绝密★启用前

2021年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $2\left(z+\overline{z}\right)+3\left(z-\overline{z}\right)=4+6\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $1-2\mathrm{i}$　　　　B. $1+2\mathrm{i}$　　　　C. $1+\mathrm{i}$　　　　D. $1-\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $z=a+b\mathrm{i}$，利用共轭复数的定义以及复数的加减法可得出关于 a、b 的等式，解出这两个未知数的值，即可得出复数 z.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，则 $2\left(z+\overline{z}\right)+3\left(z-\overline{z}\right)=4a+6b\mathrm{i}=4+6\mathrm{i}$，

所以，$\begin{cases}4a=4\\6b=6\end{cases}$，解得 $a=b=1$，因此，$z=1+\mathrm{i}$.

故选：C.

2. 已知集合 $S=\left\{s\middle|s=2n+1,n\in\mathbf{Z}\right\}$，$T=\left\{t\middle|t=4n+1,n\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $S\cap T=$（　　）

A. $\varnothing$　　　　B. S　　　　C. T　　　　D. $\mathbf{Z}$

【答案】C

【解析】

【分析】分析可得 $T\subseteq S$，由此可得出结论.

【详解】任取$t \in T$，则$t = 4n+1 = 2\cdot(2n)+1$，其中$n \in Z$，所以，$t \in S$，故$T \subseteq S$，

因此，$S \cap T = T$.

故选：C.

3. 已知命题$p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$；命题$q: \forall x \in \mathbf{R}$，$e^{|x|} \geq 1$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A. $p \wedge q$　　B. $\neg p \wedge q$　　C. $p \wedge \neg q$　　D. $\neg(p \vee q)$

【答案】A

【解析】

【分析】由正弦函数的有界性确定命题p的真假性，由指数函数的知识确定命题q的真假性，由此确定正确选项.

【详解】由于$\sin 0 = 0$，所以命题p为真命题；

由于$y = e^x$在R上为增函数，$|x| \geq 0$，所以$e^{|x|} \geq e^0 = 1$，所以命题q为真命题；

所以$p \wedge q$为真命题，$\neg p \wedge q$、$p \wedge \neg q$、$\neg(p \vee q)$为假命题.

故选：A.

4. 设函数$f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$　　C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

【答案】B

【解析】

【分析】分别求出选项的函数解析式，再利用奇函数的定义即可.

【详解】由题意可得$f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x}$，

对于A，$f(x-1)-1 = \dfrac{2}{x} - 2$不是奇函数；

对于B，$f(x-1)+1 = \dfrac{2}{x}$是奇函数；

对于C，$f(x+1)-1 = \dfrac{2}{x+2} - 2$，定义域不关于原点对称，不是奇函数；

对于 D，$f\left(x+1\right)+1=\frac{2}{x+2}$，定义域不关于原点对称，不是奇函数.

故选：B

【点睛】本题主要考查奇函数定义，考查学生对概念的理解，是一道容易题.

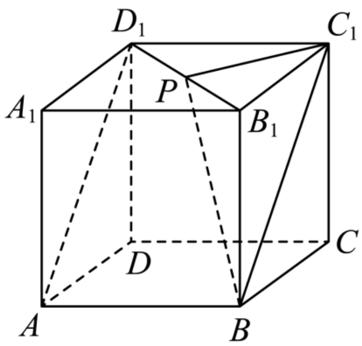
5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】平移直线 AD_1 至 BC_1，将直线 PB 与 AD_1 所成的角转化为 PB 与 BC_1 所成的角，解三角形即可.

【详解】


如图，连接 BC_1,PC_1,PB，因为 $AD_1 /\!/ BC_1$，

所以 $\angle PBC_1$ 或其补角为直线 PB 与 AD_1 所成的角，

因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $BB_1\perp PC_1$，又 $PC_1\perp B_1D_1$，$BB_1\cap B_1D_1=B_1$，

所以 $PC_1\perp$ 平面 PBB_1，所以 $PC_1\perp PB$，

设正方体棱长为 2，则 $BC_1=2\sqrt{2},PC_1=\frac{1}{2}D_1B_1=\sqrt{2}$，

$\sin\angle PBC_1=\frac{PC_1}{BC_1}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle PBC_1=\frac{\pi}{6}$.

故选：D

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）

A. 60 种　　B. 120 种　　C. 240 种　　D. 480 种

【答案】C

【解析】

【分析】先确定有一个项目中分配 2 名志愿者，其余各项目中分配 1 名志愿者，然后利用组合，排列，乘法原理求得.

【详解】根据题意，有一个项目中分配 2 名志愿者，其余各项目中分配 1 名志愿者，可以先从 5 名志愿者中任选 2 人，组成一个小组，有 C_5^2 种选法；然后连同其余三人，看成四个元素，四个项目看成四个不同的位置，四个不同的元素在四个不同的位置的排列方法数有 4！种，根据乘法原理，完成这件事，共有 $C_5^2\times 4!=240$ 种不同的分配方案，

故选：C.

【点睛】本题考查排列组合的应用问题，属基础题，关键是首先确定人数的分配情况，然后利用先选后排思想求解.

7. 把函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，则 $f(x)=$（　　）

A. $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)$　　B. $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】解法一：从函数 $y=f(x)$ 的图象出发，按照已知的变换顺序，逐次变换，得到 $y=f\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$，即得 $f\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，再利用换元思想求得 $y=f(x)$ 的解析表达式；

解法二：从函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 出发，逆向实施各步变换，利用平移伸缩变换法则得到 $y=f(x)$ 的解析表达式.

【详解】解法一：函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，得到 $y=f(2x)$ 的图象，再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，应当得到 $y=f\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ 的图象，

根据已知得到了函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，所以 $f\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

令 $t=2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,则 $x=\frac{t}{2}+\frac{\pi}{3}, x-\frac{\pi}{4}=\frac{t}{2}+\frac{\pi}{12}$，

所以 $f(t)=\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$,所以 $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$；

解法二：由已知的函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 逆向变换，

第一步：向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象，

第二步：图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，得到 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象，

即为 $y=f(x)$ 的图象，所以 $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

故选：B.

8．在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数，则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为（　　）

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{23}{32}$　　C. $\frac{9}{32}$　　D. $\frac{2}{9}$

【答案】B

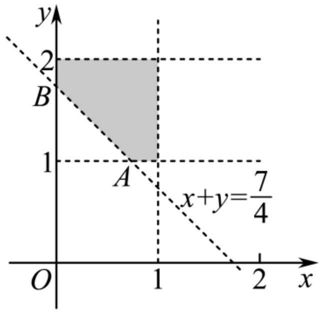
【解析】

【分析】设从区间 $(0,1),(1,2)$ 中随机取出的数分别为 x, y，则实验的所有结果构成区域为

$\Omega=\{(x,y)|0<x<1,1<y<2\}$，设事件 A 表示两数之和大于 $\frac{7}{4}$，则构成的区域为

$A=\left\{(x,y)|0<x<1,1<y\langle 2,x+y\rangle\frac{7}{4}\right\}$，分别求出 Ω, A 对应的区域面积，根据几何概型的的概率公式即可解出.

【详解】如图所示：



设从区间$(0,1),(1,2)$中随机取出的数分别为x,y，则实验的所有结果构成区域为

$\Omega=\{(x,y)|0<x<1,1<y<2\}$，其面积为$S_\Omega=1\times1=1$.

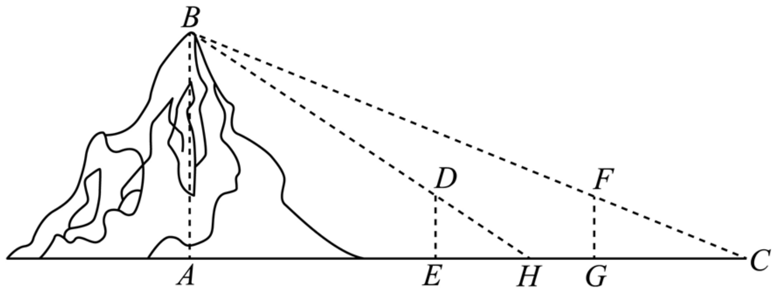
设事件A表示两数之和大于$\frac{7}{4}$，则构成的区域为$A=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,1<y\langle 2,x+y\rangle\frac{7}{4}\right\}$，即图中的阴影

部分，其面积为$S_A=1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{23}{32}$，所以$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{23}{32}$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查利用线性规划解决几何概型中的面积问题，解题关键是准确求出事件Ω,A对应的区域面积，即可顺利解出.

9．魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是有关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高．如图，点E，H，G在水平线AC上，DE和FG是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG称为“表距”，GC和EH都称为“表目距”，GC与EH的差称为“表目距的差”则海岛的高$AB=$（　　）



A. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表高$

B. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}-表高$

C. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表距$

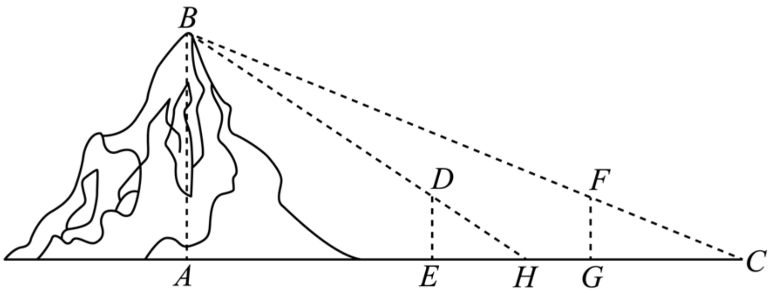
D. $\frac{表高\times表距}{表目距的差}-表距$

【答案】A

【解析】

【分析】利用平面相似的有关知识以及合分比性质即可解出.

【详解】如图所示：



由平面相似可知，$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EH}{AH},\dfrac{FG}{AB}=\dfrac{CG}{AC}$，而 $DE=FG$，所以

$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EH}{AH}=\dfrac{CG}{AC}=\dfrac{CG-EH}{AC-AH}=\dfrac{CG-EH}{CH}$，而 $CH=CE-EH=CG-EH+EG$，

即 $AB=\dfrac{CG-EH+EG}{CG-EH}\times DE=\dfrac{EG\times DE}{CG-EH}+DE=\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}$.

故选：A.

【点睛】本题解题关键是通过相似建立比例式，围绕所求目标进行转化即可解出.

10. 设 $a\neq 0$，若 a 为函数 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^{2}\left(x-b\right)$ 的极大值点，则（　　）

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<a^{2}$　　D. $ab>a^{2}$

【答案】D

【解析】

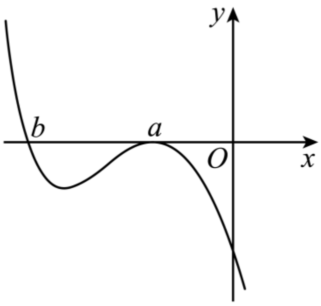
【分析】先考虑函数的零点情况，注意零点左右附近函数值是否变号，结合极大值点的性质，对 a 进行分类讨论，画出 $f\left(x\right)$ 图象，即可得到 a,b 所满足的关系，由此确定正确选项.

【详解】若 $a=b$，则 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^{3}$ 为单调函数，无极值点，不符合题意，故 $a\neq b$.

$\therefore f\left(x\right)$ 有 a 和 b 两个不同零点，且在 $x=a$ 左右附近是不变号，在 $x=b$ 左右附近是变号的. 依题意，a 为

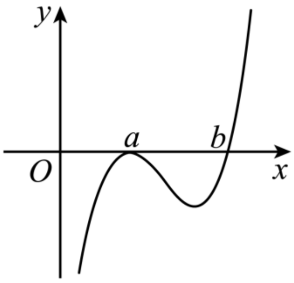
函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，$\therefore$ 在 $x=a$ 左右附近都是小于零的.

当 $a<0$ 时，由 $x>b$，$f(x)\le 0$，画出 $f(x)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b<a$，$a<0$，故 $ab>a^2$.

当 $a>0$ 时，由 $x>b$ 时，$f(x)>0$，画出 $f(x)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b>a$，$a>0$，故 $ab>a^2$.

综上所述，$ab>a^2$ 成立.

故选：D

【点睛】本小题主要考查三次函数的图象与性质，利用数形结合的数学思想方法可以快速解答.

11. 设 B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB|\le 2b$，则 C 的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $P\left(x_0, y_0\right)$，由 $B(0,b)$，根据两点间的距离公式表示出 $|PB|$，分类讨论求出 $|PB|$ 的最大值，再构建齐次不等式，解出即可.

【详解】设 $P\left(x_0, y_0\right)$，由 $B(0,b)$，因为 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$，所以

$$|PB|^2=x_0^2+\left(y_0-b\right)^2=a^2\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\left(y_0-b\right)^2=-\frac{c^2}{b^2}\left(y_0+\frac{b^3}{c^2}\right)^2+\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2,$$

因为 $-b \le y_0 \le b$，当 $-\frac{b^3}{c^2} \le -b$，即 $b^2 \ge c^2$ 时，$|PB|_{\max}^2=4b^2$，即 $|PB|_{\max}=2b$，符合题意，由 $b^2 \ge c^2$ 可得 $a^2 \ge 2c^2$，即 $0<e \le \frac{\sqrt{2}}{2}$；

当 $-\frac{b^3}{c^2}>-b$，即 $b^2<c^2$ 时，$|PB|_{\max}^2=\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2$，即 $\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2 \le 4b^2$，化简得，$\left(c^2-b^2\right)^2 \le 0$，显然该不等式不成立.

故选：C.

【点睛】本题解题关键是如何求出 $|PB|$ 的最大值，利用二次函数求指定区间上的最值，要根据定义域讨论函数的单调性从而确定最值.

12. 设 $a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$．则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

【答案】B

【解析】

【分析】利用对数的运算和对数函数的单调性不难对 a,b 的大小作出判定，对于 a 与 c，b 与 c 的大小关

系，将 0.01 换成 x,分别构造函数 $f\left(x\right)=2\ln\left(1+x\right)-\sqrt{1+4x}+1$, $g\left(x\right)=\ln\left(1+2x\right)-\sqrt{1+4x}+1$，利用导数分析其在 0 的右侧包括 0.01 的较小范围内的单调性，结合 $f(0)=0,g(0)=0$ 即可得出 a 与 c，b 与 c 的大小关系.

【详解】[方法一]：

$a=2\ln1.01=\ln1.01^2=\ln\left(1+0.01\right)^2=\ln\left(1+2\times0.01+0.01^2\right)>\ln1.02=b$，

所以$b<a$；

下面比较c与a,b的大小关系.

记 $f\left(x\right)=2\ln\left(1+x\right)-\sqrt{1+4x}+1$，则 $f\left(0\right)=0$，$f'\left(x\right)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2\left(\sqrt{1+4x}-1-x\right)}{\left(1+x\right)\sqrt{1+4x}}$，

由于$1+4x-\left(1+x\right)^2=2x-x^2=x\left(2-x\right)$

所以当 $0<x<2$ 时，$1+4x-\left(1+x\right)^2>0$，即$\sqrt{1+4x}>\left(1+x\right)$，$f'\left(x\right)>0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left[0,2\right]$上单调递增，

所以$f\left(0.01\right)>f\left(0\right)=0$，即$2\ln1.01>\sqrt{1.04}-1$，即$a>c$；

令$g\left(x\right)=\ln\left(1+2x\right)-\sqrt{1+4x}+1$，则$g\left(0\right)=0$，$g'\left(x\right)=\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2\left(\sqrt{1+4x}-1-2x\right)}{\left(1+x\right)\sqrt{1+4x}}$，

由于$1+4x-\left(1+2x\right)^2=-4x^2$，在 $x>0$ 时，$1+4x-\left(1+2x\right)^2<0$，

所以$g'\left(x\right)<0$，即函数$g\left(x\right)$在$[0，+\infty)$上单调递减，所以$g\left(0.01\right)<g\left(0\right)=0$，即$\ln1.02<\sqrt{1.04}-1$，即 $b<c$；

综上，$b<c<a$，

故选：B.

[方法二]：

令$f\left(x\right)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)-x-1(x>1)$

$f'\left(x\right)=-\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2+1}<0$，即函数$f(x)$在（1，$+\infty$)上单调递减

$f\left(\sqrt{1+0.04}\right)<f\left(1\right)=0,\therefore b<c$

令 $g\left(x\right)=2\ln\left(\dfrac{x^2+3}{4}\right)-x+1(1<x<3)$

$g'\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)\left(3-x\right)}{x^2+3}>0$，即函数 $g(x)$ 在（1，3)上单调递增

$g\left(\sqrt{1+0.04}\right)\rangle g\left(1\right)=0,\therefore a\rangle c$

综上，$b<c<a$，

故选：B.

【点睛】本题考查比较大小问题，难度较大，关键难点是将各个值中的共同的量用变量替换，构造函数，利用导数研究相应函数的单调性，进而比较大小，这样的问题，凭借近似估计计算往往是无法解决的.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$，则 C 的焦距为_______.

【答案】4

【解析】

【分析】将渐近线方程化成斜截式，得出 a,b 的关系，再结合双曲线中 a^2,b^2 对应关系，联立求解 m，再由关系式求得 c，即可求解.

【详解】由渐近线方程 $\sqrt{3}x+my=0$ 化简得 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}x$，即 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{m}$，同时平方得 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{m^2}$，又双曲线中 $a^2=m,b^2=1$，故 $\dfrac{3}{m^2}=\dfrac{1}{m}$，解得 $m=3,m=0$（舍去），$c^2=a^2+b^2=3+1=4\Rightarrow c=2$，故焦距 $2c=4$.

故答案为：4.

【点睛】本题为基础题，考查由渐近线求解双曲线中参数，焦距，正确计算并联立关系式求解是关键.

14. 已知向量 $\vec{a}=\left(1,3\right),\vec{b}=\left(3,4\right)$，若 $(\vec{a}-\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\lambda=$________.

【答案】$\dfrac{3}{5}$

【解析】

【分析】根据平面向量数量积的坐标表示以及向量的线性运算列出方程，即可解出.

【详解】因为 $\vec{a}-\lambda\vec{b}=\left(1,3\right)-\lambda\left(3,4\right)=\left(1-3\lambda,3-4\lambda\right)$，所以由 $\left(\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)\perp\vec{b}$ 可得，

$3(1-3\lambda)+4(3-4\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{3}{5}$.

故答案为：$\dfrac{3}{5}$.

【点睛】本题解题关键是熟记平面向量数量积的坐标表示，设 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$，注意与平面向量平行的坐标表示区分.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，面积为 $\sqrt{3}$，$B=60°$，$a^2+c^2=3ac$，则 $b=$ ______.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由三角形面积公式可得 $ac=4$，再结合余弦定理即可得解.

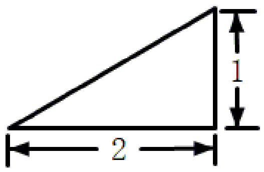
【详解】由题意，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，

所以 $ac=4,a^2+c^2=12$，

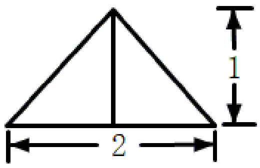
所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=12-2\times4\times\dfrac{1}{2}=8$，解得 $b=2\sqrt{2}$（负值舍去）.

故答案为：$2\sqrt{2}$.

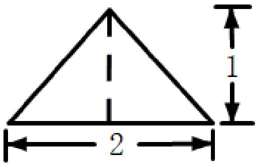
16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为________（写出符合要求的一组答案即可）.



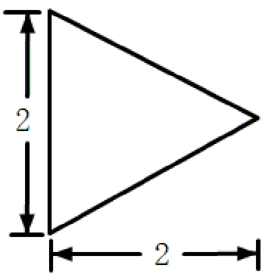
图①



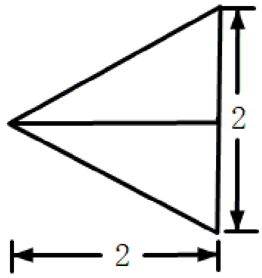
图②



图③



图④



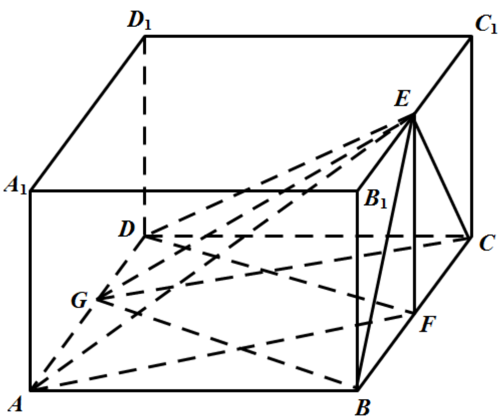
图⑤

【答案】③④（或②⑤，答案不唯一）

【解析】

【分析】由题意结合所给的图形确定一组三视图的组合即可.

【详解】选择侧视图为③，俯视图为④，



如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2, BB_1=1$，

E,F 分别为棱 B_1C_1, BC 的中点，

则正视图①，侧视图③，俯视图④对应的几何体为三棱锥 $E-ADF$；

则正视图①，侧视图②，俯视图⑤对应的几何体为三棱锥 $E-CBG$；

故答案为：③④或②⑤.

【点睛】三视图问题解决的关键之处是由三视图确定直观图的形状以及直观图中线面的位置关系和数量关系.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为$\overline{x}$和$\overline{y}$，样本方差分别记为s_1^2和s_2^2.

（1）求$\overline{x}$，$\overline{y}$，s_1^2，s_2^2；

（2）判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果$\overline{y}-\overline{x}\geq 2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）.

【答案】（1）$\overline{x}=10,\overline{y}=10.3,s_1^2=0.036,s_2^2=0.04$；（2）新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

【解析】

【分析】（1）根据平均数和方差的计算方法，计算出平均数和方差.

（2）根据题目所给判断依据，结合（1）的结论进行判断.

【详解】（1）$\overline{x}=\frac{9.8+10.3+10+10.2+9.9+9.8+10+10.1+10.2+9.7}{10}=10$，

$\overline{y}=\frac{10.1+10.4+10.1+10+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5}{10}=10.3$，

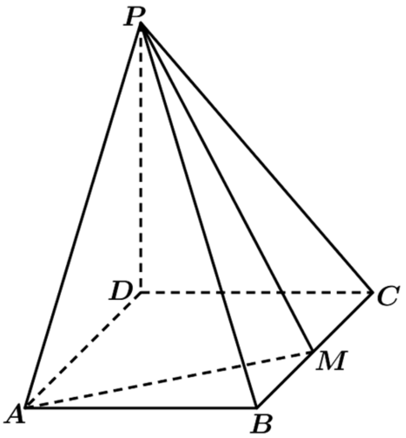
$s_1^2=\frac{0.2^2+0.3^2+0+0.2^2+0.1^2+0.2^2+0+0.1^2+0.2^2+0.3^2}{10}=0.036$，

$s_2^2=\frac{0.2^2+0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.2^2+0+0.3^2+0.2^2+0.1^2+0.2^2}{10}=0.04$.

（2）依题意，$\overline{y}-\overline{x}=0.3=2\times0.15=2\sqrt{0.15^2}=2\sqrt{0.0225}$，$2\sqrt{\dfrac{0.036+0.04}{10}}=2\sqrt{0.0076}$，

$\overline{y}-\overline{x}\geq2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

18．如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，$PD=DC=1$，M为BC的中点，且$PB\perp AM$．



（1）求BC；

（2）求二面角$A-PM-B$的正弦值.

【答案】（1）$\sqrt{2}$；（2）$\dfrac{\sqrt{70}}{14}$

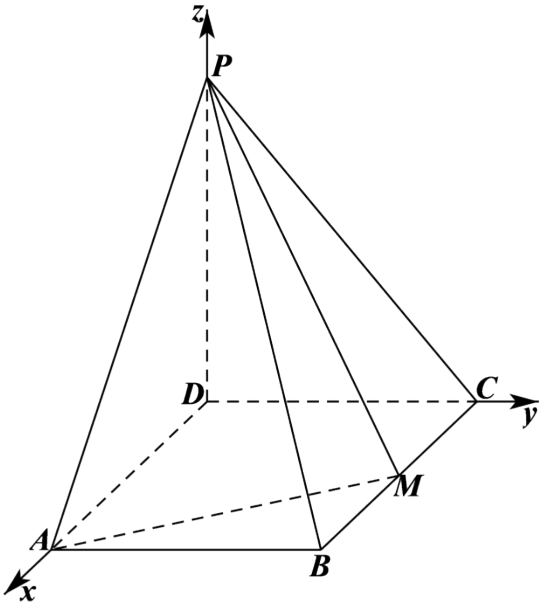
【解析】

【分析】（1）以点D为坐标原点，DA、DC、DP所在直线分别为x、y、z轴建立空间直角坐标系，设$BC=2a$，由已知条件得出$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$，求出$a$的值，即可得出$BC$的长；

（2）求出平面PAM、PBM的法向量，利用空间向量法结合同角三角函数的基本关系可求得结果.

【详解】（1）**[方法一]：空间坐标系+空间向量法**

$\because PD \perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为矩形，不妨以点 D 为坐标原点，DA、DC、DP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，



设 $BC=2a$，则 $D(0,0,0)$、$P(0,0,1)$、$B(2a,1,0)$、$M(a,1,0)$、$A(2a,0,0)$，

则 $\overrightarrow{PB}=(2a,1,-1)$，$\overrightarrow{AM}=(-a,1,0)$，

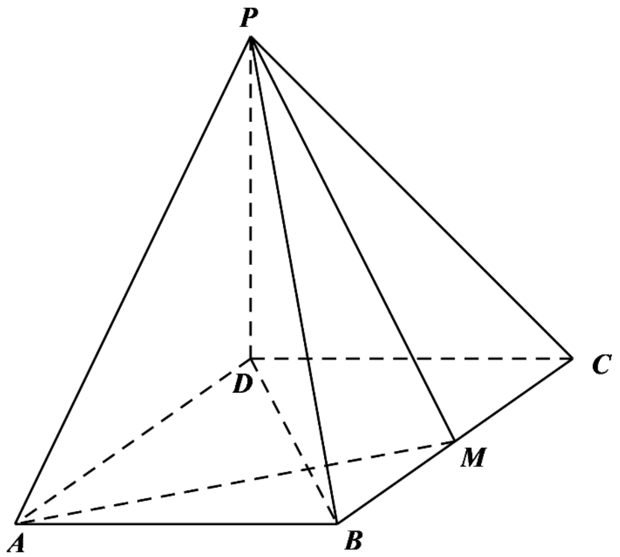
$\because PB \perp AM$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=-2a^2+1=0$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $BC=2a=\sqrt{2}$；

[方法二]【最优解】：几何法+相似三角形法

如图，连结 BD．因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，且 $AM \subset$ 底面 $ABCD$，所以 $PD \perp AM$．

又因为 $PB \perp AM$，$PB \cap PD = P$，所以 $AM \perp$ 平面 PBD．

又 $BD \subset$ 平面 PBD，所以 $AM \perp BD$．



从而 $\angle ADB+\angle DAM=90^\circ$．

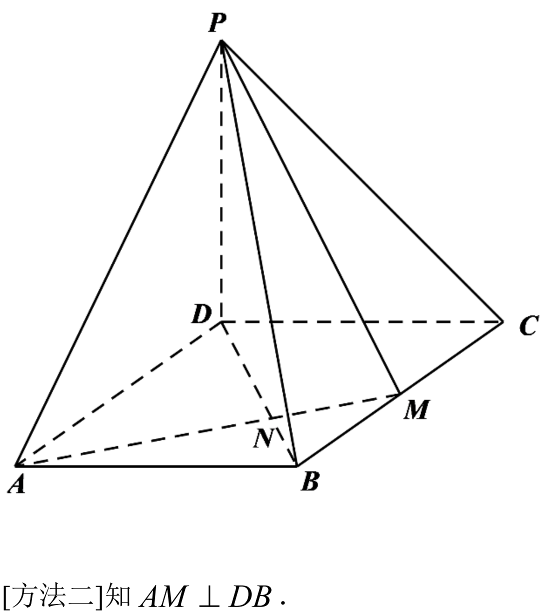
因为 $\angle MAB+\angle DAM=90^\circ$，所以 $\angle MAB=\angle ADB$．

所以 $\triangle ADB \backsim \triangle BAM$，于是 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BA}{BM}$．

所以 $\dfrac{1}{2}BC^2=1$．所以 $BC=\sqrt{2}$．

[方法三]：几何法+三角形面积法

如图，联结 BD 交 AM 于点 N.



由[方法二]知 $AM\perp DB$．

在矩形 $ABCD$ 中，有 $\triangle DAN \backsim \triangle BMN$，所以 $\dfrac{AN}{MN}=\dfrac{DA}{BM}=2$，即 $AN=\dfrac{2}{3}AM$．

令 $BC=2t(t>0)$，因为 M 为 BC 的中点，则 $BM=t$， $DB=\sqrt{4t^2+1}$， $AM=\sqrt{t^2+1}$.

由 $S_{\vartriangle DAB}=\frac{1}{2}DA\cdot AB=\frac{1}{2}DB\cdot AN$，得 $t=\frac{1}{2}\sqrt{4t^2+1}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^2+1}$，解得 $t^2=\frac{1}{2}$，所以 $BC=2t=\sqrt{2}$.

（2）**[方法一]【最优解】：空间坐标系+空间向量法**

设平面 PAM 的法向量为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$， $\overrightarrow{AP}=\left(-\sqrt{2},0,1\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-\sqrt{2}x_1+z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=\sqrt{2}$，可得 $\vec{m}=\left(\sqrt{2},1,2\right)$，

设平面 PBM 的法向量为 $\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$， $\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$， $\overrightarrow{BP}=\left(-\sqrt{2},-1,1\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{2}x_2-y_2+z_2=0\end{cases}$，取 $y_2=1$，可得 $\vec{n}=\left(0,1,1\right)$，

$\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{3}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$，

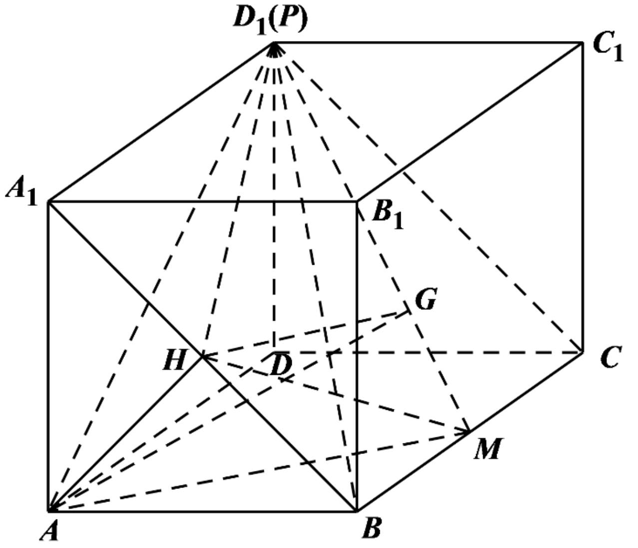
所以，$\sin\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\sqrt{1-\cos^2\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle}=\frac{\sqrt{70}}{14}$，

因此，二面角 $A-PM-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{14}$.

[方法二]：构造长方体法+等体积法

如图，构造长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，联结 AB_1,A_1B，交点记为 H，由于 $AB_1\perp A_1B$， $AB_1\perp BC$，

所以 $AH\perp$ 平面 A_1BCD_1． 过 H 作 D_1M 的垂线，垂足记为 G.



联结 AG，由三垂线定理可知 $AG \perp D_1M$，

故 $\angle AGH$ 为二面角 $A-PM-B$ 的平面角.

易证四边形 A_1BCD_1 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，联结 D_1H，HM.

$S_{\triangle D_1HM}=\frac{1}{2}D_1M\cdot HG, S_{\triangle D_1HM}=S_{\text{正方形}A_1BCD_1}-S_{\triangle D_1A_1H}-S_{\triangle HBM}-S_{\triangle MCD_1}$，

由等积法解得 $HG=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

在 $Rt\triangle AHG$ 中，$AH=\frac{\sqrt{2}}{2}, HG=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，由勾股定理求得 $AG=\frac{\sqrt{35}}{5}$.

所以，$\sin\angle AGH=\frac{AH}{AG}=\frac{\sqrt{70}}{14}$，即二面角 $A-PM-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{14}$.

【整体点评】(1) 方法一利用空坐标系和空间向量的坐标运算求解；方法二利用线面垂直的判定定理，结合三角形相似进行计算求解，运算简洁，为最优解；方法三主要是在几何证明的基础上，利用三角形等面积方法求得.

(2) 方法一，利用空间坐标系和空间向量方法计算求解二面角问题是常用的方法，思路清晰，运算简洁，为最优解；方法二采用构造长方体方法+等体积转化法，技巧性较强，需注意进行严格的论证.

19. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

(1) 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】（1）证明见解析；（2）$a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2},n=1\\-\dfrac{1}{n(n+1)},n\geq 2\end{cases}$.

【解析】

【分析】（1）由已知$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$得$S_n=\dfrac{2b_n}{2b_n-1}$,且$b_n\neq 0$，取$n=1$,得$b_1=\dfrac{3}{2}$,由题意得

$\dfrac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\dfrac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\dfrac{2b_n}{2b_n-1}=b_n$,消积得到项的递推关系$\dfrac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$,进而证明数列$\{b_n\}$是等差数列;

（2）由（1）可得b_n的表达式，由此得到S_n的表达式，然后利用和与项的关系求得

$a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2},n=1\\-\dfrac{1}{n(n+1)},n\geq 2\end{cases}$.

【详解】（1）[方法一]：

由已知$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$得$S_n=\dfrac{2b_n}{2b_n-1}$,且$b_n\neq 0$，$b_n\neq\dfrac{1}{2}$,

取$n=1$,由$S_1=b_1$得$b_1=\dfrac{3}{2}$,

由于b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积,

所以$\dfrac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\dfrac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\dfrac{2b_n}{2b_n-1}=b_n$,

所以$\dfrac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\dfrac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\dfrac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=b_{n+1}$,

所以$\dfrac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$,

由于$b_{n+1}\neq 0$

所以$\dfrac{2}{2b_{n+1}-1}=\dfrac{1}{b_n}$，即$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}$,其中$n\in\mathbf{N}^*$

所以数列$\{b_n\}$是以$b_1=\dfrac{3}{2}$为首项，以$d=\dfrac{1}{2}$为公差等差数列;

[方法二]【最优解】:

由已知条件知 $b_n=S_1\cdot S_2\cdot S_3\cdot\cdots\cdot S_{n-1}\cdot S_n$　　①

于是 $b_{n-1}=S_1\cdot S_2\cdot S_3\cdot\cdots\cdot S_{n-1}(n\geq 2)$.　　②

由①②得 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=S_n$.　　③

又 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$,　　④

由③④得 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$.

令 $n=1$，由 $S_1=b_1$，得 $b_1=\frac{3}{2}$.

所以数列 $\left\{b_n\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

[方法三]：

由 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$，得 $b_n=\frac{S_n}{2S_n-2}$，且 $S_n\neq 0$，$b_n\neq 0$，$S_n\neq 1$.

又因为 $b_n=S_n\cdot S_{n-1}\cdots\cdots S_1=S_n\cdot b_{n-1}$，所以 $b_{n-1}=\frac{b_n}{S_n}=\frac{1}{2S_n-2}$，所以

$$b_n-b_{n-1}=\frac{S_n}{2S_n-2}-\frac{1}{2S_n-2}=\frac{S_n-1}{2\left(S_n-1\right)}=\frac{1}{2}(n\geq 2).$$

在 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 中，当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=\frac{3}{2}$.

故数列 $\left\{b_n\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

[方法四]：数学归纳法

由已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$，得 $S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}$，$b_1=\frac{3}{2}$，$b_2=2$，$b_3=\frac{5}{2}$，猜想数列 $\left\{b_n\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，且 $b_n=\frac{1}{2}n+1$.

下面用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时显然成立.

假设当 $n=k$ 时成立，即 $b_k=\frac{1}{2}k+1, S_k=\frac{k+2}{k+1}$.

那么当 $n=k+1$ 时，$b_{k+1}=b_kS_{k+1}=\left(\frac{1}{2}k+1\right)\cdot\frac{k+3}{k+2}=\frac{k+3}{2}=\frac{1}{2}(k+1)+1$.

综上，猜想对任意的$n\in\mathbf{N}$都成立．

即数列$\left\{b_n\right\}$是以$\dfrac{3}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列．

（2）

由（1）可得，数列$\left\{b_n\right\}$是以$b_1=\dfrac{3}{2}$为首项，以$d=\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列，

$\therefore b_n=\dfrac{3}{2}+\left(n-1\right)\times\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{n}{2}$，

$S_n=\dfrac{2b_n}{2b_n-1}=\dfrac{2+n}{1+n}$，

当n=1时，$a_1=S_1=\dfrac{3}{2}$，

当n≥2时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2+n}{1+n}-\dfrac{1+n}{n}=-\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$，显然对于$n$=1不成立，

$$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2},n=1\\-\dfrac{1}{n\left(n+1\right)},n\geq 2\end{cases}.$$

【整体点评】（1）方法一从$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$得$S_n=\dfrac{2b_n}{2b_n-1}$，然后利用$b_n$的定义，得到数列$\left\{b_n\right\}$的递推关系，进而替换相除消项得到相邻两项的关系，从而证得结论；

方法二先从b_n的定义，替换相除得到$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=S_n$，再结合$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$得到$b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{2}$，从而证得结论，为最优解；

方法三由$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$，得$b_n=\dfrac{S_n}{2S_n-2}$，由$b_n$的定义得$b_{n-1}=\dfrac{b_n}{S_n}=\dfrac{1}{2S_n-2}$，进而作差证得结论；方法四利用归纳猜想得到数列$b_n=\dfrac{1}{2}n+1$，然后利用数学归纳法证得结论．

（2）由（1）的结论得到$b_n=\dfrac{1}{2}n+1$，求得S_n的表达式，然后利用和与项的关系求得$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

20. 设函数$f\left(x\right)=\ln\left(a-x\right)$，已知$x=0$是函数$y=xf\left(x\right)$的极值点．

（1）求 a；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$．证明: $g\left(x\right)<1$．

【答案】（1）$a=1$；（2）证明见详解

【解析】

【分析】（1）由题意求出 y'，由极值点处导数为 0 即可求解出参数 a；

（2）由（1）得 $g(x)=\dfrac{x+\ln\left(1-x\right)}{x\ln\left(1-x\right)}$，$x<1$ 且 $x\neq 0$，分类讨论 $x\in\left(0,1\right)$ 和 $x\in\left(-\infty,0\right)$，可等价转化为要证 $g\left(x\right)<1$，即证 $x+\ln\left(1-x\right)>x\ln\left(1-x\right)$ 在 $x\in\left(0,1\right)$ 和 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 上恒成立，结合导数和换元法即可求解

【详解】（1）由 $f\left(x\right)=\ln\left(a-x\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x-a}$，$y=xf\left(x\right)\Rightarrow y'=\ln\left(a-x\right)+\dfrac{x}{x-a}$，

又 $x=0$ 是函数 $y=xf\left(x\right)$ 的极值点，所以 $y'\left(0\right)=\ln a=0$，解得 $a=1$；

（2）**[方法一]：转化为有分母的函数**

由（Ⅰ）知，$g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}=\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\dfrac{1}{x}$，其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$．

要证 $g(x)<1$，即证 $\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\dfrac{1}{x}<1$，即证 $\dfrac{1}{\ln(1-x)}<1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$．

（ⅰ）当 $x\in(0,1)$ 时，$\dfrac{1}{\ln(1-x)}<0$，$\dfrac{x-1}{x}<0$，即证 $\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}$．令 $F(x)=\ln(1-x)-\dfrac{x}{x-1}$，因为 $F'(x)=\dfrac{-1}{1-x}-\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x}{(x-1)^2}>0$，所以 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内为增函数，所以 $F(x)>F(0)=0$．

（ⅱ）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\dfrac{1}{\ln(1-x)}>0$，$\dfrac{x-1}{x}>0$，即证 $\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}$，由（ⅰ）分析知 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内为减函数，所以 $F(x)>F(0)=0$．

综合（ⅰ）（ⅱ）有 $g(x)<1$．

[方法二] 【最优解】：转化为无分母函数

由（1）得 $f\left(x\right)=\ln\left(1-x\right)$，$g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}=\dfrac{x+\ln\left(1-x\right)}{x\ln\left(1-x\right)}$，$x<1$ 且 $x\neq 0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，要证 $g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$，$\because x>0,\ln(1-x)<0$，$\therefore x\ln(1-x)<0$，即证

$x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$，化简得 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$；

同理，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，要证 $g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$，$\because x<0,\ln(1-x)>0$，$\therefore x\ln(1-x)<0$，即证

$x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$，化简得 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$；

令 $h(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$，再令 $t=1-x$，则 $t\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，$x=1-t$，

令 $\varphi(t)=1-t+t\ln t$，$\varphi'(t)=-1+\ln t+1=\ln t$，

当 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单减，故 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单增，故 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$；

综上所述，$g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$ 在 $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$ 恒成立.

[方法三]：利用导数不等式中的常见结论证明

令 $\varphi(x)=\ln x-(x-1)$，因为 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内是增函数，在区间 $(1,+\infty)$ 内是减函数，所以 $\varphi(x)\le\varphi(1)=0$，即 $\ln x\le x-1$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）. 故当 $x<1$ 且 $x\neq0$ 时，

$\dfrac{1}{1-x}>0$ 且 $\dfrac{1}{1-x}\neq1$，$\ln\dfrac{1}{1-x}<\dfrac{1}{1-x}-1$，即 $-\ln(1-x)<\dfrac{x}{1-x}$，所以 $\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}$.

（i）当 $x\in(0,1)$ 时，$0>\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}$，所以 $\dfrac{1}{\ln(1-x)}<\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$，即 $\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\dfrac{1}{x}<1$，所以

$g(x)<1$.

（ii）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}>0$，同理可证得 $g(x)<1$.

综合（i）（ii）得，当 $x<1$ 且 $x\neq0$ 时，$\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$，即 $g(x)<1$.

【整体点评】(2) 方法一利用不等式的性质分类转化分式不等式：当 $x\in(0,1)$ 时，转化为证明

$\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，转化为证明 $\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}$，然后构造函数，利用导数研究单调

性，进而证得；方法二利用不等式的性质分类讨论分别转化为整式不等式：当$x\in(0,1)$时，$x+(1-x)\ln(1-x)>0$成立和当$x\in(-\infty,0)$时，$x+(1-x)\ln(1-x)>0$成立，然后换元构造，利用导数研究单调性进而证得，通性通法，运算简洁，为最优解；方法三先构造函数$\varphi(x)=\ln x-(x-1)$，利用导数分析单调性，证得常见常用结论$\ln x\le x-1$（当且仅当$x=1$时取等号）．然后换元得到$\ln(1-x)>\dfrac{x}{x-1}$，分类讨论，利用不等式的基本性质证得要证得不等式，有一定的巧合性.

21. 已知抛物线$C:x^2=2py\left(p>0\right)$的焦点为$F$，且$F$与圆$M:x^2+(y+4)^2=1$上点的距离的最小值为$4$.

（1）求p；

（2）若点P在M上，PA,PB是C的两条切线，A,B是切点，求$\triangle PAB$面积的最大值.

【答案】（1）$p=2$；（2）$20\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】（1）根据圆的几何性质可得出关于p的等式，即可解出p的值；

（2）设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(x_0,y_0)$，利用导数求出直线PA、PB，进一步可求得直线AB的方程，将直线AB的方程与抛物线的方程联立，求出$|AB|$以及点P到直线AB的距离，利用三角形的面积公式结合二次函数的基本性质可求得$\triangle PAB$面积的最大值.

【详解】（1）**[方法一]：利用二次函数性质求最小值**

由题意知，$F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，设圆$M$上的点$N(x_0,y_0)$，则$x_0^2+(y_0+4)^2=1$.

所以$x_0^2=1-(y_0+4)^2\ (-5\le y_0\le -3)$.

从而有$|FN|=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{p}{2}-y_0\right)^2}=\sqrt{1-(y_0+4)^2+\left(\dfrac{p}{2}-y_0\right)^2}=\sqrt{-(p+8)y_0-15+\dfrac{p^2}{4}}$.

因为$-5\le y_0\le -3$，所以当$y_0=-3$时，$|FN|_{\min}=\sqrt{\dfrac{p^2}{4}+3p+9}=4$.

又 $p>0$，解之得 $p=2$，因此 $p=2$.

[方法二]【最优解】：利用圆的几何意义求最小值

抛物线 C 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$|FM|=\frac{p}{2}+4$，

所以，F 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 $\frac{p}{2}+4-1=4$，解得 $p=2$；

（2）[方法一]：切点弦方程+韦达定义判别式求弦长求面积法

抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，即 $y=\frac{x^2}{4}$，对该函数求导得 $y'=\frac{x}{2}$，

设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(x_0,y_0)$，

直线 PA 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1x}{2}-y_1$，即 $x_1x-2y_1-2y=0$，

同理可知，直线 PB 的方程为 $x_2x-2y_2-2y=0$，

由于点 P 为这两条直线的公共点，则 $\begin{cases}x_1x_0-2y_1-2y_0=0\\x_2x_0-2y_2-2y_0=0\end{cases}$，

所以，点 A、B 的坐标满足方程 $x_0x-2y-2y_0=0$，

所以，直线 AB 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$，

联立 $\begin{cases}x_0x-2y-2y_0=0\\y=\frac{x^2}{4}\end{cases}$，可得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，

所以，$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}$，

点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，

所以，$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}\cdot\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}=\frac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}$，

$\because x_0^2-4y_0=1-(y_0+4)^2-4y_0=-y_0^2-12y_0-15=-(y_0+6)^2+21$，

由已知可得 $-5 \le y_0 \le -3$，所以，当 $y_0 = -5$ 时，$\triangle PAB$ 的面积取最大值 $\frac{1}{2} \times 20^{\frac{3}{2}} = 20\sqrt{5}$.

[方法二]【最优解】：切点弦法+分割转化求面积+三角换元求最值

同方法一得到 $x_1 + x_2 = 2x_0, x_1x_2 = 4y_0$.

过 P 作 y 轴的平行线交 AB 于 Q，则 $Q\left(x_0, \frac{x_0^2}{2} - y_0\right)$.

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_0^2 - 2y_0\right) \cdot \sqrt{4x_0^2 - 16y_0} = \frac{1}{2}\left(x_0^2 - 4y_0\right)^{\frac{3}{2}} .$$

P 点在圆 M 上，则 $\begin{cases} x_0 = \cos\alpha, \\ y_0 = -4 + \sin\alpha, \end{cases}$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}\left(x_0^2 - 4y_0\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha - 4\sin\alpha + 16\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left[-(\sin\alpha + 2)^2 + 21\right]^{\frac{3}{2}} .$$

故当 $\sin\alpha = -1$ 时 $\triangle PAB$ 的面积最大，最大值为 $20\sqrt{5}$.

[方法三]：直接设直线 AB 方程法

设切点 A，B 的坐标分别为 $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2, \frac{x_2^2}{4}\right)$.

设 $l_{AB}: y = kx + b$，联立 l_{AB} 和抛物线 C 的方程得 $\begin{cases} y = kx + b, \\ x^2 = 4y, \end{cases}$ 整理得 $x^2 - 4kx - 4b = 0$.

判别式 $\Delta = 16k^2 + 16b > 0$，即 $k^2 + b > 0$，且 $x_1 + x_2 = 4k, x_1x_2 = -4b$.

抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$，即 $y = \frac{x^2}{4}$，有 $y' = \frac{x}{2}$.

则 $l_{PA}: y - \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$，整理得 $y = \frac{x_1}{2} \cdot x - \frac{x_1^2}{4}$，同理可得 $l_{PB}: y = \frac{x_2}{2} \cdot x - \frac{x_2^2}{4}$.

联立方程 $\begin{cases} y = \frac{x_1}{2} \cdot x - \frac{x_1^2}{4}, \\ y = \frac{x_2}{2} \cdot x - \frac{x_2^2}{4}, \end{cases}$ 可得点 P 的坐标为 $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{4}\right)$，即 $P(2k, -b)$.

将点 P 的坐标代入圆 M 的方程，得 $(2k)^2 + (-b + 4)^2 = 1$，整理得 $k^2 = \frac{1 - (b-4)^2}{4}$.

由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{1 + k^2}\,|x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{16k^2 + 16b}$.

点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{\left|2k^{2}+2b\right|}{\sqrt{k^{2}+1}}$.

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\sqrt{16k^{2}+16b}\cdot\left|2k^{2}+2b\right|=4\sqrt{\left(k^{2}+b\right)^{3}}=4\sqrt{\left[\frac{1-(b-4)^{2}}{4}+b\right]^{3}}$

$=4\sqrt{\left(\frac{-b^{2}+12b-15}{4}\right)^{3}}$,

其中 $y_P=-b\in[-5,-3]$ ，即 $b\in[3,5]$.

当 $b=5$ 时，$\left(S_{\triangle PAB}\right)_{\max}=20\sqrt{5}$.

【整体点评】(1) 方法一利用两点间距离公式求得 $|FN|$ 关于圆 M 上的点 $N\left(x_0,y_0\right)$ 的坐标的表达式，进一步转化为关于 y_0 的表达式，利用二次函数的性质得到最小值，进而求得 P 的值；方法二，利用圆的性质， F 与圆 $M: x^{2}+(y+4)^{2}=1$ 上点的距离的最小值，简洁明快，为最优解；(2) 方法一设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$、$P\left(x_0,y_0\right)$，利用导数求得两切线方程，由切点弦方程思想得到直线 AB 的坐标满足方程 $x_0x-2y-2y_0=0$ ，然手与抛物线方程联立，由韦达定理可得 $x_1+x_2=2x_0$ ， $x_1x_2=4y_0$ ，利用弦长公式求得 $|AB|$ 的长，进而得到面积关于 $P\left(x_0,y_0\right)$ 坐标的表达式，利用圆的方程转化得到关于 y_0 的二次函数最值问题；方法二，同方法一得到 $x_1+x_2=2x_0$ ， $x_1x_2=4y_0$ ，过 P 作 y 轴的平行线交 AB 于 Q，则 $Q\left(x_0,\frac{x_0^{2}}{2}-y_0\right)$. 由 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot\left|x_1-x_2\right|$ 求得面积关于 $P\left(x_0,y_0\right)$ 坐标的表达式，并利用三角函数换元求得面积最大值，方法灵活，计算简洁，为最优解；方法三直接设直线 $l_{AB}: y=kx+b$ ，联立直线 AB 和抛物线方程，利用韦达定理判别式得到 $k^{2}+b>0$ ，且 $x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4b$. 利用点 P 在圆 M 上，求得 k,b 的关系，然后利用导数求得两切线方程，解方程组求得 P 的坐标 $P(2k,-b)$ ，进而利用弦长公式和点到直线距离公式求得面积关于 b 的函数表达式，然后利用二次函数的性质求得最大值；

（二）选考题，共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22. 在直角坐标系 xOy 中，$\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$，半径为 1.

（1）写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

（2）过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程．

【答案】（1） $\begin{cases} x=2+\cos\alpha \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）；

（2） $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{5\pi}{6}\right)=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

【解析】

【分析】（1）直接利用圆心及半径可得的圆的参数方程；

（2）先求得过（4，1）的圆的切线方程，再利用极坐标与直角坐标互化公式化简即可．

【详解】（1）由题意，$\odot C$ 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$，

所以 $\odot C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\cos\alpha \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）

（2）[方法一]：**直角坐标系方法**

①当直线的斜率不存在时，直线方程为 $x=4$，此时圆心到直线的距离为 $2>r$，故舍去．

②当切线斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-4)+1$，即 $kx-y-4k+1=0$．

故 $\dfrac{|2k-1-4k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即 $|2k|=\sqrt{1+k^2},4k^2=1+k^2$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

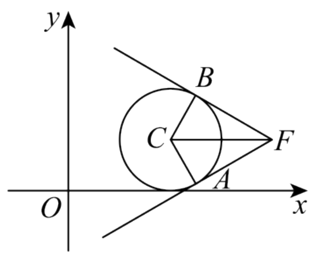
所以切线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$．

两条切线的极坐标方程分别为 $\rho\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\theta-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1$ 和 $\rho\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\theta+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1$．

即 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{5\pi}{6}\right)=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

[方法二]【最优解】：定义求斜率法

如图所示，过点 F 作 $\odot C$ 的两条切线，切点分别为 A，B．



在$\triangle ACF$中，$\tan\angle AFC=\frac{AC}{AF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又$CF\ //\ x$轴，所以两条切线$FA,FB$的斜率分别$\frac{\sqrt{3}}{3}$和$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故切线的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x-4)+1$，这两条切线的极坐标方程为

$\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\theta-\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$和$\rho\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\theta+\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$.

即$\rho\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$和$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【整体点评】(2)

方法一：直角坐标系中直线与圆相切的条件求得切线方程，再转化为极坐标方程，

方法二：直接根据倾斜角求得切线的斜率，得到切线的直角坐标方程，然后转化为极坐标方程,在本题中巧妙的利用已知圆和点的特殊性求解，计算尤其简洁，为最优解.

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23. 已知函数$f(x)=|x-a|+|x+3|$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 6$的解集;

（2）若$f(x)>-a$，求a的取值范围.

【答案】（1）$(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$.（2）$\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

【解析】

【分析】（1）利用绝对值的几何意义求得不等式的解集.

（2）利用绝对值不等式化简$f(x)>-a$，由此求得a的取值范围.

【详解】（1）**[方法一]：绝对值的几何意义法**

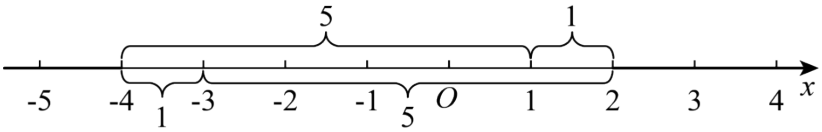
当$a=1$时，$f(x)=|x-1|+|x+3|$，$|x-1|+|x+3|$表示数轴上的点到1和-3的距离之和，

则$f(x)\geq 6$表示数轴上的点到1和-3的距离之和不小于6，

当$x=-4$或$x=2$时所对应的数轴上的点到$1,-3$所对应的点距离之和等于 6，

$\therefore$数轴上到$1,-3$所对应的点距离之和等于大于等于 6 得到所对应的坐标的范围是$x\leq -4$或$x\geq 2$，

所以 $f\left(x\right)\geq 6$ 的解集为 $\left(-\infty,-4\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.



[方法二]【最优解】：零点分段求解法

当 $a=1$ 时，$f(x)=|x-1|+|x+3|$.

当 $x\leq -3$ 时，$(1-x)+(-x-3)\geq 6$，解得 $x\leq -4$；

当 $-3<x<1$ 时，$(1-x)+(x+3)\geq 6$，无解；

当 $x\geq 1$ 时，$(x-1)+(x+3)\geq 6$，解得 $x\geq 2$.

综上，$|x-1|+|x+3|\geq 6$ 的解集为 $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$.

（2）[方法一]：绝对值不等式的性质法求最小值

依题意 $f\left(x\right)>-a$，即 $\left|x-a\right|+\left|x+3\right|>-a$ 恒成立，

$\left|x-a\right|+\left|x+3\right|=\left|a-x\right|+\left|x+3\right|\geq\left|a+3\right|$，

当且仅当 $\left(a-x\right)\left(x+3\right)\geq 0$ 时取等号，

$\therefore f\left(x\right)_{min}=\left|a+3\right|$，

故 $\left|a+3\right|>-a$，

所以 $a+3>-a$ 或 $a+3<a$，

解得 $a>-\dfrac{3}{2}$.

所以 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

[方法二]【最优解】：绝对值的几何意义法求最小值

由 $|x-a|$ 是数轴上数 x 表示的点到数 a 表示的点的距离，得 $f(x)=|x-a|+|x+3|\geq|a+3|$，故

$|a+3|>-a$，下同解法一.

[方法三]：分类讨论+分段函数法

当 $a\leq -3$ 时，

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a-3, x<a,\\ -a-3, a\le x\le -3,\\ 2x-a+3, x>-3,\end{cases}$$

则 $[f(x)]_{\min}=-a-3$，此时 $-a-3>-a$，无解.

当 $a>-3$ 时，

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a-3, x<-3,\\ a+3, -3\le x\le a,\\ 2x-a+3, x>a,\end{cases}$$

则 $[f(x)]_{\min}=a+3$，此时，由 $a+3>-a$ 得，$a>-\dfrac{3}{2}$.

综上，a 的取值范围为 $a>-\dfrac{3}{2}$.

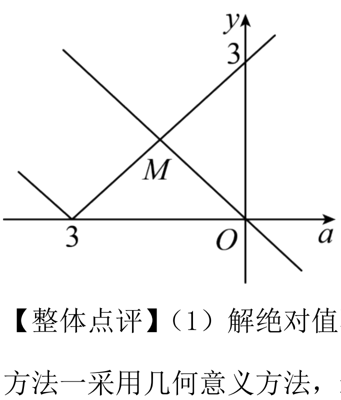
[方法四]：函数图象法解不等式

由方法一求得 $f\left(x\right)_{\min}=\left|a+3\right|$ 后，构造两个函数 $y=|a+3|$ 和 $y=-a$，

即 $y=\begin{cases}-a-3, a<-3,\\ a+3, a\ge -3\end{cases}$ 和 $y=-a$，

如图，两个函数的图像有且仅有一个交点 $M\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，

由图易知 $|a+3|>-a$，则 $a>-\dfrac{3}{2}$.



【整体点评】（1）解绝对值不等式的方法有几何意义法，零点分段法.

方法一采用几何意义方法，适用于绝对值部分的系数为 1 的情况，

方法二使用零点分段求解法，适用于更广泛的情况，为最优解；

（2）方法一，利用绝对值不等式的性质求得 $f\left(x\right)_{min}=\left|a+3\right|$，利用不等式恒成立的意义得到关于 a 的不等式，然后利用绝对值的意义转化求解；

方法二与方法一不同的是利用绝对值的几何意义求得 $f\left(x\right)$ 的最小值，最有简洁快速，为最优解法

方法三利用零点分区间转化为分段函数利用函数单调性求 $f\left(x\right)$ 最小值，要注意函数 $f\left(x\right)$ 中的各绝对值

的零点的大小关系，采用分类讨论方法，使用与更广泛的情况；

方法四与方法一的不同在于得到函数 $f\left(x\right)$ 的最小值后，构造关于 a 的函数，利用数形结合思想求解关于 a 的不等式.