



7. “ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ”是“ $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ ”的 ( )

- A. 充分条件但不是必要条件  
B. 必要条件但不是充分条件  
C. 充要条件  
D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为  $\sqrt{5}$ , 其中一条渐近线与圆  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$  交于  $A$ ,

$B$  两点, 则  $|AB| =$  ( )

- A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$                       D.  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9. 有五名志愿者参加社区服务, 共服务星期六、星期天两天, 每天从中任选两人参加服务, 则恰有 1 人连续参加两天服务的选择种数为 ( )

- A. 120                      B. 60                      C. 40                      D. 30

10. 已知  $f(x)$  为函数  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位所得函数, 则  $y = f(x)$  与  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  的交点个

数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

11. 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为正方形,  $AB = 4, PC = PD = 3, \angle PCA = 45^\circ$ , 则  $\triangle PBC$  的面积为 ( )

- A.  $2\sqrt{2}$                       B.  $3\sqrt{2}$                       C.  $4\sqrt{2}$                       D.  $5\sqrt{2}$

12. 已知椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ ,  $F_1, F_2$  为两个焦点,  $O$  为原点,  $P$  为椭圆上一点,  $\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{3}{5}$ , 则  $|PO| =$

( )

- A.  $\frac{2}{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{30}}{2}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $\frac{\sqrt{35}}{2}$

## 二、填空题

13. 若  $y = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  为偶函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} -2x + 3y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$ , 设  $z = 3x + 2y$ , 则  $z$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

15. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $CD, A_1B_1$  的中点, 则以  $EF$  为直径的球面与正方体每条

棱的交点总数为\_\_\_\_\_.

16. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $BC = \sqrt{6}$ ,  $D$  为  $BC$  上一点,  $AD$  为  $\angle BAC$  的平分线, 则  $AD =$ \_\_\_\_\_.

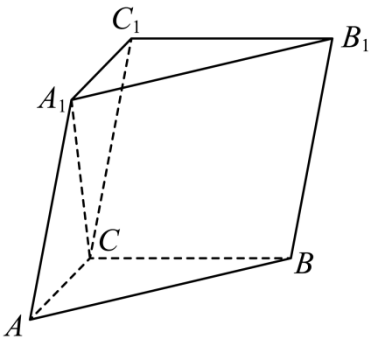
### 三、解答题

17. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 = 1$ , 设  $S_n$  为  $\{a_n\}$  前  $n$  项和,  $2S_n = na_n$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 = 2$ ,  $A_1C \perp$  底面  $ABC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $A_1$  到平面  $BCC_1B_1$  的距离为 1.



(1) 求证:  $AC = A_1C$ ;

(2) 若直线  $AA_1$  与  $BB_1$  距离为 2, 求  $AB_1$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的正弦值.

19. 为探究某药物对小鼠的生长抑制作用, 将 40 只小鼠均分为两组, 分别为对照组 (不加药物) 和实验组 (加药物).

(1) 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望;

(2) 测得 40 只小鼠体重如下 (单位: g): (已按从小到大排好)

对照组: 17.3 18.4 20.1 20.4 21.5 23.2 24.6 24.8 25.0 25.4

26.1 26.3 26.4 26.5 26.8 27.0 27.4 27.5 27.6 28.3

实验组: 5.4 6.6 6.8 6.9 7.8 8.2 9.4 10.0 10.4 11.2

14.4 17.3 19.2 20.2 23.6 23.8 24.5 25.1 25.2 26.0

(i) 求 40 只小鼠体重的中位数  $m$ , 并完成下面  $2 \times 2$  列联表:

|  |       |          |
|--|-------|----------|
|  | $< m$ | $\geq m$ |
|--|-------|----------|

|     |  |  |
|-----|--|--|
| 对照组 |  |  |
| 实验组 |  |  |

(ii) 根据  $2 \times 2$  列联表, 能否有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

参考数据:

|                   |       |       |       |
|-------------------|-------|-------|-------|
| $k_0$             | 0.10  | 0.05  | 0.010 |
| $P(k^2 \geq k_0)$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

20. 已知直线  $x - 2y + 1 = 0$  与抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 4\sqrt{15}$ .

(1) 求  $P$ ;

(2) 设  $C$  的焦点为  $F$ ,  $M, N$  为  $C$  上两点,  $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 0$ , 求  $\triangle MNF$  面积的最小值.

21. 已知  $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) 若  $a = 8$ , 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x) < \sin 2x$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

#### 四、选做题

22. 已知  $P(2,1)$ , 直线  $l: \begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数),  $\alpha$  为  $l$  的倾斜角,  $l$  与  $x$  轴,  $y$  轴正半轴交于  $A, B$  两

点,  $|PA| \cdot |PB| = 4$ .

(1) 求  $\alpha$  的值;

(2) 以原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求  $l$  的极坐标方程.

23. 已知  $f(x) = 2|x - a| - a, a > 0$ .

(1) 求不等式  $f(x) < x$  的解集;

(2) 若曲线  $y = f(x)$  与坐标轴所围成的图形的面积为 2, 求  $a$ .

