

2004年云南高考理科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. (5分) 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R, y \in R\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. (5分) 函数 $y = |\sin \frac{x}{2}|$ 的最小正周期是()
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π
3. (5分) 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 = -6$, $a_8 = 6$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则()
- A. $S_4 < S_5$ B. $S_4 = S_5$ C. $S_6 < S_5$ D. $S_6 = S_5$
4. (5分) 圆 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程为()
- A. $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ B. $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$ C. $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ D. $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$
5. (5分) 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$ 的定义域是()
- A. $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$ B. $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
C. $[-2, -1) \cup (1, 2]$ D. $(-2, -1) \cup (1, 2)$
6. (5分) 设复数 z 的幅角的主值为 $\frac{2\pi}{3}$, 虚部为 $\sqrt{3}$, 则 $z^2 =$ ()
- A. $-2 - 2\sqrt{3}i$ B. $-2\sqrt{3} - 2i$ C. $2 + 2\sqrt{3}i$ D. $2\sqrt{3} + 2i$
7. (5分) 设双曲线的焦点在 x 轴上, 两条渐近线为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则双曲线的离心率 $e =$ ()
- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{5}{4}$
8. (5分) 不等式 $1 < |x+1| < 3$ 的解集为()
- A. (0,2) B. $(-2, 0) \cup (2, 4)$
C. $(-4, 0)$ D. $(-4, -2) \cup (0, 2)$
9. (5分) 正三棱锥的底面边长为2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为()

- A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

10. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, BC=\sqrt{13}, AC=4$, 则边 AC 上的高为()

- A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

11. (5分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & x < 1 \\ 4-\sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$ 则使得 $f(x) \geq 1$ 的自变量 x 的取值范围为()

- A. $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$ B. $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$
 C. $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$ D. $[-2, 0] \cup [1, 10]$

12. (5分) 将 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名教师, 则不同的分配方案共有()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

13. (4分) 用平面 α 截半径为 R 的球, 如果球心到截面的距离为 $\frac{R}{2}$, 那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为_____.

14. (4分) 函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最小值为_____.

15. (4分) 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 设 $f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, 则 $g(-8) =$

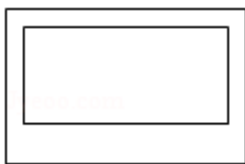
16. (4分) 设 P 是曲线 $y^2 = 4(x-1)$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $(0,1)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值是 _____.

三、解答题 (共 6 小题, 满分 74 分)

17. (12分) 已知 α 为锐角, 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$ 的值.

18. (12分) 解方程 $4^x + |1 - 2^x| = 11$.

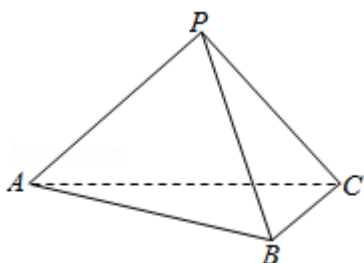
19. (12分) 某村计划建造一个室内面积为 $800m^2$ 的矩形蔬菜温室. 在温室内, 沿左、右两侧与后侧内墙各保留 $1m$ 宽的通道, 沿前侧内墙保留 $3m$ 宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时, 蔬菜的种植面积最大? 最大种植面积是多少?



20. (12分) 三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $PA=PB=PC=3$.

(1) 求证 $AB \perp BC$;

(2) 如果 $AB=BC=2\sqrt{3}$, 求 AC 与侧面 PBC 所成角的大小.



21. (12分) 设椭圆 $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$ 的两个焦点是 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ ($c > 0$), 且椭圆上存在点 P , 使得直线 PF_1 与直线 PF_2 垂直.

(I) 求实数 m 的取值范围.

(II) 设 l 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 l 相交于点 Q . 若 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$, 求直线 PF_2 的方程.

22. (14分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n = 2a_n + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$.

(1) 写出求数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1, a_2, a_3 ;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对任意的整数 $m > 4$, 有 $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$.

2004 年高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R, y \in R\}$, 则集合

$M \cap N$ 中元素的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解答】解：根据题意， $M \cap N = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\} \cap \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R,$

$$y \in R\} = \{(x, y) | \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}\}$$

将 $x^2 - y = 0$ 代入 $x^2 + y^2 = 1$,

得 $y^2 + y - 1 = 0$, $\Delta = 5 > 0$,

所以方程组有两组解,

因此集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 2 个,

故选: B.

2. (5 分) 函数 $y = |\sin \frac{x}{2}|$ 的最小正周期是()

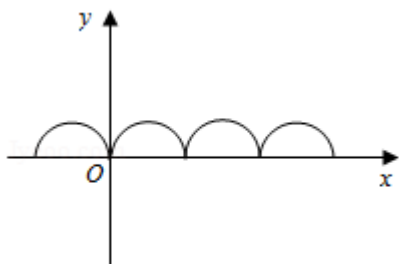
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

【解答】解：对于 $y = \sin \frac{x}{2}$, $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$,

函数 $y = |\sin \frac{x}{2}|$ 是函数 $y = \sin \frac{x}{2}$ 轴上方的图象不动将 x 轴下方的图象向上对折得到的, 如图示, 故

$$T' = \frac{1}{2}T = 2\pi,$$

故选: C.



3. (5分) 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 = -6$, $a_8 = 6$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则()

- A. $S_4 < S_5$ B. $S_4 = S_5$ C. $S_6 < S_5$ D. $S_6 = S_5$

【解答】解: $\because a_2 = -6, a_8 = 6$

$$\therefore a_1 + d = -6, a_1 + 7d = 6$$

$$\text{得 } a_1 = -8, d = 2$$

$$\therefore S_4 = S_5$$

故选: B.

4. (5分) 圆 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程为()

- A. $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ B. $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$ C. $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ D. $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

【解答】解: 法一:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$y = kx - k + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 4x + (kx - k + \sqrt{3})^2 = 0.$$

该二次方程应有两相等实根, 即 $\Delta = 0$, 解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\therefore y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1),$$

$$\text{即 } x - \sqrt{3}y + 2 = 0.$$

法二:

\because 点 $(1, \sqrt{3})$ 在圆 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 上,

\therefore 点 P 为切点, 从而圆心与 P 的连线应与切线垂直.

又 \because 圆心为 $(2, 0)$, $\therefore \frac{0 - \sqrt{3}}{2 - 1} \cdot k = -1$.

$$\text{解得 } k = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

\therefore 切线方程为 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$.

故选: D.

5. (5分) 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$ 的定义域是()

A. $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$

B. $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

C. $[-2, -1) \cup (1, 2]$

D. $(-2, -1) \cup (1, 2)$

【解答】解: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \dots 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 - 1, 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ 或 } x < -1 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$-\sqrt{2} \leq x < -1 \text{ 或 } 1 < x \leq \sqrt{2}.$

$\therefore y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$ 的定义域为 $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

故选: A.

6. (5分) 设复数 z 的幅角的主值为 $\frac{2\pi}{3}$, 虚部为 $\sqrt{3}$, 则 $z^2 = (\quad)$

A. $-2 - 2\sqrt{3}i$

B. $-2\sqrt{3} - 2i$

C. $2 + 2\sqrt{3}i$

D. $2\sqrt{3} + 2i$

【解答】解: \because 复数 z 的幅角的主值为 $\frac{2\pi}{3}$

设复数 $z = r(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}r$

\therefore 虚部为 $\sqrt{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}$

$\therefore r = 2$

$\therefore z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

$\therefore z^2 = 4(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -2 - 2\sqrt{3}i$

故选: A.

7. (5分) 设双曲线的焦点在 x 轴上, 两条渐近线为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则双曲线的离心率 $e = (\quad)$

A. 5

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{5}{4}$

【解答】解: 依题意可知 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, 求得 $a = 2b$

$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}b$

$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

故选: C.

8. (5分) 不等式 $1 < |x+1| < 3$ 的解集为 ()

A. (0,2)

B. $(-2, 0) \cup (2, 4)$

C. $(-4, 0)$

D. $(-4, -2) \cup (0, 2)$

【解答】解: $1 < |x+1| < 3 \Leftrightarrow 1 < |x+1|^2 < 9$

$$\text{即 } \begin{cases} (x+1)^2 > 1 \\ (x+1)^2 < 9 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x < -2 \text{ 或 } x > 0 \\ -4 < x < 2 \end{cases}, \text{ 即 } x \in (-4, -2) \cup (0, 2)$$

$$\text{解法二: } 1 < |x+1| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| > 1 \\ |x+1| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < -1 \text{ 或 } x+1 > 1 \\ -3 < x+1 < 3 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x \in (-4, -2) \cup (0, 2)$$

故选: D.

9. (5分) 正三棱锥的底面边长为2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为()

A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

【解答】解: 由题意正三棱锥的底面边长为2, 侧面均为直角三角形,

可知: 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 三条侧棱两两垂直,

$$\text{所以此三棱锥的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

故选: C.

10. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, BC=\sqrt{13}, AC=4$, 则边AC上的高为()

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $3\sqrt{3}$

【解答】解: 由点B向AC作垂线, 交点为D.

设 $AD=x$, 则 $CD=4-x$,

$$\therefore BD = \sqrt{9-x^2} = \sqrt{13-(4-x)^2}, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore BD = \sqrt{9-x^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

故选: B.

11. (5分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < 1 \\ 4 - \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$ 则使得 $f(x) \leq 1$ 的自变量 x 的取值范围为()

A. $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$ B. $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$ C. $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$

D. $[-2, 0] \cup [1, 10]$

【解答】解： $f(x) \dots 1$ 等价于 $\begin{cases} x < 1 \\ (x+1)^2 \dots 1 \end{cases}$ 解得： $x, -2$ 或 $0, x < 1$.

或 $\begin{cases} x \dots 1 \\ 4 - \sqrt{x-1} \dots 1 \end{cases}$ 解得： $1, x, 10$

综上所述， $x, -2$ 或 $0, x, 10$.

故选： A .

12. (5分) 将4名教师分配到3所中学任教，每所中学至少1名教师，则不同的分配方案共有()

A. 12种 B. 24种 C. 36种 D. 48种

【解答】解：将4名教师分配到3所中学任教，每所中学至少1名教师，

只有一种结果1, 1, 2,

首先从4个人中选2个作为一个元素，

使它与其他两个元素在一起进行排列，

共有 $C_4^2 A_3^3 = 36$ 种结果，

故选： C .

二、填空题（共4小题，每小题4分，满分16分）

13. (4分) 用平面 α 截半径为 R 的球，如果球心到截面的距离为 $\frac{R}{2}$ ，那么截得小圆的面积与球的表面积的

比值为 3:16 .

【解答】解：小圆半径是： $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ，小圆的面积是： $\frac{3\pi}{4}R^2$ ，

球的表面积是： $4\pi R^2$

截得小圆的面积与球的表面积的比值为： $\frac{3\pi}{4}R^2 : 4\pi R^2 = 3:16$

故答案为： 3:16

14. (4分) 函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最小值为 1 .

【解答】解： $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

$= 2(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x)$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\therefore 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in [1, 2],$$

\therefore 最小值为 1,

故答案为: 1.

15. (4分) 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 设 $f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, 则 $g(-8) =$

-2

【解答】解: 法一: 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 由已知 $f(-x) = 3^{-x} - 1$.

又 $\because f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \text{ 即 } -f(x) = 3^{-x} - 1.$$

$$\therefore f(x) = 1 - 3^{-x}.$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3^x - 1 & x \geq 0 \\ 1 - 3^{-x} & x < 0. \end{cases}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & x \geq 0 \\ -\log_3(1-x) & x < 0. \end{cases}$$

$$\therefore f^{-1}(-8) = g(-8) = -\log_3(1+8) = -\log_3 3^2 = -2.$$

法二: 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 由已知 $f(-x) = 3^{-x} - 1$.

又 $\because f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \text{ 即 } -f(x) = 3^{-x} - 1.$$

$$\therefore f(x) = 1 - 3^{-x}. \text{ 根据反函数定义}$$

$$\text{令 } 1 - 3^{-x} = -8 \text{ 得 } x = -2, \text{ 即: } g(-8) = -2$$

答案为: -2

16. (4分) 设 P 是曲线 $y^2 = 4(x-1)$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $(0,1)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最

小值是 $\sqrt{5}$.

【解答】解： $y^2 = 4(x-1)$ 的图象是以 y 轴为准线， $(2,0)$ 为焦点的抛物线， \therefore 当点 P 为 $(0,1)$ 点与 $(2,0)$ 点的连线与抛物线的交点时，距离和最小，

最小值为： $\sqrt{(2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$.

故答案为： $\sqrt{5}$.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17. (12 分) 已知 α 为锐角，且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，求 $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$ 的值.

【解答】解： $\because \tan \alpha = \frac{1}{2}$ ， α 为锐角 $\therefore \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

18. (12 分) 解方程 $4^x + |1 - 2^x| = 11$.

【解答】解：当 $x \leq 0$ 时，有： $4^x + 1 - 2^x = 11$,

化简得： $(2^x)^2 - 2^x - 10 = 0$,

解之得： $2^x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$ 或 $2^x = \frac{1 - \sqrt{41}}{2}$ (舍去).

又 $\because x \leq 0$ 得 $2^x \leq 1$ ，故 $2^x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$ 不可能舍去.

当 $x > 0$ 时，有： $4^x - 1 + 2^x = 11$,

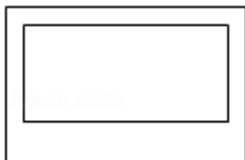
化简得： $(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$,

解之得： $2^x = 3$ 或 $2^x = -4$ (舍去)

$\therefore 2^x = 3$ ， $\therefore x = \log_2 3$,

综上所述，原方程的解为 $x = \log_2 3$.

19. (12 分) 某村计划建造一个室内面积为 $800m^2$ 的矩形蔬菜温室. 在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留 $1m$ 宽的通道，沿前侧内墙保留 $3m$ 宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？



【解答】解：设矩形温室的左侧边长为 am ，后侧边长为 bm ，则 $ab = 800$ 。

蔬菜的种植面积

$$S = (a - 4)(b - 2)$$

$$= ab - 4b - 2a + 8$$

$$= 808 - 2(a + 2b).$$

所以 $S_{\text{max}} = 808 - 4\sqrt{2ab} = 648(m^2)$

当且仅当 $a = 2b$ ，即 $a = 40(m)$ ， $b = 20(m)$ 时，

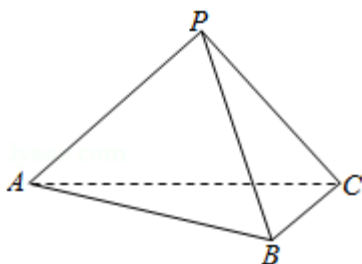
$$S_{\text{最大值}} = 648(m^2).$$

答：当矩形温室的左侧边长为 $40m$ ，后侧边长为 $20m$ 时，蔬菜的种植面积最大，最大种植面积为 $648m^2$ 。

20. (12分) 三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAC 与底面 ABC 垂直， $PA = PB = PC = 3$ 。

(1) 求证 $AB \perp BC$ ；

(2) 如果 $AB = BC = 2\sqrt{3}$ ，求 AC 与侧面 PBC 所成角的大小。



【解答】解：(1) 证明：取 AC 中点 O ，连接 PO 、 BO 。

$$\because PA = PC \therefore PO \perp AC$$

又 \because 侧面 $PAC \perp$ 底面 ABC

$$\therefore PO \perp \text{底面 } ABC$$

又 $PA = PB = PC \therefore AO = BO = CO$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形} \therefore AB \perp BC$$

(2) 解：取 BC 的中点为 M ，连接 OM ， PM ，所以有 $OM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$ ， $AO = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

$$\therefore PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{3}$$

由 (1) 有 $PO \perp$ 平面 ABC ， $OM \perp BC$ ，由三垂线定理得 $PM \perp BC$

$$\therefore \text{平面 } POM \perp \text{平面 } PBC, \text{ 又} \because PO = OM = \sqrt{3}.$$

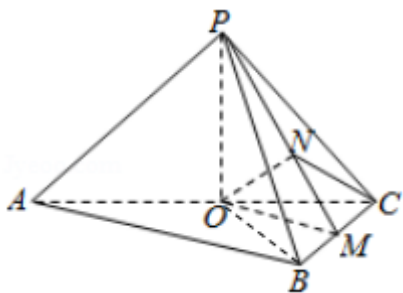
$\therefore \triangle POM$ 是等腰直角三角形，取 PM 的中点 N ，连接 ON ， NC

则 $ON \perp PM$ ，又 \because 平面 $POM \perp$ 平面 PBC ，且交线是 PM ， $\therefore ON \perp$ 平面 PBC

$\therefore \angle OCN$ 即为 AC 与平面 PBC 所成的角 $ON = \frac{1}{2}PM = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $OC = \sqrt{6}$

$\therefore \sin \angle OCN = \frac{ON}{OC} = \frac{1}{2} \therefore \angle OCN = \frac{\pi}{6}$.

故 AC 与平面 PBC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.



21. (12分) 设椭圆 $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$ 的两个焦点是 $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ($c > 0$)，且椭圆上存在点 P ，使得直线 PF_1 与直线 PF_2 垂直.

(I) 求实数 m 的取值范围.

(II) 设 l 是相应于焦点 F_2 的准线，直线 PF_2 与 l 相交于点 Q . 若 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$ ，求直线 PF_2 的方程.

【解答】 解：(1) \because 直线 $PF_1 \perp$ 直线 PF_2

\therefore 以 O 为圆心以 c 为半径的圆： $x^2 + y^2 = c^2$ 与椭圆： $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$ 有交点. 即
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ \frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 有解}$$

又 $\because c^2 = a^2 - b^2 = m+1 - 1 = m > 0$

$\therefore 0, x^2 = \frac{m^2 - 1}{m} < a^2 = m+1$

$\therefore m > 0$

(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ，直线 PF_2 方程为： $y = k(x - c)$ ，

\therefore 直线 l 的方程为： $x = \frac{a^2}{c} = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ ，

准线 L 的方程为 $x = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ ，

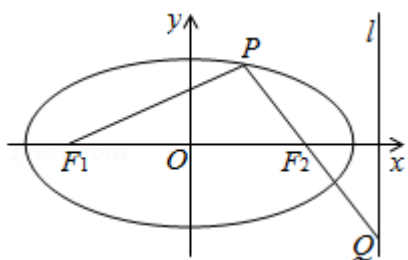
设点 Q 的坐标为 (x_1, y_1) ，则 $x_1 = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ ，

$$\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = \frac{x_1 - c}{c - x_0} = m + \sqrt{m^2 - 1} = 2 - \sqrt{3} \quad \textcircled{2}$$

解可得 $m = 2$ ，从而 $x_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $c = \sqrt{2}$ ，

则 $k_{PF_2} = \pm(2 + \sqrt{3})$ 或 $k_{PF_2} = \pm(\sqrt{3} - 2)$ ，

得到 PF_2 的方程 $y = \pm(\sqrt{3} - 2)(x - \sqrt{2})$ 或 $y = \pm(\sqrt{3} + 2)(x - \sqrt{2})$ 。



22. (14分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_n = 2a_n + (-1)^n$ ， $n \in \mathbb{N}^+$ 。

(1) 写出求数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1 ， a_2 ， a_3 ；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 证明：对任意的整数 $m > 4$ ，有 $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$ 。

【解答】解：(1) 当 $n = 1$ 时，有： $S_1 = a_1 = 2a_1 + (-1) \Rightarrow a_1 = 1$ ；

当 $n = 2$ 时，有： $S_2 = a_1 + a_2 = 2a_2 + (-1)^2 \Rightarrow a_2 = 0$ ；

当 $n = 3$ 时，有： $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3 + (-1)^3 \Rightarrow a_3 = 2$ ；

综上所述 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 0$ ， $a_3 = 2$ ；

(2) 由已知得： $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n + (-1)^n - 2a_{n-1} - (-1)^{n-1}$

化简得： $a_n = 2a_{n-1} + 2(-1)^{n-1}$

上式可化为： $a_n + \frac{2}{3}(-1)^n = 2[a_{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1}]$

故数列 $\{a_n + \frac{2}{3}(-1)^n\}$ 是以 $a_1 + \frac{2}{3}(-1)^1$ 为首项，公比为 2 的等比数列。

故 $a_n + \frac{2}{3}(-1)^n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} \therefore a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{2}{3}(-1)^n = \frac{2}{3}[2^{n-2} - (-1)^n]$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为： $a_n = \frac{2^{n-1}}{3} - \frac{2}{3}(-1)^n$ 。

(3) 由已知得： $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} = 3[\frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{2^4 + 2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1} - (-1)^m}]$

$$= 3\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}\right] < 3\left(\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{7}{8}$$

$$\text{故 } \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8} (m > 4).$$