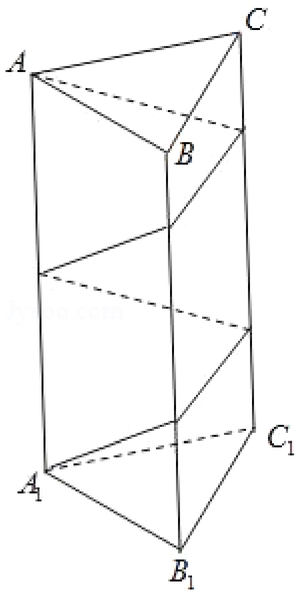
D.

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）已知向量 $\vec{a}=(1,\sin\theta)$，$\vec{b}=(1,\cos\theta)$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为_____.

14.（4 分）设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $[f^{-1}(m)+6][f^{-1}(n)+6]=27$，则 $f(m+n)=$____.

15.（4 分）如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1，高为 8，一质点自 A 点出发，沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线的长为_____.



16.（4 分）已知 F_1，F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0且a\neq b)$ 的两个焦点，P 为双曲线右支上异于顶点的任意一点，O 为坐标原点．下面四个命题(　　)

A、$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=a$ 上；

B、$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=b$ 上；

C、$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 OP 上；

D、$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆必通过点 $(a,0)$．

其中真命题的代号是_____（写出所有真命题的代号）．

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值．

（1）求 a、b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对 $x\in[-1，2]$，不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围．

18．（12 分）某商场举行抽奖促销活动，抽奖规则是：从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球，记下颜色后放回，摸出一个红球获得二得奖；摸出两个红球获得一等奖．现有甲、乙两位顾客，规定：甲摸一次，乙摸两次．求

（1）甲、乙两人都没有中奖的概率；

（2）甲、两人中至少有一人获二等奖的概率．

19．（12 分）在锐角 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

（1）求 $\tan^2\frac{B+C}{2}+\sin^2\frac{A}{2}$ 的值；

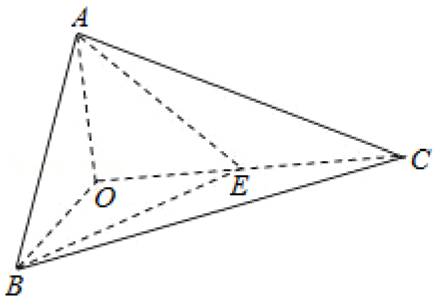
（2）若 $a=2$，$S_{\Delta ABC}=\sqrt{2}$，求 b 的值．

20．（12 分）如图，已知三棱锥 $O-ABC$ 的侧棱 OA，OB，OC 两两垂直，且 $OA=1$，$OB=OC=2$，E 是 OC 的中点．

（1）求 O 点到面 ABC 的距离；

（2）求异面直线 BE 与 AC 所成的角；

（3）求二面角 $E-AB-C$ 的大小．



21．（12 分）如图，椭圆 $Q:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，过点 F 的一动直线 m

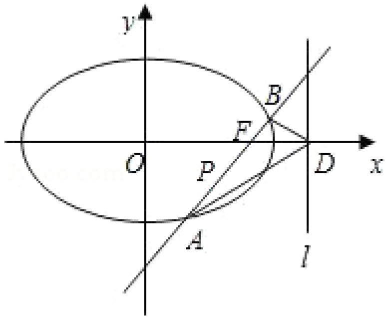
绕点 F 转动，

并且交椭圆于 A ，B 两点，P 为线段 AB 的中点．

（1）求点 P 的轨迹 H 的方程；

（2）若在 Q 的方程中，令 $a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$，$b^2=\sin\theta(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$．

设轨迹 H 的最高点和最低点分别为 M 和 N ．当 θ 为何值时，ΔMNF 为一个正三角形？



22．（14 分）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$，满足：$a_1=3$，且 $\dfrac{2a_{n+1}-a_n}{2a_n-a_{n+1}}=a_na_{n+1}$，

$n\in N^*$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $S_n=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$，$T_n=\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\ldots+a\dfrac{1}{a_n^2}$，求 S_n+T_n，并确定最小正整数 n，

使 S_n+T_n 为整数．

2006 年江西高考文科数学真题参考答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1．（5 分）已知集合 $P=\{x\,|\,x(x-1)\geqslant 0\}$，$Q=\left\{x\left|\dfrac{1}{x-1}>0\right.\right\}$，则 $P\bigcap Q$ 等于（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{x\,|\,x\geqslant 1\}$　　C．$\{x\,|\,x>1\}$　　D．$\{x\,|\,x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

【解答】解：$P=\{x\,|\,x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0\}$，$Q=\{x\,|\,x>1\}$，所以 $P\bigcap Q=\{x\,|\,x>1\}$

故选：C．

2．（5 分）函数 $y=4\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$ 的最小正周期为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

【解答】解：$\because$ $y=4\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$

$\therefore T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

故选：B．

3．（5 分）在各项均不为零的等差数列$\{a_n\}$中，若$a_{n+1}-a_n^2+a_{n-1}=0(n\geqslant 2)$，则$S_{2n-1}-4n=($　　$)$

A．-2　　　　B．0　　　　C．1　　　　D．2

【解答】解：设公差为d，则$a_{n+1}=a_n+d$，$a_{n-1}=a_n-d$，

由$a_{n+1}-a_n^2+a_{n-1}=0(n\geqslant 2)$可得$2a_n-a_n^2=0$，

解得$a_n=2$（零解舍去），

故$S_{2n-1}-4n=2\times(2n-1)-4n=-2$，

故选：A．

4．（5 分）下列四个条件中，p是q的必要不充分条件的是$($　　$)$

A．$p:a>b$，$q:a^2>b^2$

B．$p:a>b$，$q:2^a>2^b$

C．$p:ax^2+by^2=c$为双曲线，$q:ab<0$

D．$p:ax^2+bx+c>0$，$q:\dfrac{c}{x^2}-\dfrac{b}{x}+a>0$

【解答】解：

A．p不是q的充分条件，也不是必要条件；

B．p是q的充要条件；

C．p是q的充分条件，不是必要条件；

D．正确

故选：D．

5．（5 分）若$f(x)$是定义在R上的可导函数，且满足$(x-1)f'(x)\geqslant 0$，则必有$($　　$)$

A．$f(0)+f$（2）$<2f$（1）　　　　B．$f(0)+f$（2）$>2f$（1）

C．$f(0)+f$（2）$\leqslant 2f$（1）　　　　D．$f(0)+f$（2）$\geqslant 2f$（1）

【解答】解：$\because (x-1)f'(x)\geqslant 0$

$\therefore x>1$时，$f'(x)\geqslant 0$；$x<1$时，$f'(x)\leqslant 0$

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$为增函数；在$(-\infty,1)$上为减函数

$\therefore f$（2）$\geqslant f$（1）

$f(0)\geqslant f$（1）

$\therefore f(0)+f$（2）$\geqslant 2f$（1）

故选：D．

6．（5分）若不等式$x^2+ax+1\geqslant 0$对一切$x\in(0,\dfrac{1}{2})$成立，则a的最小值为(　　)

A．0　　B．-2　　C．$-\dfrac{5}{2}$　　D．-3

【解答】解：设$f(x)=x^2+ax+1$，则对称轴为$x=-\dfrac{a}{2}$

若$-\dfrac{a}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，即$a\leqslant -1$时，则$f(x)$在$[0$，$\dfrac{1}{2}]$上是减函数，

应有$f(\dfrac{1}{2})\geqslant 0\Rightarrow -\dfrac{5}{2}\leqslant a\leqslant -1$

若$-\dfrac{a}{2}\leqslant 0$，即$a\geqslant 0$时，则$f(x)$在$[0$，$\dfrac{1}{2}]$上是增函数，

应有$f(0)=1>0$恒成立，

故$a\geqslant 0$

若$0\leqslant -\dfrac{a}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，即$-1\leqslant a\leqslant 0$，

则应有$f(-\dfrac{a}{2})=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}+1=1-\dfrac{a^2}{4}\geqslant 0$恒成立，

故$-1\leqslant a\leqslant 0$

综上，有$-\dfrac{5}{2}\leqslant a$．

故选：C．

7．（5分）在$(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x})^n$的二项展开式中，若常数项为60，则$n$等于(　　)

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

【解答】解：$T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}\times(\dfrac{2}{x})^r=2^rC_n^rx^{\frac{n-3r}{2}}$，$n\in N^*$，$r\in N^*$

由$\begin{cases}n-3r=0\\2^rC_n^r=60\end{cases}$，解得$n=6$，

故选：B．

8．（5分）袋中有40个小球，其中红色球16个、蓝色球12个，白色球8个，黄色球4个，从中随机抽取10个球作成一个样本，则这个样本恰好是按分层抽样方法得到的概率为(　　)

A．$\dfrac{C_4^1C_8^2C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

B．$\dfrac{C_4^2C_8^1C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

C．$\dfrac{C_4^2C_8^3C_{12}^1C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

D．$\dfrac{C_4^1C_8^3C_{12}^4C_{16}^2}{C_{40}^{10}}$

【解答】解：$\because$这个样本要恰好是按分层抽样方法得到的概率

依题意各层次数量之比为$4:3:2:1$，

即红球抽4个，蓝球抽3个，白球抽2个，黄球抽一个，

根据古典概型公式得到结果为$\dfrac{C_4^1C_8^2C_{12}^3C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$；

故选：A．

9．（5分）如果四棱锥的四条侧棱都相等，就称它为“等腰四棱锥”，四条侧棱称为它的腰，以下4个命题中，假命题是(　　)

A．等腰四棱锥的腰与底面所成的角都相等

B．等腰四棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等或互补

C．等腰四棱锥的底面四边形必存在外接圆

D．等腰四棱锥的各顶点必在同一球面上

【解答】解：因为“等腰四棱锥”的四条侧棱都相等，

所以它的顶点在底面的射影到底面的四个顶点的距离相等，

故 A，C 正确，

且在它的高上必能找到一点到各个顶点的距离相等，

故 D 正确，B 不正确，如底面是一个等腰梯形时结论就不成立．

故选：B．

10．（5 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$，且 A、B、C 三点共线（该直线不过原点 O），则 $S_{200}=(\quad)$

A．100　　B．101　　C．200　　D．201

【解答】解：$\because A$，B，C 三点共线

$\therefore a_1+a_{200}=1$

又 $\because s_{200}=\dfrac{200(a_1+a_{200})}{2}$

$\therefore s_{200}=100$

故选：A．

11．（5 分）P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点，M、N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为 $(\quad)$

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【解答】解：双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 中，如图：

$\because a=3$，$b=4$，$c=5$，

$\therefore F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，

$\because |PF_1|-|PF_2|=2a=6$，

$\therefore |MP|\leqslant |PF_1|+|MF_1|$，$|PN|\geqslant |PF_2|-|NF_2|$，

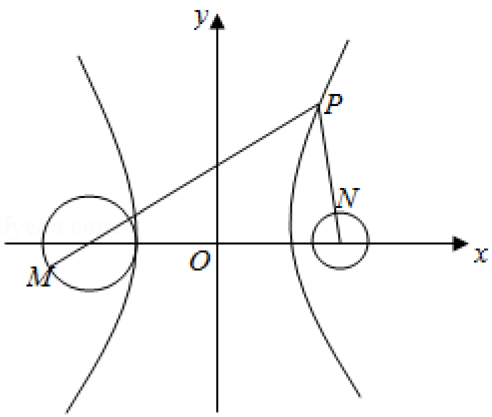
$\therefore -|PN|\leqslant -|PF_2|+|NF_2|$，

所以，$|PM|-|PN|\leqslant |PF_1|+|MF_1|-|PF_2|+|NF_2|$

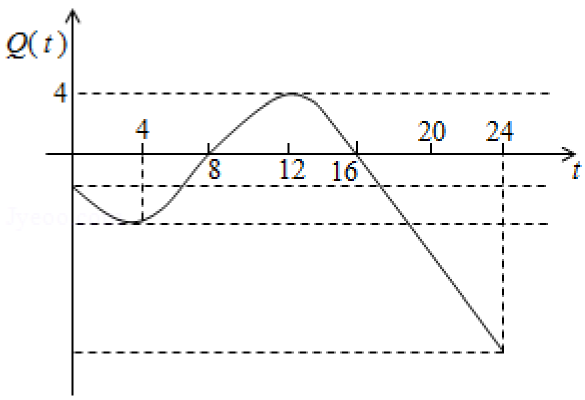
$=6+1+2$

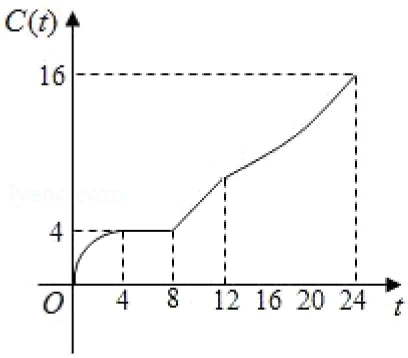
$=9$．

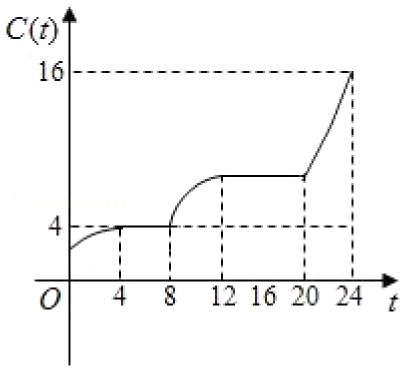
故选：D．

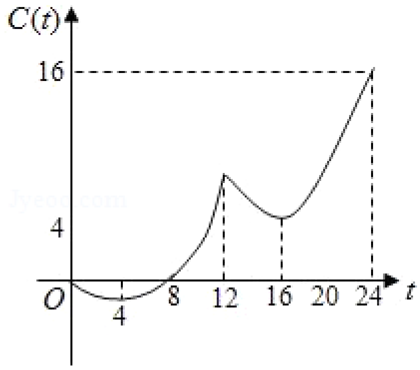


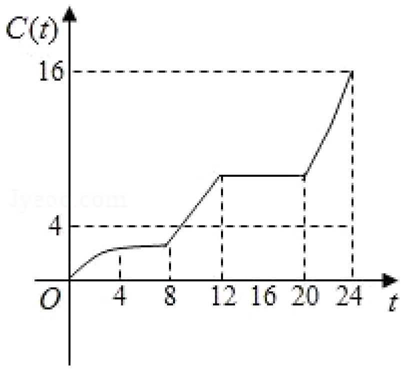
12．（5 分）某地一天内的气温 $Q(t)$（单位：$^{\circ}C$）与时刻 t（单位：时）之间的关系如图所示，令 $C(t)$ 表示时间段 $[0,\ t]$ 内的温差（即时间段 $[0,\ t]$ 内最高温度与最低温度的差）．$C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示，则正确的图象大致是(　　)



A．


B. 

C. 

D. 

【解答】解：根据气温$Q(t)$（单位：$^{\circ}C)$与时刻t（单位：时）之间的关系如图，

$t=0$时，$C(t)=-2$，在$[0，4]$上，$C(t)$不断增大；　　在$[4，8]$上，$C(t)$是个定值，

在$[8，12]$上，$C(t)$不断增大；　　在$[12，20]$上，$C(t)$是个定值，

在$[20，24]$上，$C(t)$不断增大．

故选：D．

二、填空题（共4小题，每小题4分，满分16分）

13．（4分）已知向量$\vec{a}=(1,\sin\theta)$，$\vec{b}=(1,\cos\theta)$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最大值为__$\sqrt{2}$__．

【解答】解：$\because\ \vec{a}=(1,\sin\theta)$，$\vec{b}=(1,\cos\theta)$

$\therefore|\vec{a}-\vec{b}|=|\sin\theta-\cos\theta|=\sqrt{2}|\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})|$

$\because \theta \in R$

$\therefore \sqrt{2}\sin(\theta - \dfrac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| \leqslant \sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$.

14．（4 分）设 $f(x) = \log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $[f^{-1}(m)+6][f^{-1}(n)+6] = 27$，则 $f(m+n) = \underline{\quad 2 \quad}$.

【解答】解：$\because f^{-1}(x) = 3^x - 6$

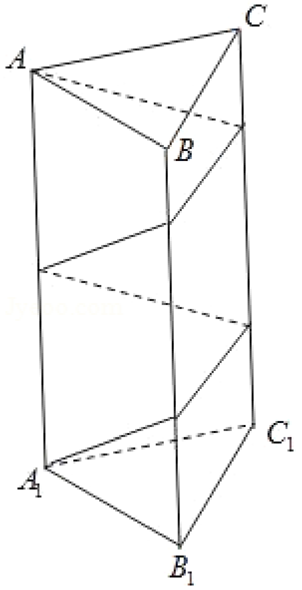
故 $[f^{-1}(m)+6] \bullet [f^{-1}(x)+6] = 3^m \bullet 3^n = 3^{m+n} = 27$，

$\therefore m + n = 3$，

$\therefore f(m+n) = \log_3(3+6) = 2$.

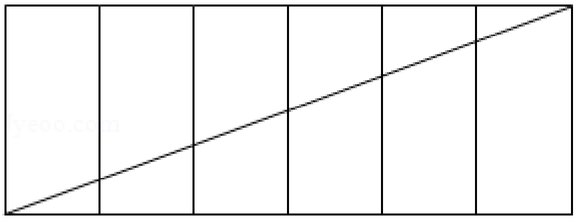
故答案为 2.

15.（4 分）如图，已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1，高为 8，一质点自 A 点出发，沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线的长为 $\underline{\quad 10 \quad}$.



【解答】解：将正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 沿侧棱 CC_1 展开，在拼接一次，

其侧面展开图如图所示，由图中路线可得结论.



故答案为：10

16．（4 分）已知 F_1，F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0且a\neq b)$ 的两个焦点，P 为双曲线右支上异于顶点的任意一点，O 为坐标原点．下面四个命题(　　)

A、△PF_1F_2 的内切圆的圆心必在直线 $x=a$ 上；

B、△PF_1F_2 的内切圆的圆心必在直线 $x=b$ 上；

C、△PF_1F_2 的内切圆的圆心必在直线 OP 上；

D、△PF_1F_2 的内切圆必通过点 $(a,0)$．

其中真命题的代号是＿ A，D ＿（写出所有真命题的代号）．

【解答】解：设△PF_1F_2 的内切圆分别与 PF_1、PF_2 切于点 A、B，与 F_1F_2 切于点 M，

则 $|PA|=|PB|$，$|F_1A|=|F_1M|$，$|F_2B|=|F_2M|$，

又点 P 在双曲线右支上，

所以 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，故 $|F_1M|-|F_2M|=2a$，而 $|F_1M|+|F_2M|=2c$，

设 M 点坐标为 $(x,0)$，

则由 $|F_1M|-|F_2M|=2a$ 可得 $(x+c)-(c-x)=2a$

解得 $x=a$，显然内切圆的圆心与点 M 的连线垂直于 x 轴，

故 A、D 正确．

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值．

（1）求 a、b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对 $x\in[-1，2]$，不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围．

【解答】解；（1） $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ， $f'(x)=3x^2+2ax+b$

由$\begin{cases}f'(-\dfrac{2}{3})=\dfrac{12}{9}-\dfrac{4}{3}a+b=0\\ f'(1)=3+2a+b=0\end{cases}$解得，$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=-2\end{cases}$

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$，函数 $f(x)$ 的单调区间如下表：

x	$(-\infty,-\dfrac{2}{3})$	$-\dfrac{2}{3}$	$(-\dfrac{2}{3}$，$1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以函数 $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty,-\dfrac{2}{3})$ 和 $(1,+\infty)$，递减区间是 $(-\dfrac{2}{3}$，$1)$．

（2） $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+c,x\in[-1,2]$，

当 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时， $f(x)=\dfrac{22}{27}+c$ 为极大值，而 f （2） $=2+c$，所以 f （2） $=2+c$ 为最大值．

要使 $f(x)<c^2$ 对 $x\in[-1$，$2]$ 恒成立，须且只需 $c^2>f$ （2） $=2+c$．

解得 $c<-1$ 或 $c>2$．

18．（12 分）某商场举行抽奖促销活动，抽奖规则是：从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球，记下颜色后放回，摸出一个红球获得二得奖；摸出两个红球获得一等奖．现有甲、乙两位顾客，规定：甲摸一次，乙摸两次．求

（1）甲、乙两人都没有中奖的概率；

（2）甲、两人中至少有一人获二等奖的概率．

【解答】解：（1） $P_1=\dfrac{9}{10}\times(\dfrac{9}{10})^2=\dfrac{729}{1000}$

（2）法一： $P_2=\dfrac{1}{10}\times(\dfrac{9}{10})^2+\dfrac{1}{10}\times(\dfrac{1}{10})^2+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{18}{10^2}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{18}{10^2}=\dfrac{131}{500}$

法二： $P_2=\dfrac{1}{10}+2\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{10}\times2\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{131}{500}$

法三： $P_2=1-\dfrac{9}{10}\times(\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10})=\dfrac{131}{500}$

19．（12 分）在锐角 ΔABC 中，角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c，已知 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

（1）求 $\tan^2\dfrac{B+C}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}$ 的值；

（2）若 $a=2$， $S_{\Delta ABC}=\sqrt{2}$，求 b 的值．

【解答】解：（1）因为锐角ΔABC中，$A+B+C=\pi$，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\cos A=\dfrac{1}{3}$，

则$\tan^2\dfrac{B+C}{2}+sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{B+C}{2}}{\cos^2\dfrac{B+C}{2}}+\sin^2\dfrac{A}{2}$

$=\dfrac{1-\cos(B+C)}{1+\cos(B+C)}+\dfrac{1}{2}(1-\cos A)=\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

（2）因为$S_{\Delta ABC}=\sqrt{2}$,又$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bcsinA=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则$bc=3$.

将$a=2$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{3}{b}$代入余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$中得$b^4-6b^2+9=0$

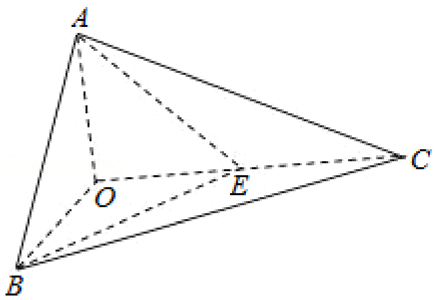
解得$b=\sqrt{3}$

20．（12分）如图，已知三棱锥$O-ABC$的侧棱OA，OB，OC两两垂直，且$OA=1$，$OB=OC=2$，E是OC的中点.

（1）求O点到面ABC的距离；

（2）求异面直线BE与AC所成的角；

（3）求二面角$E-AB-C$的大小.



【解答】解：（1）取BC的中点D，连AD、OD

因为$OB=OC$，则$OD\perp BC$、$AD\perp BC$，

$\therefore BC\perp$面OAD.

过O点作$OH\perp AD$于H，则$OH\perp$面ABC，OH的长就

是所求的距离．又$BC=2\sqrt{2}$，$OD=\sqrt{OC^2-CD^2}$

$=\sqrt{2}$，又$OA\perp OB$，$OA\perp OC$

$\therefore OA\perp$面OBC，则$OA\perp OD$

$AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=\sqrt{3}$，在直角三角形$OAD$中，

有 $OH=\dfrac{OA \bullet OD}{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（2）取 OA 的中点 M，连 EM 、 BM，

则 $EM//AC$， $DBEM$ 是异面直线 BE 与 AC

所成的角，易求得 $EM=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $BE=\sqrt{5}$，

$BM=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$．由余弦定理可求得 $\cos DBEM=\dfrac{2}{5}$，

$\therefore \angle BEM=\arccos\dfrac{2}{5}$

（3）连 CH 并延长交 AB 于 F，连 OF 、 EF .

由 $OC\perp$ 面 OAB，得 $OC\perp AB$，又 $OH\perp$ 面 ABC，所以 $CF\perp AB$， $EF\perp AB$，

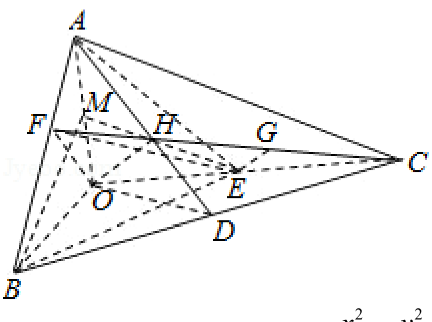
则 $DEFC$ 就是所求的二面角的平面角.

作 $EG\perp CF$ 于 G，则 $EG=\dfrac{1}{2}OH=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，在 RtΔOAB 中， $OF=\dfrac{OA \bullet OB}{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

在 RtΔOEF 中， $EF=\sqrt{OE^2+OF^2}=\sqrt{1+\dfrac{4}{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin\angle EFG=\dfrac{EG}{EF}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{3}{\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{30}}{18}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{30}}{18}\angle EFG=\arcsin\dfrac{\sqrt{30}}{18}$.



21．（12 分）如图，椭圆 $Q:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，过点 F 的一动直线 m

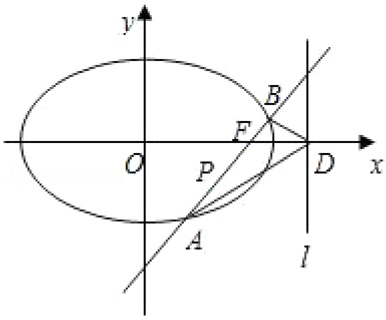
绕点 F 转动，

并且交椭圆于 A， B 两点， P 为线段 AB 的中点.

（1）求点 P 的轨迹 H 的方程；

（2）若在Q的方程中，令$a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$，$b^2=\sin\theta(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$．

设轨迹H的最高点和最低点分别为M和N．当θ为何值时，ΔMNF为一个正三角形？



【解答】解：（1）设椭圆$Q:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

上的点$A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$，又设P点坐标为$P(x,y)$，

则$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2(1)\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2(2)\end{cases}$

1°当AB不垂直x轴时，$x_1\ne x_2$，

由（1）－（2）得

$b^2(x_1-x_2)2x+a^2(y_1-y_2)2y=0$

$\therefore\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}=\dfrac{y}{x-c}$

$\therefore b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0$（3）

2°当AB垂直于x轴时，点P即为点F，满足方程（3）

故所求点P的轨迹方程为：$b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0$

（2）因为轨迹H的方程可化为：$\dfrac{(x-\dfrac{c}{2})^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=(\dfrac{c}{2a})^2$

$\therefore M(\dfrac{c}{2}，\dfrac{bc}{2a})$，$N(\dfrac{c}{2}，-\dfrac{bc}{2a})$，$F(c,0)$，

使ΔMNF为一个正三角形时，

则$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\dfrac{bc}{2a}}{\dfrac{c}{2}}=\dfrac{b}{a}$，即$a^2=3b^2$．

由于$a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$，$b^2=\sin\theta(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$，

则$1+\cos q+\sin q=3\sin\theta$，

得$\theta=\arctan\frac{4}{3}$

22．（14 分）已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$，满足：$a_1=3$，且$\frac{2a_{n+1}-a_n}{2a_n-a_{n+1}}=a_na_{n+1}$，

$n\in N^*$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$S_n=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$，$T_n=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+a\frac{1}{a_n^2}$，求$S_n+T_n$，并确定最小正整数$n$，

使S_n+T_n为整数．

【解答】解：（1）条件可化为$a_{n+1}-\frac{1}{a_{n+1}}=2(a_n-\frac{1}{a_n})$，

因此$\{a_n-\frac{1}{a_n}\}$为一个等比数列，其公比为 2，首项为$a_1-\frac{1}{a_1}=\frac{8}{3}$，

所以$a_n-\frac{1}{a_n}=\frac{8}{3}\times 2^{n-1}=\frac{2^{n+2}}{3}(n\in N^*)\ldots$①

因$a_n>0$，由①式解出$a_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}+\sqrt{2^{2n+2}+9})\ldots$②

（2）由①式有$S_n+T_n=(a_1-\frac{1}{a_1})^2+(a_2-\frac{1}{a_2})^2+\ldots+(a_n-\frac{1}{a_n})^2+2n$

$=(\frac{2^3}{3})^2+(\frac{2^4}{3})^2+(\frac{2^5}{3})^2+\ldots+(\frac{2^{n+2}}{3})^2+2n$

$=\frac{64}{27}(4^n-1)+2n(n\in N^*)$

为使$S_n+T_n=\frac{64}{27}(4^n-1)+2n(n\in N^*)$为整数，

当且仅当$\frac{4^n-1}{27}$为整数．

当$n=1$，2 时，显然S_n+T_n不为整数，

当$n^3 3$时，$4^n-1=(1+3)^n-1=ð_n^1\times 3+ð_n^2\times 3^2+3^3(ð_n^3+\ldots+3^{n-3}ð_n^n)$

$\therefore$只需$\frac{3C_n^1+3^2C_n^2}{27}=\frac{n}{9}\bullet\frac{3n-1}{2}$为整数，

因为$3n-1$与 3 互质，

所以为 9 的整数倍．

当$n=9$时，$\frac{n}{9}\bullet\frac{3n-1}{2}=13$为整数，

故n的最小值为 9．