

# 2005 年海南高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 到 10 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。
3. 本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

球的表面积公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$S = 4\pi R^2$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

其中 R 表示球的半径

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

球的体积公式

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

其中 R 表示球的半径

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

### 一. 选择题

(1) 设 I 为全集， $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  是 I 的三个非空子集，且  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$ ，则下面论断正确的是

(A)  $C_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \Phi$

(B)  $S_1 \subseteq (C_I S_2 \cap C_I S_3)$

(C)  $C_I S_1 \cap C_I S_2 \cap C_I S_3 = \Phi$

(D)  $S_1 \subseteq (C_I S_2 \cup C_I S_3)$

(2) 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为  $\pi$ ，则球的表面积为

(A)  $8\sqrt{2}\pi$

(B)  $8\pi$

(C)  $4\sqrt{2}\pi$

(D)  $4\pi$

(3) 函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$ ，已知  $f(x)$  在  $x = -3$  时取得极值，则  $a =$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

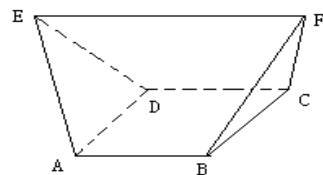
(4) 如图，在多面体 ABCDEF 中，已知 ABCD 是边长为 1 的正方形，且  $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCF$  均为正三角形， $EF \parallel AB$ ， $EF=2$ ，则该多面体的体积为

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C)  $\frac{4}{3}$

(D)  $\frac{3}{2}$



- (5) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 的一条准线为  $x = \frac{3}{2}$ , 则该双曲线的离心率为
- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (D)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

- (6) 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时, 函数  $f(x) = \frac{1 + \cos 2x + 8 \sin^2 x}{\sin 2x}$  的最小值为

- (A) 2 (B)  $2\sqrt{3}$  (C) 4 (D)  $4\sqrt{3}$

- (7)  $y = \sqrt{2x - x^2}$  ( $1 \leq x \leq 2$ ) 反函数是

(A)  $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )

(B)  $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

(C)  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )

(D)  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

- (8) 设  $0 < a < 1$ , 函数  $f(x) = \log_a(a^{2x} - 2a^x - 2)$ , 则使  $f(x) < 0$  的  $x$  的取值范围是

- (A)  $(-\infty, 0)$  (B)  $(0, +\infty)$  (C)  $(-\infty, \log_a 3)$  (D)  $(\log_a 3, +\infty)$

- (9) 在坐标平面上, 不等式组  $\begin{cases} y \geq x - 1 \\ y \leq -3|x| + 1 \end{cases}$  所表示的平面区域的面积为

- (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (D) 2

- (10) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\tan \frac{A+B}{2} = \sin C$ , 给出以下四个论断:

①  $\tan A \cdot \cot B = 1$

②  $0 < \sin A + \sin B \leq \sqrt{2}$

③  $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$

④  $\cos^2 A + \cos^2 B = \sin^2 C$

其中正确的是

- (A) ①③ (B) ②④ (C) ①④ (D) ②③

- (11) 点  $O$  是三角形  $ABC$  所在平面内的一点, 满足  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ , 则点  $O$  是  $\triangle ABC$  的

- (A) 三个内角的角平分线的交点 (B) 三条边的垂直平分线的交点  
(C) 三条中线的交点 (D) 三条高的交点

(12) 设直线  $l$  过点  $(-2,0)$ ，且与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切，则  $l$  的斜率是

- (A)  $\pm 1$                       (B)  $\pm \frac{1}{2}$                       (C)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$                       (D)  $\pm \sqrt{3}$

第 II 卷

注意事项：

1. 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷上。
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。
3. 本卷共 10 小题，共 90 分。

二. 本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

(13) 若正整数  $m$  满足  $10^{m-1} < 2^{512} < 10^m$ ，则  $m =$  \_\_\_\_\_。(lg 2  $\approx$  0.3010)

(14)  $(x - \frac{1}{x})^8$  的展开式中，常数项为 \_\_\_\_\_。(用数字作答)

(15) 从 6 名男生和 4 名女生中，选出 3 名代表，要求至少包含 1 名女生，则不同的选法共有 \_\_\_\_\_ 种。

(16) 在正方形  $ABCD - A'B'C'D'$  中，过对角线  $BD'$  的一个平面交  $AA'$  于 E，交  $CC'$  于 F，

- ① 四边形  $BFD'E$  一定是平行四边形
- ② 四边形  $BFD'E$  有可能是正方形
- ③ 四边形  $BFD'E$  在底面 ABCD 内的投影一定是正方形
- ④ 四边形  $BFD'E$  有可能垂直于平面  $BB'D$

以上结论正确的为 \_\_\_\_\_。(写出所有正确结论的编号)

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本大题满分 12 分)

设函数  $f(x) = \sin(2x + \varphi)$  ( $-\pi < \varphi < 0$ )， $y = f(x)$  图像的一条对称轴是直线  $x = \frac{\pi}{8}$ 。

(I) 求  $\varphi$ ；

(II) 求函数  $y = f(x)$  的单调增区间；

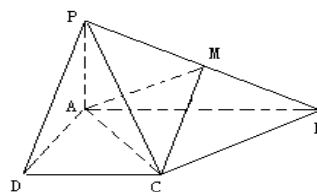
(III) 画出函数  $y = f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上的图像。

(18) (本大题满分 12 分)

已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面为直角梯形,  $AB \parallel DC$ ,  $\angle DAB = 90^\circ$ ,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ , 且

$PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1$ ,  $M$  是  $PB$  的中点。

- (I) 证明: 面  $PAD \perp$  面  $PCD$ ;
- (II) 求  $AC$  与  $PB$  所成的角;
- (III) 求面  $AMC$  与面  $BMC$  所成二面角的大小。



(19) (本大题满分 12 分)

已知二次函数  $f(x)$  的二次项系数为  $a$ , 且不等式  $f(x) > -2x$  的解集为  $(1,3)$ 。

- (I) 若方程  $f(x) + 6a = 0$  有两个相等的根, 求  $f(x)$  的解析式;
- (II) 若  $f(x)$  的最大值为正数, 求  $a$  的取值范围。

(20) (本大题满分 12 分)

9 粒种子分种在甲、乙、丙 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5, 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种; 若一个坑内的种子都没发芽, 则这个坑需要补种。

- (I) 求甲坑不需要补种的概率;
  - (II) 求 3 个坑中恰有 1 个坑不需要补种的概率;
  - (III) 求有坑需要补种的概率。
- (精确到 0.01)

(21) (本大题满分 12 分)

设正项等比数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = \frac{1}{2}$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $2^{10}S_{30} - (2^{10} + 1)S_{20} + S_{10} = 0$ 。

- (I) 求  $\{a_n\}$  的通项;
- (II) 求  $\{nS_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

(22) (本大题满分 14 分)

已知椭圆的中心为坐标原点  $O$ , 焦点在  $x$  轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点  $F$  的直线交椭圆于  $A$ 、 $B$  两点,  $\vec{OA} + \vec{OB}$  与  $a = (3, -1)$  共线。

- (I) 求椭圆的离心率;

(II) 设M为椭圆上任意一点, 且  $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$  ( $\lambda, \mu \in R$ ), 证明  $\lambda^2 + \mu^2$  为定值。

参考答案

一、选择题 (本题考查基本知识和基本运算, 每小题5分, 满分60分)

1. C 2. C 3. B 4. D 5. A 6. D 7. C 8. B 9. C 10. B 11. B 12. D

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分, 满分16分.

13. 155 14. 70 15. 100 16. ①③④

三、解答题

17. 本小题主要考查三角函数性质及图像的基本知识, 考查推理和运算能力, 满分12分.

解: (I)  $\because x = \frac{\pi}{8}$  是函数  $y = f(x)$  的图像的对称轴,  $\therefore \sin(2 \times \frac{\pi}{8} + \varphi) = \pm 1$ ,

$$\therefore \frac{\pi}{4} + \pi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z. \quad \because -\pi < \varphi < 0, \varphi = -\frac{3\pi}{4}.$$

(II) 由 (I) 知  $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ , 因此  $y = \sin(2x - \frac{3\pi}{4})$ .

由题意得

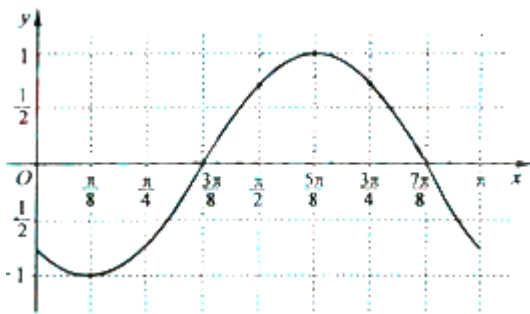
$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{3\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z.$$

所以函数  $y = \sin(2x - \frac{3\pi}{4})$  的单调增区间为  $[k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{5\pi}{8}], k \in Z$ .

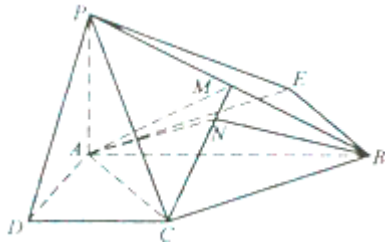
(III) 由  $y = \sin(2x - \frac{3\pi}{4})$  知

|     |                       |                 |                  |                  |                  |                       |
|-----|-----------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-----------------------|
| $x$ | 0                     | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{5\pi}{8}$ | $\frac{7\pi}{8}$ | $\pi$                 |
| $y$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1              | 0                | 1                | 0                | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

故函数  $y = f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上图像是



18. 本小题主要考查直线与平面垂直、直线与平面所成角的有关知识及思维能力和空间想象能力. 考查应用向量知识解决数学问题的能力. 满分12分.



方案一：

(I) 证明：∵ PA ⊥ 面 ABCD, CD ⊥ AD,

∴ 由三垂线定理得：CD ⊥ PD.

因而，CD 与面 PAD 内两条相交直线 AD, PD 都垂直，

∴ CD ⊥ 面 PAD.

又 CD ⊂ 面 PCD, ∴ 面 PAD ⊥ 面 PCD.

(II) 解：过点 B 作 BE // CA, 且 BE = CA,

则 ∠PBE 是 AC 与 PB 所成的角.

连结 AE, 可知 AC = CB = BE = AE =  $\sqrt{2}$ , 又 AB = 2,

所以四边形 ACBE 为正方形. 由 PA ⊥ 面 ABCD 得 ∠PEB = 90°

在 Rt△PEB 中 BE =  $\sqrt{2}$ , PB =  $\sqrt{5}$ , ∴  $\cos \angle PBE = \frac{BE}{PB} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

∴ AC 与 PB 所成的角为  $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

(III) 解：作 AN ⊥ CM, 垂足为 N, 连结 BN.

在 Rt△PAB 中, AM = MB, 又 AC = CB,

∴ △AMC ≅ △BMC,

∴ BN ⊥ CM, 故 ∠ANB 为所求二面角的平面角.

∵ CB ⊥ AC, 由三垂线定理, 得 CB ⊥ PC,

在 Rt△PCB 中, CM = MB, 所以 CM = AM.

在等腰三角形 AMC 中,  $AN \cdot MC = \sqrt{CM^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} \cdot AC$ ,

$$\therefore AN = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}. \quad \therefore AB = 2, \quad \therefore \cos \angle ANB = \frac{AN^2 + BN^2 - AB^2}{2 \times AN \times BN} = -\frac{2}{3}$$

故所求的二面角为  $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ .

方法二：因为 PA ⊥ PD, PA ⊥ AB, AD ⊥ AB, 以 A 为坐标原点 AD 长为单位长度, 如图建立空间直角坐标系, 则各点坐标为

A (0, 0, 0) B (0, 2, 0), C (1, 1, 0), D (1, 0, 0), P (0, 0, 1), M (0, 1,  $\frac{1}{2}$ ).

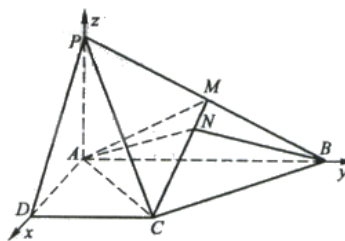
(I) 证明：因  $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1), \overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$ , 故  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ , 所以 AP ⊥ DC.

又由题设知  $AD \perp DC$ ，且  $AP$  与  $AD$  是平面  $PAD$  内的两条相交直线，由此得  $DC \perp$  面  $PAD$ 。  
又  $DC$  在面  $PCD$  上，故面  $PAD \perp$  面  $PCD$ 。

(II) 解：因  $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{PB} = (0, 2, -1)$ ,

故  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$ ,  $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{5}$ ,  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB} = 2$ , 所以

$$\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$



由此得  $AC$  与  $PB$  所成的角为  $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

(III) 解：在  $MC$  上取一点  $N(x, y, z)$ ，则存在  $\lambda \in R$ ，使  $\overrightarrow{NC} = \lambda \overrightarrow{MC}$ ,

$$\overrightarrow{NC} = (1-x, 1-y, -z), \overrightarrow{MC} = (1, 0, -\frac{1}{2}), \therefore x = 1 - \lambda, y = 1, z = \frac{1}{2}\lambda.$$

要使  $AN \perp MC$ ，只需  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$  即  $x - \frac{1}{2}z = 0$ ，解得  $\lambda = \frac{4}{5}$ 。

可知当  $\lambda = \frac{4}{5}$  时， $N$  点坐标为  $(\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5})$ ，能使  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ 。

此时， $\overrightarrow{AN} = (\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5})$ ,  $\overrightarrow{BN} = (\frac{1}{5}, -1, \frac{2}{5})$ ，有  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

由  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ ,  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$  得  $AN \perp MC$ ,  $BN \perp MC$ 。所以  $\angle ANB$  为所求二面角的平面角。

$$\therefore |\overrightarrow{AN}| = \frac{\sqrt{30}}{5}, |\overrightarrow{BN}| = \frac{\sqrt{30}}{5}, \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = -\frac{4}{5}.$$

$$\therefore \cos(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AN}| \cdot |\overrightarrow{BN}|} = -\frac{2}{3}.$$

故所求的二面角为  $\arccos(-\frac{2}{3})$ 。

19. 本小题主要考查二次函数、方程的根与系数关系，考查运用数学知识解决问题的能力。满分 12 分。

解：(I)  $\because f(x) + 2x > 0$  的解集为  $(1, 3)$ .  $f(x) + 2x = a(x-1)(x-3)$ , 且  $a < 0$ . 因而

$$f(x) = a(x-1)(x-3) - 2x = ax^2 - (2+4a)x + 3a. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由方程 } f(x) + 6a = 0 \text{ 得 } ax^2 - (2+4a)x + 9a = 0. \quad \textcircled{2}$$

因为方程②有两个相等的根，所以  $\Delta = [-(2+4a)]^2 - 4a \cdot 9a = 0$ ,

$$\text{即 } 5a^2 - 4a - 1 = 0. \quad \text{解得 } a = 1 \text{ 或 } a = -\frac{1}{5}.$$

由于  $a < 0$ , 舍去  $a = 1$ . 将  $a = -\frac{1}{5}$  代入①得  $f(x)$  的解析式

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}.$$

$$(II) \text{ 由 } f(x) = ax^2 - 2(1+2a)x + 3a = a\left(x - \frac{1+2a}{a}\right)^2 - \frac{a^2 + 4a + 1}{a}$$

及  $a < 0$ , 可得  $f(x)$  的最大值为  $-\frac{a^2 + 4a + 1}{a}$ .

$$\text{由 } \begin{cases} -\frac{a^2 + 4a + 1}{a} > 0, \\ a < 0, \end{cases} \text{ 解得 } a < -2 - \sqrt{3} \text{ 或 } -2 + \sqrt{3} < a < 0.$$

故当  $f(x)$  的最大值为正数时, 实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -2 - \sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3}, 0)$ .

20. 本小题主要考查相互独立事件和互斥事件有一个发生的概率的计算方法, 考查运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

(I) 解: 因为甲坑内的 3 粒种子都不发芽的概率为  $(1 - 0.5)^3 = \frac{1}{8}$ , 所以甲坑不需要补

种的概率为  $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$ .

(II) 解: 3 个坑恰有一个坑不需要补种的概率为  $C_3^1 \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0.041$ .

(III) 解法一: 因为 3 个坑都不需要补种的概率为  $\left(\frac{7}{8}\right)^3$ ,

所以有坑需要补种的概率为  $1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0.330$ .

解法二: 3 个坑中恰有 1 个坑需要补种的概率为  $C_3^1 \times \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 0.287$ ,

恰有 2 个坑需要补种的概率为  $C_3^2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{7}{8} = 0.041$ ,

3 个坑都需要补种的概率为  $C_3^3 \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^0 = 0.002$ .

所以有坑需要补种的概率为  $0.287 + 0.041 + 0.002 = 0.330$ .

21. 本小题主要考查等比数列的基本知识, 考查分析问题能力和推理能力, 满分 12 分.

解: (I) 由  $2^{10}S_{30} - (2^{10} + 1)S_{20} + S_{10} = 0$  得  $2^{10}(S_{30} - S_{20}) = S_{20} - S_{10}$ ,

即  $2^{10}(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{30}) = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}$ ,

可得  $2^{10} \cdot q^{10}(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}) = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}$ .

因为  $a_n > 0$ , 所以  $2^{10}q^{10} = 1$ , 解得  $q = \frac{1}{2}$ , 因而  $a_n = a_1q^{n-1} = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$ .

(II) 因为  $\{a_n\}$  是首项  $a_1 = \frac{1}{2}$ 、公比  $q = \frac{1}{2}$  的等比数列, 故

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}, nS_n = n - \frac{n}{2^n}.$$

则数列  $\{nS_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n = (1 + 2 + \dots + n) - (\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n})$ ,

$$\frac{T_n}{2} = \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) - (\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}).$$

前两式相减, 得  $\frac{T_n}{2} = \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}) + \frac{n}{2^{n+1}}$

$$= \frac{n(n+1)}{4} - \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{即} \quad T_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} - 2.$$

22. 本小题主要考查直线方程、平面向量及椭圆的几何性质等基本知识, 考查综合运用数学知识解决问题及推理的能力. 满分 14 分.

(1) 解: 设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), F(c, 0)$

则直线 AB 的方程为  $y = x - c$ , 代入  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 化简得

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 - a^2b^2 = 0.$$

令  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = \frac{2a^2c}{a^2 + b^2}, x_1x_2 = \frac{a^2c^2 - a^2b^2}{a^2 + b^2}$ .

由  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \vec{a} = (3, -1), \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  与  $\vec{a}$  共线, 得

$$3(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2) = 0, \text{ 又 } y_1 = x_1 - c, y_2 = x_2 - c,$$

$$\therefore 3(x_1 + x_2 - 2c) + (x_1 + x_2) = 0, \quad \therefore x_1 + x_2 = \frac{3}{2}c.$$

$$\text{即 } \frac{2a^2c}{a^2 + b^2} = \frac{3c}{2}, \text{ 所以 } a^2 = 3b^2. \quad \therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{6}a}{3},$$

$$\text{故离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(II) 证明: (1) 知  $a^2 = 3b^2$ , 所以椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  可化为  $x^2 + 3y^2 = 3b^2$ .

设  $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ , 由已知得  $(x, y) = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)$ ,

$$\therefore \begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2, \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2. \end{cases} \because M(x, y) \text{ 在椭圆上}, \therefore (\lambda x_1 + \mu x_2)^2 + 3(\lambda y_1 + \mu y_2)^2 = 3b^2.$$

$$\text{即 } \lambda^2(x_1^2 + 3y_1^2) + \mu^2(x_2^2 + 3y_2^2) + 2\lambda\mu(x_1x_2 + 3y_1y_2) = 3b^2. \textcircled{1}$$

$$\text{由 (1) 知 } x_1 + x_2 = \frac{3c}{2}, a^2 = \frac{3}{2}c^2, b^2 = \frac{1}{2}c^2.$$

$$x_1x_2 = \frac{a^2c^2 - a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{3}{8}c^2$$

$$\begin{aligned} x_1x_2 + 3y_1y_2 &= x_1x_2 + 3(x_1 - c)(x_2 - c) \\ &= 4x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)c + 3c^2 \\ &= \frac{3}{2}c^2 - \frac{9}{2}c^2 + 3c^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{又 } x_1^2 + 3y_1^2 = 3b^2, x_2^2 + 3y_2^2 = 3b^2, \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } \lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

故  $\lambda^2 + \mu^2$  为定值, 定值为 1.