

2006 年黑龙江高考理科数学真题及答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 已知集合 $M=\{x|x<3\}$, $N=\{x|\log_2x>1\}$, 则 $M\cap N=(\quad)$

- A. \emptyset B. $\{x|0<x<3\}$ C. $\{x|1<x<3\}$ D. $\{x|2<x<3\}$

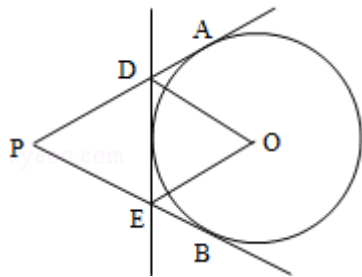
2. (5 分) 函数 $y=\sin 2x \cdot \cos 2x$ 的最小正周期是 (\quad)

- A. 2π B. 4π C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

3. (5 分) $\frac{3}{(1-i)^2}=(\quad)$

- A. $\frac{3}{2}i$ B. $-\frac{3}{2}i$ C. i D. $-i$

4. (5 分) 如图, PA、PB、DE 分别与 $\odot O$ 相切, 若 $\angle P=40^\circ$, 则 $\angle DOE$ 等于 (\quad) 度.



- A. 40 B. 50 C. 70 D. 80

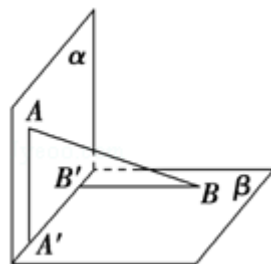
5. (5 分) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 (\quad)

- A. $2\sqrt{3}$ B. 6 C. $4\sqrt{3}$ D. 12

6. (5 分) 已知函数 $f(x)=\ln x+1$ ($x>0$), 则 $f(x)$ 的反函数为 (\quad)

- A. $y=e^{x+1}$ ($x\in\mathbb{R}$) B. $y=e^{x-1}$ ($x\in\mathbb{R}$) C. $y=e^{x+1}$ ($x>1$) D. $y=e^{x-1}$ ($x>1$)

7. (5 分) 如图, 平面 $\alpha \perp$ 平面 β , $A \in \alpha$, $B \in \beta$, AB 与两平面 α 、 β 所成的角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{6}$. 过 A、B 分别作两平面交线的垂线, 垂足为 A' 、 B' , 则 $AB:A'B'=(\quad)$



A. 2: 1 B. 3: 1 C. 3: 2 D. 4: 3

8. (5分) 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_2x (x>0)$ 的图象关于原点对称, 则 $f(x)$ 的表达式为 ()

A. $f(x)=\frac{1}{\log_2x} (x>0)$ B. $f(x)=\frac{1}{\log_2(-x)} (x<0)$

C. $f(x)=-\log_2x (x>0)$ D. $f(x)=-\log_2(-x) (x<0)$

9. (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{4}{3}x$, 则双曲线的

离心率为 ()

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

10. (5分) 若 $f(\sin x) = 2 - \cos 2x$, 则 $f(\cos x)$ 等于 ()

A. $2 - \sin 2x$ B. $2 + \sin 2x$ C. $2 - \cos 2x$ D. $2 + \cos 2x$

11. (5分) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_3-1}{S_6-3}$, 则 $\frac{S_6}{S_{12}} = ()$

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{9}$

12. (5分) 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{19} |x-n|$ 的最小值为 ()

A. 190 B. 171 C. 90 D. 45

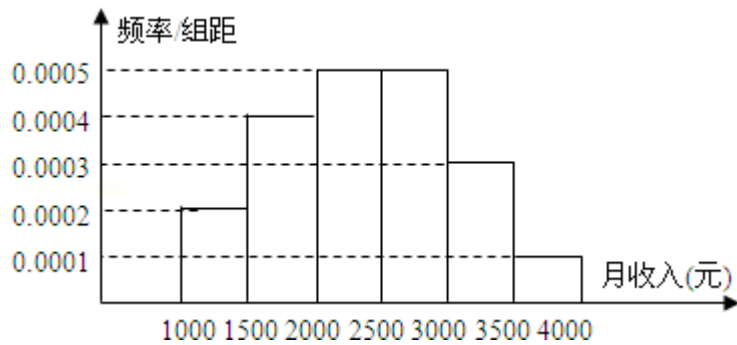
二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

13. (4分) 在 $(x^4 + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中常数项为____ (用数字作答).

14. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 成等差数列, 且 $AB=1, BC=4$, 则边 BC 上的中线 AD 的长为____.

15. (4分) 过点 $(1, \sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时, 直线 l 的斜率 $k =$ ____.

16. (4分) 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 $[2500, 3000)$ (元) 月收入段应抽出____人.



三、解答题（共6小题，满分74分）

17. (12分) 已知向量 $\vec{a} = (\sin \theta, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (1, \cos \theta)$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(1) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求 θ ;

(2) 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的最大值.

18. (12分) 某批产品成箱包装, 每箱5件, 一用户在购进该批产品前先取出3箱, 再从每箱中任意取出2件产品进行检验. 设取出的第一、二、三箱中分别有0件、1件、2件二等品, 其余为一等品.

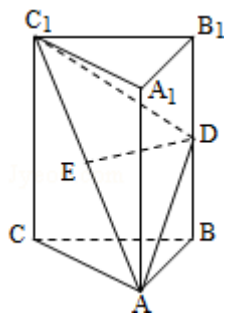
(1) 用 ξ 表示抽检的6件产品中二等品的件数, 求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望;

(2) 若抽检的6件产品中有2件或2件以上二等品, 用户就拒绝购买这批产品, 求这批产品被用户拒绝的概率.

19. (12分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC$, D、E 分别为 BB_1 、 AC_1 的中点.

(I) 证明: ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(II) 设 $AA_1 = AC = \sqrt{2}AB$, 求二面角 $A_1 - AD - C_1$ 的大小.



20. (12分) 设函数 $f(x) = (x+1) \ln(x+1)$. 若对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (14分) 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F, A、B 是抛物线上的两动点, 且

$\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.

(I) 证明 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB}$ 为定值;

(II) 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S, 写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值.

22. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且方程 $x^2 - a_n x - a_n = 0$ 有一根为 $S_n - 1$, $n=1, 2, 3, \dots$.

(1) 求 a_1, a_2 ;

(2) 猜想数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并给出严格的证明.

2006 年黑龙江高考理科数学真题参考答案

一、选择题 (共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分)

1. (5 分) 已知集合 $M=\{x|x<3\}$, $N=\{x|\log_2 x>1\}$, 则 $M \cap N =$ ()

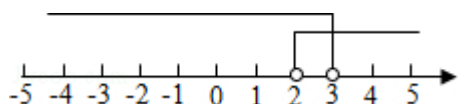
A. \emptyset B. $\{x|0<x<3\}$ C. $\{x|1<x<3\}$ D. $\{x|2<x<3\}$

【分析】解出集合 N, 结合数轴求交集.

【解答】解: $N=\{x|\log_2 x>1\}=\{x|x>2\}$,

用数轴表示可得答案 D

故选 D.



2. (5 分) 函数 $y=\sin 2x \cdot \cos 2x$ 的最小正周期是 ()

A. 2π B. 4π C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【分析】将函数化简为: $y=A \sin(\omega x + \phi)$ 的形式即可得到答案.

【解答】解: $y=\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ 所以最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

故选 D

3. (5 分) $\frac{3}{(1-i)^2} =$ ()

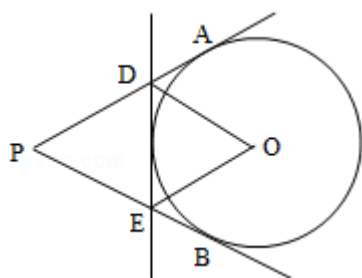
- A. $\frac{3}{2}i$ B. $-\frac{3}{2}i$ C. i D. $-i$

【分析】化简复数的分母，再分子、分母同乘分母的共轭复数，化简即可.

【解答】解: $\frac{3}{(1-i)^2} = \frac{3}{-2i} = \frac{3i}{-2i^2} = \frac{3i}{2} = \frac{3}{2}i$

故选 A.

4. (5分) 如图, PA、PB、DE 分别与 $\odot O$ 相切, 若 $\angle P=40^\circ$, 则 $\angle DOE$ 等于 () 度.



- A. 40 B. 50 C. 70 D. 80

【分析】连接 OA、OB、OP, 由切线的性质得 $\angle AOB=140^\circ$, 再由切线长定理求得 $\angle DOE$ 的度数.

【解答】解: 连接 OA、OB、OP,

$\because \angle P=40^\circ$,

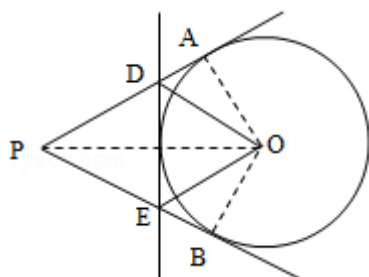
$\therefore \angle AOB=140^\circ$,

\because PA、PB、DE 分别与 $\odot O$ 相切,

$\therefore \angle AOD=\angle POD, \angle BOE=\angle POE$,

$\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 140^\circ=70^\circ$.

故选 C.



5. (5分) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆

的另外一个焦点在 BC 边上，则 $\triangle ABC$ 的周长是 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. 6 C. $4\sqrt{3}$ D. 12

【分析】由椭圆的定义：椭圆上一点到两焦点的距离之和等于长轴长 $2a$ ，可得 $\triangle ABC$ 的周长。

【解答】解：由椭圆的定义：椭圆上一点到两焦点的距离之和等于长轴长 $2a$ ，可得 $\triangle ABC$ 的周长为 $4a=4\sqrt{3}$ ，

故选 C

6. (5 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + 1$ ($x > 0$)，则 $f(x)$ 的反函数为 ()

- A. $y = e^{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$) B. $y = e^{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$) C. $y = e^{x+1}$ ($x > 1$) D. $y = e^{x-1}$ ($x > 1$)

【分析】本题考查反函数的概念、求反函数的方法、指数式与对数式的互化，求函数的值域将 $y = \ln x + 1$ 看做方程解出 x ，然后由原函数的值域确定反函数的定义域即可。

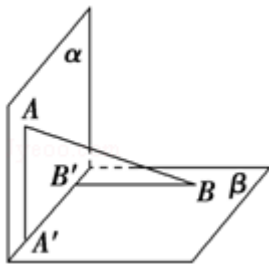
【解答】解：由 $y = \ln x + 1$ 解得 $x = e^{y-1}$ ，即： $y = e^{x-1}$

$\because x > 0, \therefore y \in \mathbb{R}$

所以函数 $f(x) = \ln x + 1$ ($x > 0$) 反函数为 $y = e^{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$)

故选 B

7. (5 分) 如图，平面 $\alpha \perp$ 平面 β ， $A \in \alpha$ ， $B \in \beta$ ， AB 与两平面 α 、 β 所成的角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 。过 A 、 B 分别作两平面交线的垂线，垂足为 A' 、 B' ，则 $AB : A'B' =$ ()



- A. 2: 1 B. 3: 1 C. 3: 2 D. 4: 3

【分析】设 AB 的长度为 a 用 a 表示出 $A'B'$ 的长度，即可得到两线段的比值。

【解答】解：连接 AB' 和 $A'B$ ，设 $AB = a$ ，可得 AB 与平面 α 所成的角为 $\angle BAB' = \frac{\pi}{4}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BAB'$ 中有 $AB' = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，同理可得 AB 与平面 β 所成的角为 $\angle ABA' = \frac{\pi}{6}$ ，

所以 $A'A = \frac{1}{2}a$, 因此在 $Rt\triangle AA'B'$ 中 $A'B' = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}a$,

所以 $AB: A'B' = a: \frac{1}{2}a = 2: 1$,

故选 A.

8. (5分) 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = \log_2 x (x>0)$ 的图象关于原点对称, 则 $f(x)$ 的表达式为 ()

A. $f(x) = \frac{1}{\log_2 x} (x>0)$ B. $f(x) = \frac{1}{\log_2(-x)} (x<0)$

C. $f(x) = -\log_2 x (x>0)$ D. $f(x) = -\log_2(-x) (x<0)$

【分析】先设函数 $f(x)$ 上的点为 (x, y) , 根据 (x, y) 关于原点的对称点为 $(-x, -y)$ 且函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = \log_2 x (x>0)$ 的图象关于原点对称, 得到 x 与 y 的关系式, 即得答案.

【解答】解: 设 (x, y) 在函数 $f(x)$ 的图象上

$\therefore (x, y)$ 关于原点的对称点为 $(-x, -y)$,

所以 $(-x, -y)$ 在函数 $g(x)$ 上

$\therefore -y = \log_2(-x) \Rightarrow f(x) = -\log_2(-x) (x<0)$

故选 D.

9. (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$, 则双曲线的

离心率为 ()

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【分析】由题意设出双曲线的方程, 得到它的一条渐近线方程 $y = \frac{b}{a}x$ 即 $y = \frac{4}{3}x$, 由此可得 $b:a = 4:3$, 结合双曲线的平方关系可得 c 与 a 的比值, 求出该双曲线的离心率.

【解答】解: \therefore 双曲线的中心在原点, 焦点在 x 轴上,

\therefore 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a>0, b>0)$

由此可得双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 结合题意一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$,

得 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 设 $b = 4t$, $a = 3t$, 则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5t$ ($t > 0$)

\therefore 该双曲线的离心率是 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

故选 A.

10. (5分) 若 $f(\sin x) = 2 - \cos 2x$, 则 $f(\cos x)$ 等于 ()

A. $2 - \sin 2x$ B. $2 + \sin 2x$ C. $2 - \cos 2x$ D. $2 + \cos 2x$

【分析】本题考查的知识点是函数解析式的求法, 根据已知中 $f(\sin x) = 2 - \cos 2x$, 结合倍角公式对解析式进行凑配, 不难得到函数 $f(x)$ 的解析式, 然后将 $\cos x$ 代入, 并化简即可得到答案.

【解答】解: $\because f(\sin x) = 2 - (1 - 2\sin^2 x) = 1 + 2\sin^2 x$,

$\therefore f(x) = 1 + 2x^2$, ($-1 \leq x \leq 1$)

$\therefore f(\cos x) = 1 + 2\cos^2 x = 2 + \cos 2x$.

故选 D

11. (5分) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{S_6}{S_{12}} =$ ()

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{9}$

【分析】根据等差数列的前 n 项和公式, 用 a_1 和 d 分别表示出 s_3 与 s_6 , 代入 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$ 中, 整

理得 $a_1 = 2d$, 再代入 $\frac{S_6}{S_{12}}$ 中化简求值即可.

【解答】解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

由等差数列的求和公式可得 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{3a_1 + 3d}{6a_1 + 15d} = \frac{1}{3}$, 可得 $a_1 = 2d$ 且 $d \neq 0$,

$\therefore \frac{S_6}{S_{12}} = \frac{6a_1 + 15d}{12a_1 + 66d} = \frac{27d}{90d} = \frac{3}{10}$,

故选 A.

12. (5分) 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{19} |x - n|$ 的最小值为 ()

A. 190 B. 171 C. 90 D. 45

【分析】利用绝对值的几何意义求解或者绝对值不等式的性质求解.

【解答】解法一: $f(x) = \sum_{n=1}^{19} |x - n| = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 19|$ 表示数轴上一点到

1, 2, 3, ..., 19 的距离之和,

可知 x 在 1 - 19 最中间时 $f(x)$ 取最小值. 即 $x=10$ 时 $f(x)$ 有最小值 90,

故选 C.

解法二: $|x - 1| + |x - 19| \geq 18$, 当 $1 \leq x \leq 19$ 时取等号;

$|x - 2| + |x - 18| \geq 16$, 当 $2 \leq x \leq 18$ 时取等号;

$|x - 3| + |x - 17| \geq 14$, 当 $3 \leq x \leq 17$ 时取等号;

...

$|x - 9| + |x - 11| \geq 2$, 当 $9 \leq x \leq 11$ 时取等号;

$|x - 10| \geq 0$, 当 $x=10$ 时取等号;

将上述所有不等式累加得 $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 19| \geq 18 + 16 + 14 + \dots + 2 + 0 = 90$ (当且仅当 $x=10$ 时取得最小值)

故选 C.

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

13. (4分) 在 $(x^4 + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中常数项为 45 (用数字作答).

【分析】利用二项式的通项公式 (让次数为 0, 求出 r) 就可求出答案.

【解答】解: $T_{r+1} = C_{10}^r (x^4)^{10-r} (\frac{1}{x})^r = C_{10}^r x^{40-5r}$ 要求常数项,

即 $40 - 5r = 0$,

可得 $r=8$ 代入通项公式可得 $T_{r+1} = C_{10}^8 = C_{10}^2 = 45$

故答案为: 45.

14. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 成等差数列, 且 $AB=1$, $BC=4$, 则边 BC 上的中线

AD 的长为 $\underline{\underline{\sqrt{3}}}$.

【分析】先根据三个内角 A、B、C 成等差数列和三角形内角和为 π 可求得 B 的值，进而利用 AD 为边 BC 上的中线求得 BD，最后在 $\triangle ABD$ 中利用余弦定理求得 AD.

【解答】解：∵ $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 成等差数列

$$\therefore A+C=2B$$

$$\therefore A+B+C=\pi$$

$$\therefore \angle B = \frac{\pi}{3}$$

∵ AD 为边 BC 上的中线

$$\therefore BD=2,$$

由余弦定理定理可得 $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos B} = \sqrt{3}$

故答案为： $\sqrt{3}$

15. (4分) 过点 $(1, \sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 分成两段弧，当劣弧所对的圆心角最小时，直线 l 的斜率 $k = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

【分析】本题考查的是直线垂直时斜率之间的关系，及直线与圆的相关性质，要处理本题我们先要画出满足条件的图形，数形结合容易得到符合题目中的条件的数理关系，由劣弧所对的圆心角最小弦长最短，及过圆内一点最短的弦与过该点的直径垂直，易得到解题思路.

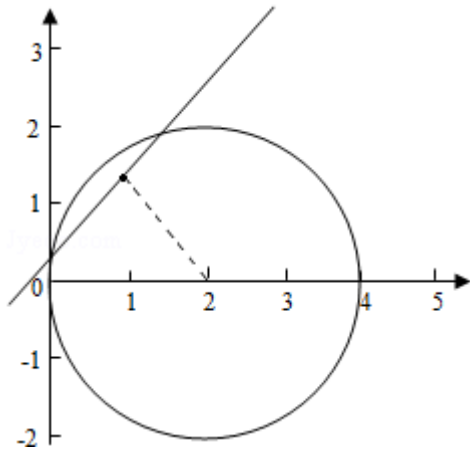
【解答】解：如图示，由图形可知：

点 A $(1, \sqrt{2})$ 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的内部，

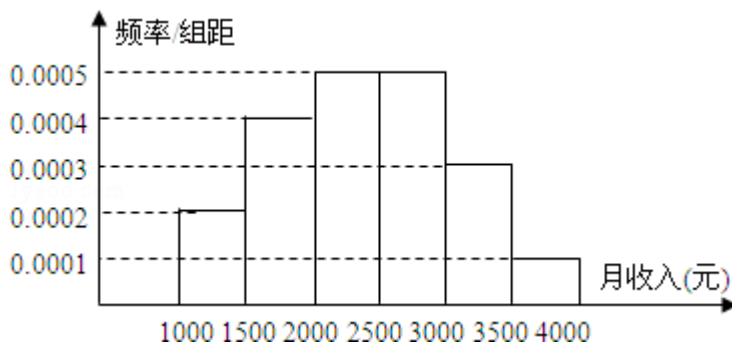
圆心为 O $(2, 0)$ 要使得劣弧所对的圆心角最小，

只能是直线 $l \perp OA$,

$$\text{所以 } k_1 = -\frac{1}{k_{OA}} = -\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



16. (4分) 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 [2500, 3000) (元) 月收入段应抽出 25 人.



【分析】直方图中小矩形的面积表示频率, 先计算出 [2500, 3000) 内的频率, 再计算所需抽取人数即可.

【解答】解: 由直方图可得 [2500, 3000) (元) 月收入段共有 $10000 \times 0.0005 \times 500 = 2500$ 人

按分层抽样应抽出 $2500 \times \frac{100}{10000} = 25$ 人

故答案为: 25

三、解答题 (共 6 小题, 满分 74 分)

17. (12分) 已知向量 $\vec{a} = (\sin \theta, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (1, \cos \theta)$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(1) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求 θ ;

(2) 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的最大值.

【分析】(1) 利用向量垂直的充要条件列出方程，利用三角函数的商数关系求出正切，求出角.

(2) 利用向量模的平方等于向量的平方，利用三角函数的平方关系及公式 $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \beta)$ ，化简 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ ，利用三角函数的有界性求出范围.

【解答】解：(1) 因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，所以 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 0$

得 $\tan\theta = -\sqrt{3}$

又 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

所以 $\theta = -\frac{\pi}{3}$

(2) 因为 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\sin\theta + 1)^2 + (\cos\theta + \sqrt{3})^2$
 $= 5 + 4\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$

所以当 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 时， $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 的最大值为 $5 + 4 = 9$

故 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的最大值为 3

18. (12分) 某批产品成箱包装，每箱 5 件，一用户在购进该批产品前先取出 3 箱，再从每箱中任意取出 2 件产品进行检验. 设取出的第一、二、三箱中分别有 0 件、1 件、2 件二等品，其余为一等品.

(1) 用 ξ 表示抽检的 6 件产品中二等品的件数，求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望；

(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品，用户就拒绝购买这批产品，求这批产品被用户拒绝的概率.

【分析】(1) 由取出的第一、二、三箱中分别有 0 件、1 件、2 件二等品可知变量 ξ 的取值，结合变量对应的事件做出这四个事件发生的概率，写出分布列和期望.

(2) 由上一问做出的分布列可以知道， $P(\xi = 2) = \frac{15}{50}$ ， $P(\xi = 3) = \frac{2}{50}$ ，这两个事件是互斥的，根据互斥事件的概率公式得到结果.

【解答】解 (1) 由题意知抽检的 6 件产品中二等品的件数 $\xi = 0, 1, 2, 3$

$$P(\xi=0) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50} \quad P(\xi=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_4^2 \cdot C_2^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{15}{50} \quad P(\xi=3) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

∴ ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{9}{50}$	$\frac{24}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{2}{50}$

∴ ξ 的数学期望 $E(\xi) = 0 \times \frac{9}{50} + 1 \times \frac{24}{50} + 2 \times \frac{15}{50} + 3 \times \frac{2}{50} = 1.2$

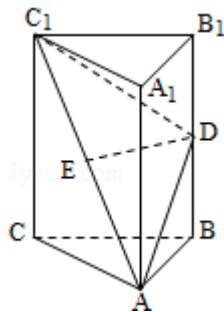
(2) ∵ $P(\xi=2) = \frac{15}{50}$, $P(\xi=3) = \frac{2}{50}$, 这两个事件是互斥的

∴ $P(\xi \geq 2) = P(\xi=2) + P(\xi=3) = \frac{15}{50} + \frac{2}{50} = \frac{17}{50}$

19. (12分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC$, D、E 分别为 BB_1 、 AC_1 的中点.

(I) 证明: ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(II) 设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$, 求二面角 $A_1 - AD - C_1$ 的大小.



【分析】 (I) 设 O 为 AC 中点, 连接 EO, BO, 欲证 ED 为异面直线 AC_1 与 BB_1 的公垂线, 只需证明 ED 与直线 AC_1 与 BB_1 都垂直且相交, 根据线面垂直的性质可知 $ED \perp CC_1$, 而 $ED \perp BB_1$, 即可证得;

(II) 连接 A_1E , 作 $EF \perp AD$, 垂足为 F, 连接 A_1F , 根据二面角的平面角定义可知 $\angle A_1FE$ 为二面角 $A_1 - AD - C_1$ 的平面角, 在三角形 A_1FE 中求出此角即可.

【解答】 解: (I) 设 O 为 AC 中点, 连接 EO, BO, 则 $EO \parallel \frac{1}{2}C_1C$, 又 $C_1C \parallel B_1B$, 所以 $EO \parallel DB$, EODB 为平行四边形, $ED \parallel OB$. (2分)

∵ $AB=BC$,

$\therefore BO \perp AC$,

又平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $BO \perp$ 面 ABC ,

故 $BO \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$\therefore ED \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $ED \perp AC_1$, $ED \perp CC_1$,

$\therefore ED \perp BB_1$, ED 为异面直线 AC_1 与 BB_1 的公垂线. (6分)

(II) 连接 A_1E , 由 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$ 可知, A_1ACC_1 为正方形,

$\therefore A_1E \perp AC_1$, 又由 $ED \perp$ 平面 ACC_1A_1 和 $ED \perp$ 平面 ADC_1 知平面

$ADC_1 \perp$ 平面 A_1ACC_1 ,

$\therefore A_1E \perp$ 平面 ADC_1 .

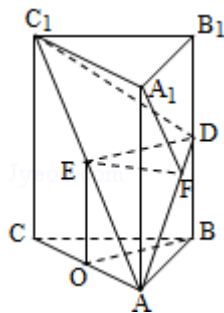
作 $EF \perp AD$, 垂足为 F , 连接 A_1F , 则 $A_1F \perp AD$, $\angle A_1FE$ 为二面角 $A_1 - AD - C_1$ 的平面角.

不妨设 $AA_1=2$, 则 $AC=2$, $AB=\sqrt{2}$, $ED=OB=1$, $EF=\frac{AE \times ED}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

$\tan \angle A_1FE=\sqrt{3}$,

$\therefore \angle A_1FE=60^\circ$.

所以二面角 $A_1 - AD - C_1$ 为 60° . (12分)



20. (12分) 设函数 $f(x) = (x+1) \ln(x+1)$. 若对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【分析】令 $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - ax$ 对 $g(x)$, 求导得 $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$, 令 $g'(x) = 0 \Rightarrow x = e^{a-1} - 1$,

当 $a \leq 1$ 时, 对所有的 $x > 0$ 都有 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为单调增函数, 又 $g(0) = 0$, 所以对 $x \geq 0$ 时有 $g(x) \geq g(0)$, 即当 $a \leq 1$ 时都有 $f(x) \geq ax$, 所以 $a \leq 1$ 成立, 当 $a > 1$ 时, 对于 $0 < x < e^{a-1} - 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e^{a-1} - 1)$ 上是减函数, 又 $g(0) = 0$, 所以对于 $0 < x < e^{a-1} - 1$ 有 $g(x) < g(0)$, 即 $f(x) < ax$, 所以当 $a > 1$ 时 $f(x) \geq ax$ 不一定成立

综上所述即可得出 a 的取值范围.

【解答】解法一:

$$\text{令 } g(x) = (x+1) \ln(x+1) - ax,$$

对函数 $g(x)$ 求导数: $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = e^{a-1} - 1,$$

(i) 当 $a \leq 1$ 时, 对所有 $x > 0$, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数,

又 $g(0) = 0$, 所以对 $x \geq 0$, 都有 $g(x) \geq g(0)$,

即当 $a \leq 1$ 时, 对于所有 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$.

(ii) 当 $a > 1$ 时, 对于 $0 < x < e^{a-1} - 1$, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e^{a-1} - 1)$ 是减函数,

又 $g(0) = 0$, 所以对 $0 < x < e^{a-1} - 1$, 都有 $g(x) < g(0)$,

即当 $a > 1$ 时, 不是对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

解法二:

$$\text{令 } g(x) = (x+1) \ln(x+1) - ax,$$

于是不等式 $f(x) \geq ax$ 成立即为 $g(x) \geq g(0)$ 成立.

对函数 $g(x)$ 求导数: $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = e^{a-1} - 1,$$

当 $x > e^{a-1} - 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数,

当 $-1 < x < e^{a-1} - 1$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数,

所以要对所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) \geq g(0)$ 充要条件为 $e^{a-1} - 1 \leq 0$.

由此得 $a \leq 1$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

21. (14分) 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , A 、 B 是抛物线上的两动点, 且

$\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$. 过 A 、 B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M .

(I) 证明 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB}$ 为定值;

(II) 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S , 写出 $S = f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值.

【分析】(1) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_0, y_0)$, 根据抛物线方程可得焦点坐标和准线方程, 设直线方程与抛物线方程联立消去 y , 根据判别式大于 0 求得 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$, 根据曲线

4y=x²上任意一点斜率为 y' = $\frac{x}{2}$, 可得切线 AM 和 BM 的方程, 联立方程求得交点坐标, 求得

\overrightarrow{FM} 和 \overrightarrow{AB} , 进而可求得 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的结果为 0, 进而判断出 AB⊥FM.

(2) 利用 (1) 的结论, 根据 x₁+x₂的关系式求得 k 和 λ 的关系式, 进而求得弦长 AB, 可表示出△ABM 面积. 最后根据均值不等式求得 S 的范围, 得到最小值.

【解答】解: (1) 设 A (x₁, y₁), B (x₂, y₂), M (x₀, y₀), 焦点 F (0, 1), 准线方程为 y = -1,

显然 AB 斜率存在且过 F (0, 1)

设其直线方程为 y=kx+1, 联立 4y=x² 消去 y 得: x² - 4kx - 4=0,

判别式 Δ=16(k²+1) > 0.

$$x_1+x_2=4k, \quad x_1x_2=-4$$

于是曲线 4y=x²上任意一点斜率为 y' = $\frac{x}{2}$, 则易得切线 AM, BM 方程分别为 y = ($\frac{1}{2}$)x₁(x - x₁)

+y₁, y = ($\frac{1}{2}$)x₂(x - x₂) + y₂, 其中 4y₁=x₁², 4y₂=x₂², 联立方程易解得交点 M 坐标,

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = 2k, \quad y_0 = \frac{x_1x_2}{4} = -1, \quad \text{即 } M \left(\frac{x_1+x_2}{2}, -1 \right)$$

$$\text{从而, } \overrightarrow{FM} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, -2 \right), \quad \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (x_1+x_2) (x_2 - x_1) - 2 (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) - 2 \left[\frac{1}{4} (x_2^2 - x_1^2) \right] = 0, \quad (\text{定值})$$

命题得证.

这就说明 AB⊥FM.

(II) 由 (I) 知在△ABM 中, FM⊥AB, 因而 S = $\frac{1}{2} |AB| |FM|$.

$$\because \overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0),$$

$$\therefore (-x_1, 1 - y_1) = \lambda (x_2, y_2 - 1), \quad \text{即 } \begin{cases} -x_1 = \lambda x_2 \\ 1 - y_1 = \lambda (y_2 - 1) \end{cases}$$

而 4y₁=x₁², 4y₂=x₂²,

$$\text{则 } x_2^2 = \frac{4}{\lambda}, \quad x_1^2 = 4\lambda,$$

$$|FM| = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} \right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4} = \sqrt{\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2} = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

因为 |AF|、|BF| 分别等于 A、B 到抛物线准线 y = -1 的距离, 所以

$$|AB|=|AF|+|BF|=y_1+y_2+2=\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+2=\lambda+\frac{1}{\lambda}+2=(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2.$$

$$\text{于是 } S=\frac{1}{2}|AB||FM|=\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}})^3,$$

由 $\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\geq 2$ 知 $S\geq 4$, 且当 $\lambda=1$ 时, S 取得最小值 4.

22. (12分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且方程 $x^2 - a_n x - a_n = 0$ 有一根为 $S_n - 1$, $n=1, 2, 3, \dots$.

(1) 求 a_1, a_2 ;

(2) 猜想数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并给出严格的证明.

【分析】(1) 验证当 $n=1$ 时, $x^2 - a_1 x - a_1 = 0$ 有一根为 a_1 根据根的定义, 可求得 a_1 , 同理, 当 $n=2$ 时, 也可求得 a_2 ;

(2) 用数学归纳法证明数列问题时分为两个步骤, 第一步, 先证明当 $n=1$ 时, 已知结论成立, 第二步, 先假设 $n=k$ 时结论成立, 利用此假设结合题设条件证明当 $n=k+1$ 时, 结论也成立即可.

【解答】解: (1) 当 $n=1$ 时, $x^2 - a_1 x - a_1 = 0$ 有一根为 $S_1 - 1 = a_1 - 1$,

$$\text{于是 } (a_1 - 1)^2 - a_1(a_1 - 1) - a_1 = 0, \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } x^2 - a_2 x - a_2 = 0 \text{ 有一根为 } S_2 - 1 = a_2 - \frac{1}{2},$$

$$\text{于是 } (a_2 - \frac{1}{2})^2 - a_2(a_2 - \frac{1}{2}) - a_2 = 0,$$

$$\text{解得 } a_2 = \frac{1}{6}.$$

(2) 由题设 $(S_n - 1)^2 - a_n(S_n - 1) - a_n = 0$,

$$S_n^2 - 2S_n + 1 - a_n S_n = 0.$$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$,

$$\text{代入上式得 } S_{n-1}S_n - 2S_n + 1 = 0. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由 (1) 得 } S_1 = a_1 = \frac{1}{2}, S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 可得 } S_3 = \frac{3}{4}. \text{ 由此猜想 } S_n = \frac{n}{n+1}, n=1, 2, 3, \dots$$

下面用数学归纳法证明这个结论.

(i) $n=1$ 时已知结论成立.

(ii) 假设 $n=k$ 时结论成立, 即 $S_k = \frac{k}{k+1}$, 当 $n=k+1$ 时, 由①得 $S_{k+1} = \frac{1}{2 - S_k}$, 即 $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$,

故 $n=k+1$ 时结论也成立.

综上, 由 (i)、(ii) 可知 $S_n = \frac{n}{n+1}$ 对所有正整数 n 都成立.