

2007 年吉林高考文科数学真题及答案

注意事项:

1. 本试题卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 4 页, 总分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 考生须将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在本试题卷指定的位置上.
3. 选择题的每小题选出答案后, 用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 不能答在试题卷上.
4. 非选择题必须使用 0.5 毫米的黑色字迹的签字笔在答题卡上书写, 字体工整, 笔迹清楚.
5. 非选择题必须按照题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答. 超出答题区域或在其它题的答题区域内书写的答案无效; 在草稿纸、本试题卷上答题无效.
6. 考试结束, 将本试题卷和答题卡一并交回.

第 I 卷 (选择题)

本卷共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p , 那么

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

1. $\cos 330^\circ = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) = (\quad)$

- A. $\{2\}$ B. $\{3\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{1, 4\}$

3. 函数 $y = |\sin x|$ 的一个单调增区间是 ()

- A. $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

4. 下列四个数中最大的是 ()
- A. $(\ln 2)^2$ B. $\ln(\ln 2)$ C. $\ln \sqrt{2}$ D. $\ln 2$
5. 不等式 $\frac{x-2}{x+3} > 0$ 的解集是 ()
- A. $(-3, 2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$ ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
7. 已知三棱锥的侧棱长的底面边长的 2 倍, 则侧棱与底面所成角的余弦值等于 ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4}$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
9. 把函数 $y = e^x$ 的图像按向量 $\mathbf{a} = (2, 3)$ 平移, 得到 $y = f(x)$ 的图像, 则 $f(x) =$ ()
- A. $e^x + 2$ B. $e^x - 2$ C. e^{x-2} D. e^{x+2}
10. 5 位同学报名参加两个课外活动小组, 每位同学限报其中的一个小组, 则不同的报名方法共有 ()
- A. 10 种 B. 20 种 C. 25 种 D. 32 种
11. 已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍, 则椭圆的离心率等于 ()
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
12. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点. 若点 P 在双曲线上, 且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| =$ ()
- A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{10}$ C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

第 II 卷 (非选择题)

本卷共 10 题, 共 90 分

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 一个总体含有 100 个个体，以简单随机抽样方式从该总体中抽取一个容量为 5 的样本，则指定的某个个体被抽到的概率为_____.

14. 已知数列的通项 $a_n = -5n + 2$ ，则其前 n 项和 $S_n =$ _____.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为_____ cm^2 .

16. $(1 + 2x^2)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为_____. (用数字作答)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q < 1$ ，前 n 项和为 S_n . 已知 $a_3 = 2$ ， $S_4 = 5S_2$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，已知内角 $A = \frac{\pi}{3}$ ，边 $BC = 2\sqrt{3}$. 设内角 $B = x$ ，周长为 y .

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式和定义域；

(2) 求 y 的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

从某批产品中，有放回地抽取产品二次，每次随机抽取 1 件，假设事件 A ：“取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A) = 0.96$.

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p ；

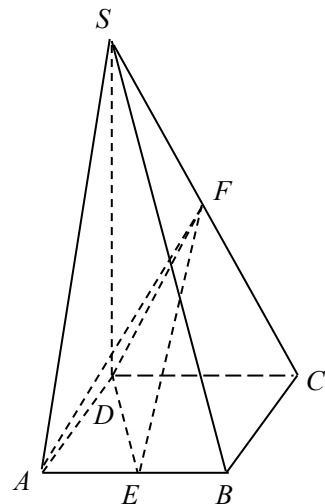
(2) 若该批产品共 100 件，从中任意抽取 2 件，求事件 B ：“取出的 2 件产品中至少有一件二等品”的概率 $P(B)$.

20. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $S - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $SD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E, F 分别为 AB, SC 的中点.

(1) 证明 $EF \parallel$ 平面 SAD ；

(2) 设 $SD = 2DC$ ，求二面角 $A - EF - D$ 的大小.



21. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x - \sqrt{3}y = 4$ 相切.

(1) 求圆 O 的方程;

(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A, B 两点，圆内的动点 P 使 $|PA|, |PO|, |PB|$ 成等比数列，求

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - bx^2 + (2-b)x + 1$

在 $x = x_1$ 处取得极大值，在 $x = x_2$ 处取得极小值，且 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.

(1) 证明 $a > 0$;

(2) 若 $z = a + 2b$, 求 z 的取值范围.

参考答案

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

1. C 2. B 3. C 4. D 5. C 6. A
7. A 8. A 9. C 10. D 11. D 12. B

二、填空题

13. $\frac{1}{20}$ 14. $\frac{-5n^2 - n}{2}$ 15. $2 + 4\sqrt{2}$

三、解答题

17. 解: 由题设知 $a_1 \neq 0$, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 q^2 = 2, \\ \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 5 \times \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}. \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

由②得 $1 - q^4 = 5(1 - q^2)$, $(q^2 - 4)(q^2 - 1) = 0$, $(q - 2)(q + 2)(q - 1)(q + 1) = 0$,

因为 $q < 1$ ，解得 $q = -1$ 或 $q = -2$ 。

当 $q = -1$ 时，代入①得 $a_1 = 2$ ，通项公式 $a_n = 2 \times (-1)^{n-1}$ ；

当 $q = -2$ 时，代入①得 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，通项公式 $a_n = \frac{1}{2} \times (-2)^{n-1}$ 。

18. 解：(1) $\triangle ABC$ 的内角和 $A+B+C = \pi$ ，由 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $B > 0$ ， $C > 0$ 得 $0 < B < \frac{2\pi}{3}$ 。

应用正弦定理，知

$$AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin x = 4 \sin x,$$

$$AB = \frac{BC}{\sin A} \sin C = 4 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right).$$

因为 $y = AB + BC + AC$ ，

$$\text{所以 } y = 4 \sin x + 4 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) + 2\sqrt{3} \left(0 < x < \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 因为 } y &= 4 \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) + 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \right), \end{aligned}$$

所以，当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时， y 取得最大值 $6\sqrt{3}$ 。

19. (1) 记 A_0 表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”，

A_1 表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”。

则 A_0 ， A_1 互斥，且 $A = A_0 + A_1$ ，故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0 + A_1) \\ &= P(A_0) + P(A_1) \\ &= (1-p)^2 + C_2^1 p(1-p) \\ &= 1-p^2 \end{aligned}$$

于是 $0.96 = 1 - p^2$ 。

解得 $p_1 = 0.2$, $p_2 = -0.2$ (舍去).

(2) 记 B_0 表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”,

则 $B = \overline{B_0}$.

若该批产品共 100 件, 由 (1) 知其中二等品有 $100 \times 0.2 = 20$ 件, 故

$$P(B_0) = \frac{C_{80}^2}{C_{100}^2} = \frac{316}{495}.$$

$$P(B) = P(\overline{B_0}) = 1 - P(B_0) = 1 - \frac{316}{495} = \frac{179}{495}$$

20. 解法一:

(1) 作 $FG \parallel DC$ 交 SD 于点 G , 则 G 为 SD 的中点.

连结 AG , $FG \parallel \frac{1}{2}CD$, 又 $CD \parallel AB$,

故 $FG \parallel AE$, $AEFG$ 为平行四边形.

$EF \parallel AG$, 又 $AG \subset$ 平面 SAD , $EF \not\subset$ 平面 SAD .

所以 $EF \parallel$ 平面 SAD .

(2) 不妨设 $DC = 2$, 则 $SD = 4$, $DG = 2$, $\triangle ADG$ 为等腰直角三角形.

取 AG 中点 H , 连结 DH , 则 $DH \perp AG$.

又 $AB \perp$ 平面 SAD , 所以 $AB \perp DH$, 而 $AB \cap AG = A$,

所以 $DH \perp$ 面 AEF .

取 EF 中点 M , 连结 MH , 则 $HM \perp EF$.

连结 DM , 则 $DM \perp EF$.

故 $\angle DMH$ 为二面角 $A-EF-D$ 的平面角

$$\tan \angle DMH = \frac{DH}{HM} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

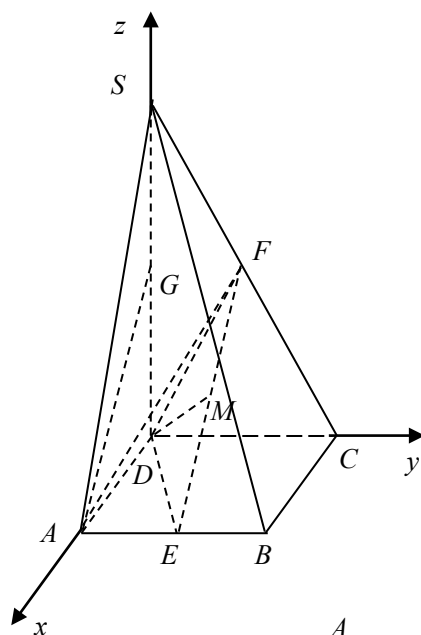
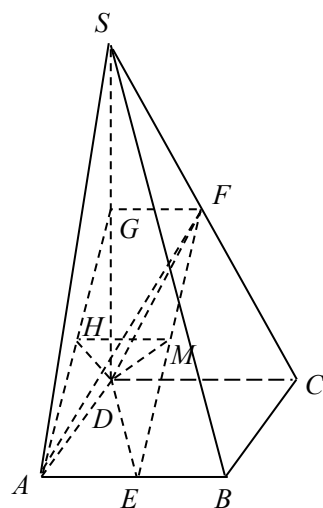
所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arctan \sqrt{2}$.

解法二: (1) 如图, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

设 $A(a, 0, 0)$, $S(0, 0, b)$, 则 $B(a, a, 0)$, $C(0, a, 0)$,

$$E\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), F\left(0, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(-a, 0, \frac{b}{2}\right).$$



取 SD 的中点 $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$, 则 $\overrightarrow{AG} = \left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$, $EF \parallel AG$, $AG \subset$ 平面 SAD , $EF \not\subset$ 平面 SAD ,
所以 $EF \parallel$ 平面 SAD .

(2) 不妨设 $A(1,0,0)$, 则 $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $S(0,0,2)$, $E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

EF 中点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MD} = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{EF} = (-1,0,1)$, $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, $MD \perp EF$

又 $\overrightarrow{EA} = \left(0,-\frac{1}{2},0\right)$, $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, $EA \perp EF$,

所以向量 \overrightarrow{MD} 和 \overrightarrow{EA} 的夹角等于二面角 $A-EF-D$ 的平面角.

$$\cos \langle \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{EA} \rangle = \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EA}}{|\overrightarrow{MD}| \cdot |\overrightarrow{EA}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

21. 解: (1) 依题设, 圆 O 的半径 r 等于原点 O 到直线 $x - \sqrt{3}y = 4$ 的距离,

$$\text{即 } r = \frac{4}{\sqrt{1+3}} = 2.$$

得圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$.

(2) 不妨设 $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$, $x_1 < x_2$. 由 $x^2 = 4$ 即得

$$A(-2,0), B(2,0).$$

设 $P(x, y)$, 由 $|PA|, |PO|, |PB|$ 成等比数列, 得

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x^2 + y^2,$$

$$\text{即 } x^2 - y^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (-2-x, -y) \cdot (2-x, -y) \\ &= x^2 - 4 + y^2 \\ &= 2(y^2 - 1). \end{aligned}$$

由于点 P 在圆 O 内, 故
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

由此得 $y^2 < 1$.

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2, 0)$.

22. 解: 求函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = ax^2 - 2bx + 2 - b$.

(I) 由函数 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 处取得极大值, 在 $x = x_2$ 处取得极小值, 知 x_1, x_2 是 $f'(x) = 0$ 的两个根.

所以 $f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

当 $x < x_1$ 时, $f(x)$ 为增函数, $f'(x) > 0$, 由 $x - x_1 < 0, x - x_2 < 0$ 得 $a > 0$.

(II) 在题设下, $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ 等价于
$$\begin{cases} f'(0) > 0 \\ f'(1) < 0 \\ f'(2) > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2 - b > 0 \\ a - 2b + 2 - b < 0 \\ 4a - 4b + 2 - b > 0 \end{cases} .$$

化简得
$$\begin{cases} 2 - b > 0 \\ a - 3b + 2 < 0 \\ 4a - 5b + 2 > 0 \end{cases} .$$

此不等式组表示的区域为平面 aOb 上三条直线 $2 - b = 0, a - 3b + 2 = 0, 4a - 5b + 2 = 0$.

所围成的 $\triangle ABC$ 的内部, 其三个顶点分别为: $A\left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right), B(2, 2), C(4, 2)$.

z 在这三点的值依次为 $\frac{16}{7}, 6, 8$.

所以 z 的取值范围为 $\left(\frac{16}{7}, 8\right)$.

