2002年天津高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）直线$(1+a)x+y+1=0$与圆$x^2+y^2-2x=0$相切，则a的值为(　　)

A．-1　　B．-2　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

2．（5分）已知m，n为异面直线，$m\subset$平面α，$n\subset$平面β，$\alpha\bigcap\beta=l$，则l(　　)

A．与m，n都相交　　B．与m，n中至少一条相交

C．与m，n都不相交　　D．至多与m，n中的一条相交

3．（5分）不等式$(1+x)(1-|x|)>0$的解集是(　　)

A．$\{x|0\leqslant x<1\}$　　B．$\{x|x<0$且$x\neq-1\}$　　C．$\{x|-1<x<1\}$　　D．$\{x|x<1$且$x\neq-1\}$

4．（5分）函数$y=a^x$在$[0，1]$上的最大值与最小值的和为3，则$a=$(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．4　　D．$\frac{1}{4}$

5．（5分）在$(0,2\pi)$内，使$\sin x>\cos x$成立的x的取值范围是(　　)

A．$(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2})\bigcup(\pi，\frac{5\pi}{4})$　　B．$(\frac{\pi}{4}，\pi)$

C．$(\frac{\pi}{4}，\frac{5\pi}{4})$　　D．$(\frac{\pi}{4}，\pi)\bigcup(\frac{5\pi}{4}，\frac{3\pi}{2})$

6．（5分）设集合$M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}，k\in Z\}$，$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}，k\in Z\}$，则(　　)

A．$M=N$　　B．$M\subset N$　　C．$M\supset N$　　D．$M\bigcap N=\Phi$

7．（5分）椭圆$5x^2+ky^2=5$的一个焦点是$(0,2)$，那么k等于(　　)

A．-1　　B．1　　C．$\sqrt{5}$　　D．$-\sqrt{5}$

8．（5分）正六棱柱$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$的底面边长为1，侧棱长为$\sqrt{2}$，则这个棱柱侧面对角线$E_1D$与$BC_1$所成的角是(　　)

A．90°　　B．60°　　C．45°　　D．30°

9．（5分）函数$y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$是单调函数的充要条件是(　　)

A．$b\geqslant 0$　　B．$b\leqslant 0$　　C．$b>0$　　D．$b<0$

10．（5 分）已知$0<x<y<a<1$，则有(　　)

A．$\log_a(xy)<0$　　B．$0<\log_a(xy)<1$　　C．$1<\log_a(xy)<2$　　D．$\log_a(xy)>2$

11．（5 分）从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有(　　)

A．8 种　　B．12 种　　C．16 种　　D．20 种

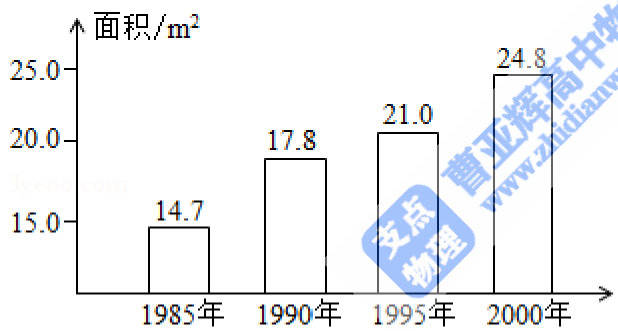
12．（5 分）平面直角坐标系中，O为坐标原点，已知两点$A(3,1)$、$B(-1,3)$，若点C满足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中$\alpha$、$\beta\in R$，且$\alpha+\beta=1$，则点$C$的轨迹方程为(　　)

A．$3x+2y-11=0$　　B．$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C．$2x-y=0$　　D．$x+2y-5=0$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）据新华社 2002 年 3 月 12 日电，1958 年到 2000 年间，我国农村人均居住面积如下图所示其中，从_____到_____年的五年间增长最快．



14．（4 分）已知$\sin 2\alpha=-\sin\alpha(\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi))$，则$\cot\alpha=$_____．

15．（4 分）甲、乙两种冬小麦试验品种连续 5 年的平均单位面积产量如下（单位：t/hm^2）

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

其中产量比较稳定的小麦品种是 _____．

16．（4 分）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，下列函数（1）$y=-|f(x)|$；（2）$y=xf(x^2)$；（3）$y=-f(-x)$；（4）$y=f(x)-f(-x)$中必为奇函数的有_____（要求填写正确答案的序号）．

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_6-a_4=24$，$a_3a_5=64$，求 $\{a_n\}$ 前 8 项的和 S_8.

18.（12 分）已知 $\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，求 $\sin\alpha$ 、 $\tan\alpha$ 的值.

19.（12 分）选做题:（甲、乙两题任选一题作答）

甲、如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为 $\sqrt{2}a$.

（Ⅰ）建立适当的坐标系，并写出点 A 、 B 、 A_1 、 C_1 的坐标;

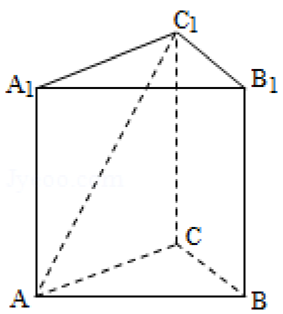
（Ⅱ）求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角

乙、如图，正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ 的边长都是 1，而且平面 $ABCD$ 、 $ABEF$ 互相垂直．点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$.

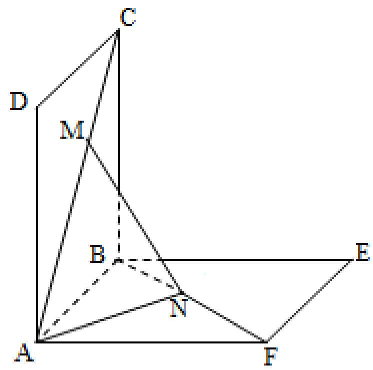
（Ⅰ）求 MN 的长;

（Ⅱ）当 a 为何值时， MN 的长最小;

（Ⅲ）当 MN 长最小时，求面 MNA 与面 MNB 所成的二面角 α 的大小.



甲图



乙图

20.（12 分）某单位 6 个员工借助互联网开展工作，每个员工上网的概率都是 0.5（相互独立），

（1）求至少 3 人同时上网的概率;

（2）至少几人同时上网的概率小于 0.3?

21.（12 分）已知 $a>0$，函数 $f(x)=x^3-a$， $x\in(0,+\infty)$，设 $x_1>0$，记曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l，

（1）求 l 的方程;

（2）设l与x轴交点为$(x_2，\ 0)$证明：

①$x_2 \ldots a^{\frac{1}{3}}$；

②若$x_2 > a^{\frac{1}{3}}$则$a^{\frac{1}{3}} < x_2 < x_1$.

22.（14 分）已知两点$M(-1,0)$，$N(1,0)$，且点P使$\overrightarrow{MP} \bullet \overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM} \bullet \overrightarrow{NP}$成公差小于零的等差数列.

（1）点P的轨迹是什么曲线？

（2）若点P坐标为$(x_0，\ y_0)$，记θ为$\overrightarrow{PM}$与$\overrightarrow{PN}$的夹角，求$\tan\theta$.

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1．（5 分）直线 $(1+a)x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切，则 a 的值为(　　)

A． -1　　B． -2　　C． 1　　D． $\sqrt{3}$

【解答】解：由圆心到直线的距离可知：$\dfrac{|1+a+1|}{\sqrt{(1+a)^2+1^2}}=1$，$(2+a)^2=(1+a)^2+1$，

$\therefore a=-1$．

故选：A．

2．（5 分）已知 m，n 为异面直线，$m\subset$ 平面 α，$n\subset$ 平面 β，$\alpha\bigcap\beta=l$，则 $l($　　$)$

A．与 m，n 都相交　　B．与 m，n 中至少一条相交

C．与 m，n 都不相交　　D．至多与 m，n 中的一条相交

【解答】解：由题意，l 与 m，n 都相交且交点不重合时，m，n 为异面直线；

若 l 与 m 相交且与 n 平行时，m，n 为异面直线；

若 l 与 m，n 都不相交时，又因 $m\subset\alpha$，$l\subset\alpha$，所以 $l//m$，同理 $l//n$，则 $m//n$．

故选：B．

3．（5 分）不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是(　　)

A． $\{x|0„\ x<1\}$　　B． $\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$　C． $\{x|-1<x<1\}$　　D． $\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$

【解答】解：求不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集

则分两种情况讨论：

情况 $1:\begin{cases}1+x>0\\1-|x|>0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}x>-1\\-1<X<1\end{cases}$

则：$-1<x<1$．

情况 $2:\begin{cases}1+x<0\\1-|x|<0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}X<-1\\X\langle -1\text{或}X\rangle 1\end{cases}$

则：$x<-1$

两种情况取并集得$\{x\mid x<1$且$x\neq -1\}$.

故选：D.

4.（5 分）函数$y=a^{x}$在$[0$，$1]$上的最大值与最小值的和为 3，则$a=($　　$)$

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．4　　D．$\frac{1}{4}$

【解答】解：根据题意，由$y=a^{x}$的单调性，

可知其在$[0$，$1]$上是单调函数，即当$x=0$和 1 时，取得最值，

即$a^{0}+a^{1}=3$，

再根据其图象，可得$a^{0}=1$，

则$a^{1}=2$，

即$a=2$，

故选：B.

5.（5 分）在$(0,2\pi)$内，使$\sin x>\cos x$成立的x的取值范围是$($　　$)$

A．$(\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2})\cup(\pi$，$\frac{5\pi}{4})$　　B．$(\frac{\pi}{4}$，$\pi)$

C．$(\frac{\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4})$　　D．$(\frac{\pi}{4}$，$\pi)\cup(\frac{5\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{2})$

【解答】解：$\because \sin x>\cos x$，

$\therefore \sin(x-\frac{\pi}{4})>0$，

$\therefore 2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi\ \ (k\in Z)$，

$\because$在$(0,2\pi)$内，

$\therefore x\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，

故选：C.

6.（5 分）设集合$M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$，$k\in Z\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}$，$k\in Z\}$，则$($　　$)$

A．$M=N$　　B．$M\subset N$　　C．$M\supset N$　　D．$M\bigcap N=\Phi$

【解答】解：当$k=2m$（为偶数）时，$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in Z\}=\{x\mid x=\frac{m}{2}+\frac{1}{2},m\in Z\}$

当$k=2m-1$（为奇数）时，$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in Z\}=\{x\mid x=\frac{m}{2}+\frac{1}{4},m\in Z\}=M$

$\therefore M \subset N$

故选：B.

7.（5 分）椭圆 $5x^{2}+ky^{2}=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$，那么 k 等于 $($　　$)$

A. -1　　B. 1　　C. $\sqrt{5}$　　D. $-\sqrt{5}$

【解答】解：椭圆 $5x^{2}+ky^{2}=5$ 即 $x^{2}+\frac{y^{2}}{\frac{5}{k}}=1$，

$\because$ 焦点坐标为 $(0,2)$，$c^{2}=4$，

$\therefore \frac{5}{k}-1=4$，$\therefore k=1$，

故选：B.

8.（5 分）正六棱柱 $ABCDEF-A_{1}B_{1}C_{1}D_{1}E_{1}F_{1}$ 的底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$，则这个棱柱侧面对角线 $E_{1}D$ 与 BC_{1} 所成的角是 $($　　$)$

A. 90°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

【解答】解：连接 $E_{1}F$、FD.

正六棱柱 $ABCDEF-A_{1}B_{1}C_{1}D_{1}E_{1}F_{1}$ 的底面边长为 1，则 $E_{1}D=E_{1}F=\sqrt{3}$，$FD=\sqrt{3}$，

则可知 $\angle FE_{1}D=60^{\circ}$，

故选：B.

9.（5 分）函数 $y=x^{2}+bx+c(x\in[0,+\infty))$ 是单调函数的充要条件是 $($　　$)$

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

【解答】解：$\because$ 函数 $y=x^{2}+bx+c$ 在 $[0,+\infty)$ 上为单调函数

$\therefore x=-\frac{b}{2}\leqslant 0$，即 $b\geqslant 0$.

故选：A.

10.（5 分）已知 $0<x<y<a<1$，则有 $($　　$)$

A. $\log_{a}(xy)<0$　　B. $0<\log_{a}(xy)<1$　　C. $1<\log_{a}(xy)<2$　　D. $\log_{a}(xy)>2$

【解答】解：$\because 0<x<y<a<1 \therefore \log_{a}x>\log_{a}a=1$，$\log_{a}y>\log_{a}a=1$

$\therefore \log_a(xy)=\log_a x+\log_a y>2$

故选：D．

11．（5 分）从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有(　　)

A．8 种　　B．12 种　　C．16 种　　D．20 种

【解答】解：使用间接法，首先分析从 6 个面中选取 3 个面，共 C_6^3 种不同的取法，

而其中有 2 个面相邻，即 8 个角上 3 个相邻平面，选法有 8 种，

则选法共有 $C_6^3-8=12$ 种；

故选：B．

12．（5 分）平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(3,1)$、$B(-1,3)$，若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 α、$\beta\in R$，且 $\alpha+\beta=1$，则点 C 的轨迹方程为(　　)

A．$3x+2y-11=0$　　B．$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C．$2x-y=0$　　D．$x+2y-5=0$

【解答】解：C 点满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 且 $\alpha+\beta=1$，

$\therefore A$、B、C 三点共线．

$\therefore C$ 点的轨迹是直线 AB

又 $A(3,1)$、$B(-1,3)$，

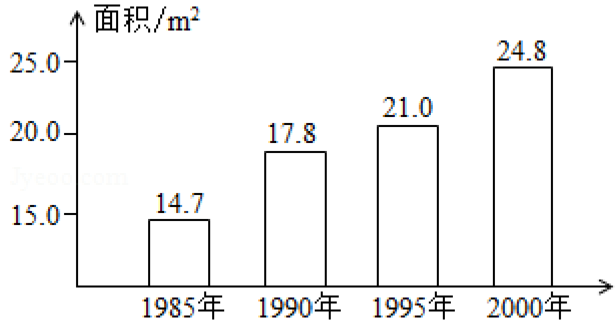
$\therefore$ 直线 AB 的方程为：$\dfrac{y-1}{3-1}=\dfrac{x-3}{-1-3}$ 整理得 $x+2y-5=0$

故 C 点的轨迹方程为 $x+2y-5=0$

故选：D．

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）据新华社 2002 年 3 月 12 日电，1958 年到 2000 年间，我国农村人均居住面积如下图所示其中，从__1995__到_____年的五年间增长最快．



【解答】解：1985 年到 1990 年五年间人均增长的面积为$17.8-14.7=3.1$

1990 年到 1995 年五年间人均增长的面积为$21.0-17.8=3.2$

1995 年到 2000 年五年间人均增长的面积为$24.8-21.0=3.8$

$\therefore 3.8>3.2>3.1$

故答案为：1995；2000

14.（4 分）已知$\sin 2\alpha=-\sin\alpha(\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi))$，则$\cot\alpha=$__$-\frac{\sqrt{3}}{3}$__.

【解答】解：由$\sin 2\alpha=-\sin\alpha$化简得：$2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$，即$\sin\alpha(2\cos\alpha+1)=0$

因为$\sin\alpha\neq 0$，得到$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，由$\alpha\in(\frac{\pi}{2}$，$\pi)$，得到$\sin\alpha=\sqrt{1-(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

15.（4 分）甲、乙两种冬小麦试验品种连续 5 年的平均单位面积产量如下（单位：t/hm^2）

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9. 8	9. 9	10. 1	10	10. 2
乙	9. 4	10. 3	10. 8	9. 7	9. 8

其中产量比较稳定的小麦品种是 __甲__.

【解答】解：由题意知$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}(9.8+9.9+10.1+10+10.2)=10.0$，

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}(9.4+10.3+10.8+9.7+9.8)=10.0$；

$\because s_{甲}^2=\frac{1}{5}(9.8^2++10.2^2)-10^2=0.02$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}(9.4^2++9.8^2)-10^2=0.244>0.02$．

$\therefore 0.244 > 0.02$.

$\therefore$ 产量比较稳定的小麦品种是甲，

故答案为：甲

16．（4 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，下列函数（1） $y=-|f(x)|$；（2） $y=xf(x^2)$；（3） $y=-f(-x)$；（4） $y=f(x)-f(-x)$ 中必为奇函数的有__（2），（4）__（要求填写正确答案的序号）．

【解答】解： $y=-|f(x)|$ 中 $-|f(-x)|$ 与 $|f(x)|$ 不一定相等，所以（1）不是奇函数；

$y=xf(x^2)$ 可以看成为两个函数的乘积，其中， $y=x$ 是奇函数， $y=f(x^2)$ 是偶函数，故（2）是奇函数．

$y=-f(-x)$ 奇偶性没办法确定．故（3）不是奇函数．

令 $F(x)=y=f(x)-f(-x)$ 因为 $F(-x)=f(-x)-f(x)=-(f(x)-f(-x))=-F(x)$ ，故（4）是奇函数

故答案为：(2)（4）

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_6-a_4=24$ ， $a_3a_5=64$ ，求 $\{a_n\}$ 前 8 项的和 S_8 .

【解答】解：设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，依题意，

$a_6-a_4=a_1q^3(q^2-1)=24$ ，（1）

$a_3a_5=(a_1q^3)^2=64$ ，

$\therefore a_1q^3=\pm 8$

将 $a_1q^3=-8$ 代入到（1）式，得 $q^2-1=-3$ ， $q^2=-2$ ，舍去．

将 $a_1q^3=8$ 代入到（1）式，得 $q^2-1=3$ ， $q=\pm 2$.

当 $q=2, a_1=1, S_8=\dfrac{a_1\left(q^8-1\right)}{q-1}=255$ ，

当 $q=-2, a_1=-1, S_8=\dfrac{a_1\left(q^8-1\right)}{q-1}=85$.

18．（12 分）已知$\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，求$\sin\alpha$、$\tan\alpha$的值．

【解答】解：由$\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$，得

$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha=0$

$2\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1)=0$

$2\cos^2\alpha(2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)=0$．

因为$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以$\sin\alpha+1\neq 0$，且$\cos\alpha\neq 0$，

所以$2\sin\alpha-1=0$，即$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，

所以$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，即$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

19．（12 分）选做题：（甲、乙两题任选一题作答）

甲、如图，正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面边长为a，侧棱长为$\sqrt{2}a$．

（Ⅰ）建立适当的坐标系，并写出点A、B、A_1、C_1的坐标；

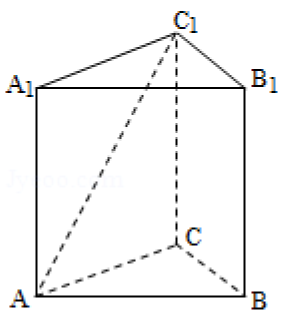
（Ⅱ）求AC_1与侧面ABB_1A_1所成的角

乙、如图，正方形$ABCD$、$ABEF$的边长都是 1，而且平面$ABCD$、$ABEF$互相垂直．点M在AC上移动，点N在BF上移动，若$CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$．

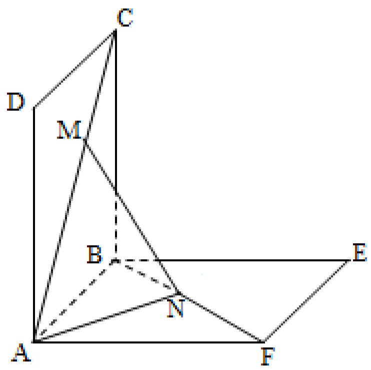
（Ⅰ）求MN的长；

（Ⅱ）当a为何值时，MN的长最小；

（Ⅲ）当MN长最小时，求面MNA与面MNB所成的二面角α的大小．



甲图



乙图

【解答】甲、解：（1）如图，以点A为坐标原点O，

以 AB 所在直线为 Oy 轴，以 AA_1 所在直线为 Oz 轴，

以经过原点且与平面 ABB_1A_1 垂直的直线为 Ox 轴，建立空间直角坐标系.

由已知，得 $A(0,0,0)$，$B(0,a,0)$，

$A_1(0,0,\sqrt{2}a),C_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$

（2）坐标系如上．取 A_1B_1 的中点 M，

于是有 $M(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$，

连 AM，MC_1 有 $\overrightarrow{MC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，

且 $\overrightarrow{AB}=(0,a,0),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a)$

由于 $\overrightarrow{MC_1}\bullet\overrightarrow{AA_1}=0,\overrightarrow{MC_1}\bullet\overrightarrow{AA_1}=0$

所以，$MC_1\perp$ 面 ABB_1A_1

$\therefore AC_1$ 与 AM 所成的角就是 AG_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

$\because \overrightarrow{AC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{AM}=(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$

$\therefore \overrightarrow{AC_1}\bullet\overrightarrow{AM}=0+\frac{a^2}{4}+2a^2=\frac{9}{4}a^2$

而 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+2a^2}=\sqrt{3}a$

$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2}=\frac{3}{2}a$

$\therefore \cos<\overrightarrow{AC_1}，\overrightarrow{AM}>=\frac{\frac{9}{4}a^2}{\sqrt{3}a\bullet\frac{3}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以，$\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{AM}$ 所成的角，

即 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 $30°$

乙、解：（1）作 $MP//AB$ 交 BC 于点 P，

$NQ//AB$ 交 BE 于点 Q，连接 PQ，依题意可得 $MP//NQ$，且 $MP=NQ$，

即 $MNQP$ 是平行四边形.

$\therefore MN=PQ$ 由已知， $CM=BN=a$ ， $CB=AB=BE=1$ ，

$AC=BF=\sqrt{2}$

$\therefore \frac{CP}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{BQ}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

即 $CP=BQ=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore MN=PQ=\sqrt{(1-CP)^2+BQ^2}$

$=\sqrt{(1-\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{a}{\sqrt{2}})^2}$

$=\sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}(0<a<\sqrt{2})$

（2）由（1） $MN=\sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$

所以，当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， $MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$

即 M ， N 分别移动到 AC ， BF 的中点时，

MN 的长最小，最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

（3）取 MN 的中点 G ，连接 AG 、 BG ，

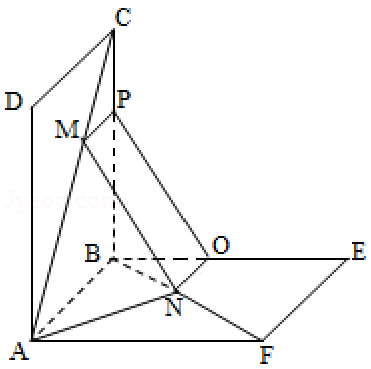
$\because AM=AN$ ， $BM=BN$ ， $\therefore AG\perp MN$ ， $BG\perp MN$ ，

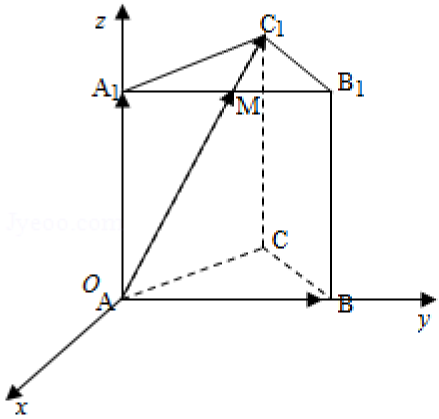
$\therefore \angle AGB$ 即为二面角 α 的平面角.

又 $AG=BG=\frac{\sqrt{6}}{4}$ ，

所以由余弦定理有 $\cos\alpha=\dfrac{(\frac{\sqrt{6}}{4})^2+(\frac{\sqrt{6}}{4})^2-1}{2\bullet\frac{\sqrt{6}}{4}\bullet\frac{\sqrt{6}}{4}}=-\frac{1}{3}$.

故所求二面角 $\alpha=\arccos(-\frac{1}{3})$.





20.（12 分）某单位 6 个员工借助互联网开展工作，每个员工上网的概率都是 0.5（相互独立），

（1）求至少 3 人同时上网的概率；

（2）至少几人同时上网的概率小于 0.3？

【解答】解：（1）根据题意，可得，“至少 3 人同时上网”与“至多 2 人同时上网”互为对立事件，

故“至少 3 人同时上网”的概率等于 1 减去“至多 2 人同时上网”的概率，

即“至少 3 人同时上网”的概率为$1-C_6^0(0.5)^6-C_6^1(0.5)^6-C_6^2(0.5)^6=1-\dfrac{1+6+15}{64}=\dfrac{21}{32}$.

（2）至少 4 人同时上网的概率为$C_6^4(0.5)^6+C_6^5(0.5)^6+C_6^6(0.5)^6=\dfrac{11}{32}>0.3$，

至少 5 人同时上网的概率为$(C_6^5+C_6^6)(0.5)^6=\dfrac{7}{64}<0.3$，

因此，至少 5 人同时上网的概率小于 0.3.

21.（12 分）已知$a>0$，函数$f(x)=x^3-a$，$x\in(0,+\infty)$，设$x_1>0$，记曲线$y=f(x)$在点$(x_1,\ f(x_1))$处的切线为l，

（1）求l的方程；

（2）设l与x轴交点为$(x_2,\ 0)$证明：

①$x_2 \geqslant a^{\frac{1}{3}}$；

②若$x_2 > a^{\frac{1}{3}}$则$a^{\frac{1}{3}} < x_2 < x_1$.

【解答】解：（1）$f(x)$的导数$f'(x)=3x^2$，

由此得切线l的方程$y-(x_1^3-a)=3x_1^2(x-x_1)$；

（2）①依题意，在切线方程中令$y=0$，

得$x_2=x_1-\dfrac{x_1^3-a}{3x_1^2}=\dfrac{2x_1^3+a}{3x_1^2}$，

$x_2-a^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3x_1^2}(2x_1^3+a-3x_1^2a^{\frac{1}{3}})=\dfrac{1}{3x_1^2}(x_1-a^{\frac{1}{3}})^2(2x_1+a^{\frac{1}{3}})\geqslant 0$，

$\therefore x_2 \geqslant a^{\frac{1}{3}}$，当且仅当$x_1=a^{\frac{1}{3}}$时取等成立.

②若$x_1 > a^{\frac{1}{3}}$，则$x_1^3-a>0$，$x_2-x_1=\dfrac{x_1^3+a}{3x_1^2}<0$，

且由①$x_2 \geqslant a^{\frac{1}{3}}$，

所以$a^{\frac{1}{3}} < x_2 < x_1$.

22.（14分）已知两点$M(-1,0)$，$N(1,0)$，且点P使$\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\bullet\overrightarrow{NP}$成公差小于零的等差数列.

（1）点P的轨迹是什么曲线？

（2）若点P坐标为$(x_0$，$y_0)$，记θ为$\overrightarrow{PM}$与$\overrightarrow{PN}$的夹角，求$\tan\theta$.

【解答】解：（1）记$P(x,y)$，由$M(-1,0)$，$N(1,0)$得$\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}=(-1-x,-y)$，

$\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{NP}=(1-x,-y)$，$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{NM}=(2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MN}=2(1+x)$，

$\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}=x^2+y^2-1$，

$\overrightarrow{NM}\bullet\overrightarrow{NP}=2(1-x)$，

$\because \overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\bullet\overrightarrow{NP}$是公差小于零的等差数列

$$\therefore \begin{cases} x^2+y^2-1=\dfrac{1}{2}[2(1+x)+2(1-x)] \\ 2(1-x)-2(1+x)<0 \end{cases}$$

即 $x^2+y^2=3(x>0)$，

$\therefore$ 点 P 的轨迹是以原点为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的右半圆.

（2）点 P 的坐标为 $(x_0，\ y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=3$，

$\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN}=x_0^2+y_0^2-1=2$，

$\because |\overrightarrow{PM}| \bullet |\overrightarrow{PN}|=\sqrt{(1+x_0)^2+y_0^2} \bullet \sqrt{(1-x_0)^2+y_0^2}$

$=\sqrt{(4+2x_0)(4-2x_0)}=2\sqrt{4-x_0^2}$，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}| \bullet |\overrightarrow{PN}|}=\dfrac{1}{\sqrt{4-x_0^2}}$，

$\because 0<x_0 \leqslant \sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}<\cos\theta \leqslant 1$，$0 \leqslant \theta<\dfrac{\pi}{3}$，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4-x_0^2}}$，

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{4-x_0{}^2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{4-x_0{}^2}}}=\sqrt{3-x_0{}^2}=|y_0|$