2004年江西高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分．共 150 分．考试时间 120 分钟．

第 I 卷（选择题　共 60 分）

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

P（A+B）=P（A）+P（B）

如果事件 A、B 相互独立，那么

P（A•B）=P（A）•P（B）

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径，

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，

其中 R 表示球的半径

一、选择题 ：本大题共 12 小题，每小题 6 分，共 60。

1．$(1-i)^2\cdot i=$　　　　　　（　　）

A．$2-2i$　　B．$2+2i$　　C．-2　　D．2

2．已知函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$.若$f(a)=b$.则$f(-a)=$　　　　　　（　　）

A．b　　B．－b　　C．$\frac{1}{b}$　　D．$-\frac{1}{b}$

3．已知 a、b 均为单位向量，它们的夹角为 60°，那么|a+3b|=　　　　　　（　　）

A．$\sqrt{7}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{13}$　　D．4

4．函数 $y=\sqrt{x-1}+1(x\geq 1)$ 的反函数是　　　　　　（　　）

A．$y=x^2-2x+2(x<1)$　　B．$y=x^2-2x+2(x\geqslant 1)$

C．$y=x^2-2x\ (x<1)$　　D．$y=x^2-2x\ (x\geqslant 1)$

5．$(2x^3-\frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中常数项是　　　　　　（　　）

A．14　　B．－14　　C．42　　D．－42

6．设 A、B、I 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是　　　　　　（　　）

A．$(\complement_I A)\cup B=I$　　B．$(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C．$A\cap(\complement_I B)=\phi$　　D．$(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\complement_I B$

7．椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点为 F_1、F_2，过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交，一个交点为 P，则$|\overrightarrow{PF_2}|=$　　　　　　（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. $\frac{7}{2}$　　　　D. 4

8．设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q，若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点，则直线 l 的斜率的取值范围是　　　　（　　）

A. $[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$　　　　B. [－2，2]　　　　C. [－1，1]　　　　D. [－4，4]

9．为了得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象，可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图象　　　　（　　）

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　　　D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

10．已知正四面体 ABCD 的表面积为 S，其四个面的中心分别为 E、F、G、H. 设四面体 EFGH 的表面积为 T，则 $\frac{T}{S}$ 等于　　　　（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　　　B. $\frac{4}{9}$　　　　C. $\frac{1}{4}$　　　　D. $\frac{1}{3}$

11．从数字 1，2，3，4，5，中，随机抽取 3 个数字（允许重复）组成一个三位数，其各位数字之和等于 9 的概率为　　　　（　　）

A. $\frac{13}{125}$　　　　B. $\frac{16}{125}$　　　　C. $\frac{18}{125}$　　　　D. $\frac{19}{125}$

12．$a^2+b^2=1, b^2+c^2=2, c^2+a^2=2$，则 $ab+bc+ca$ 的最小值为　　　　（　　）

A. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$　　　　C. $-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$　　　　D. $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

第Ⅱ卷（非选择题 共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13．不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是______________ .

14．由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA、PB，切点分别为 A、B，∠APB=60°，则动点 P 的轨迹方程为____________________ .

15．已知数列$\{a_n\}$，满足$a_1=1$，$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n\geq 2)$，则$\{a_n\}$的通项

$$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & ,n\geq 2.\end{cases}$$

16．已知a、b为不垂直的异面直线，α是一个平面，则a、b在α上的射影有可能是_______．

①两条平行直线　　　　　　②两条互相垂直的直线

③同一条直线　　　　　　　④一条直线及其外一点

在一面结论中，正确结论的编号是________________（写出所有正确结论的编号）．

三、解答题：本大题共6小题，共74分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分12分）

求函数$f(x)=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x}{2-\sin 2x}$的最小正周期、最大值和最小值.

18．（本小题满分12分）

一接待中心有A、B、C、D四部热线电话，已知某一时刻电话A、B占线的概率均为0.5，电话C、D占线的概率均为0.4，各部电话是否占线相互之间没有影响.假设该时刻有ξ部电话占线.试求随机变量ξ的概率分布和它的期望.

19.（本小题满分 12 分）

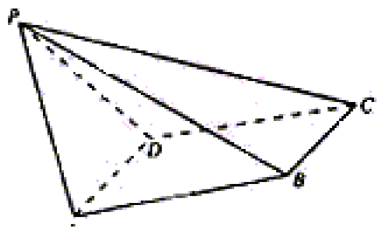
已知$a \in R$,求函数$f(x)=x^2e^{ax}$的单调区间.

20.（本小题满分 12 分）

如图，已知四棱锥 P—ABCD，PB⊥AD 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形，底面 ABCD 为菱形，侧面 PAD 与底面 ABCD 所成的二面角为 120°.

（I）求点 P 到平面 ABCD 的距离，

（II）求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



21．（本小题满分 12 分）

设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$与直线$l: x+y=1$相交于两个不同的点 A、B.

（I）求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围：

（II）设直线 l 与 y 轴的交点为 P，且$\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$.求 a 的值.

22.（本小题满分 14 分）

已知数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，且

$$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k,$$

$$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k,$$

其中 k=1, 2, 3, …….

（I）求 a_3，a_5；

（II）求{ a_n}的通项公式.

2004年高考理科数学答案

一、选择题

DBCBABCCBADB

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分.把答案填在题中横线上.

13．$\{x|x\geqslant -1\}$　　14．$x^2+y^2=4$　　15．$\dfrac{n!}{2}$　　16．①②④

三、解答题

17．本小题主要考查三角函数基本公式和简单的变形，以及三角函娄的有关性质.满分12分.

解：$f(x)=\dfrac{(\sin^2x+\cos^2x)^2-\sin^2x\cos^2x}{2-2\sin x\cos x}$

$$=\frac{1-\sin^2x\cos^2x}{2(1-\sin x\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2}(1+\sin x\cos x)$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}$$

所以函数$f(x)$的最小正周期是π，最大值是$\dfrac{3}{4}$，最小值是$\dfrac{1}{4}$.

18．本小题主要考查离散型随机变量分布列和数学期望等概念.考查运用概率知识解决实际问题的能力.满分12分.

解：P(ξ=0)=$0.5^2\times0.6^2=0.09$.

P(ξ=1)=$C_2^1\times0.5^2\times0.6^2+C_2^1\times0.5^2\times0.4\times0.6=0.3$

P(ξ=2)= $C_2^2\times0.5^2\times0.6^2+C_2^1C_2^1\times0.5^2\times0.4\times0.6+C_2^2\times0.5^2\times0.4^2=0.37$.

P(ξ=3)= $C_2^2C_2^1\times0.5^2\times0.4\times0.6+C_2^1C_2^2\times0.5^2\times0.4^2=0.2$

P(ξ=4)= $0.5^2\times0.4^2=0.04$

于是得到随机变量ξ的概率分布列为：

ξ	0	1	2	3	4
P	0.09	0.3	0.37	0.2	0.04

所以Eξ=0×0.09+1×0.3+2×0.37+3×0.2+4×0.04=1.8.

19．本小题主要考查导数的概率和计算，应用导数研究函数性质的方法，考查分类讨论的数学思想.满分12分.

解：函数$f(x)$的导数：

$$f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(2x++ax^2)e^{ax}.$$

（I）当a=0时，若x<0，则$f'(x)$<0，若x>0,则$f'(x)$>0.

所以当a=0时，函数$f(x)$在区间（－∞，0）内为减函数，在区间（0，+∞）内为增函数.

（II）当$a>0$时,由$2x+ax^2>0$,解得$x<-\dfrac{2}{a}$或$x>0$,

由 $2x+ax^2<0$,解得 $-\frac{2}{a}<x<0.$

所以，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，$-\frac{2}{a}$）内为增函数，在区间（$-\frac{2}{a}$，0）内为减函数，在区间（0，$+\infty$）内为增函数；

（III）当 $a<0$ 时，由 $2x+ax^2>0$，解得 $0<x<-\frac{2}{a}$,

由 $2x+ax^2<0$，解得 $x<0$ 或 $x>-\frac{2}{a}$.

所以当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，0）内为减函数，在区间（0，$-\frac{2}{a}$）内为增函数，在区间（$-\frac{2}{a}$，$+\infty$）内为减函数.

20．本小题主要考查棱锥，二面角和线面关系等基本知识，同时考查空间想象能力和推理、运算能力.满分12分.

（I）解：如图，作 PO⊥平面 ABCD，垂足为点 O.连结 OB、OA、OD、OB 与 AD 交于点 E，连结 PE.

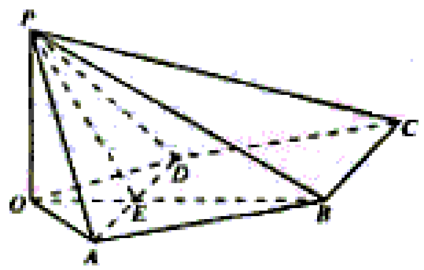
∵AD⊥PB，∴AD⊥OB，

∵PA=PD，∴OA=OD，

于是 OB 平分 AD，点 E 为 AD 的中点，所以 PE⊥AD.

由此知∠PEB 为面 PAD 与面 ABCD 所成二面角的平面角，

∴∠PEB=120°，∠PEO=60°



由已知可求得 PE=$\sqrt{3}$

∴PO=PE・sin60° $=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$,

即点 P 到平面 ABCD 的距离为 $\frac{3}{2}$.

（II）解法一：如图建立直角坐标系，其中 O 为坐标原点，x 轴平行于 DA.

$P(0,0,\frac{3}{2}),B(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0),PB$中点$G$的坐标为$(0,\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4})$. 连结 AG.

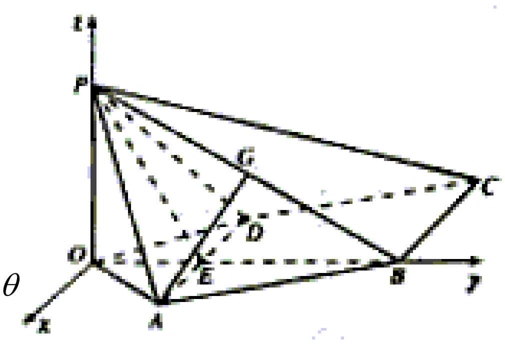
又知 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0),C(-2,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$.由此得到：

$\overrightarrow{GA}=(1,-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4}),$

$\overrightarrow{PB}=(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}),\overrightarrow{BC}=(-2,0,0).$

于是有$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

所以$\overrightarrow{GA}\perp\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{GA},\overrightarrow{BC}$的夹角$\theta$



等于所求二面角的平面角，

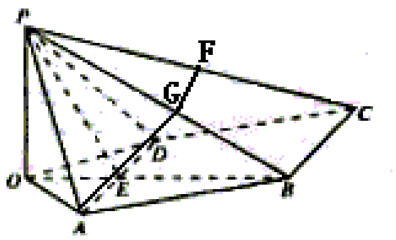
于是 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,

所以所求二面角的大小为 $\pi-\arccos\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

解法二：如图，取 PB 的中点 G，PC 的中点 F，连结 EG、AG、GF，则 AG⊥PB，FG//BC，FG=$\dfrac{1}{2}$BC.

∵AD⊥PB，∴BC⊥PB，FG⊥PB，

∴∠AGF 是所求二面角的平面角.



∵AD⊥面 POB，∴AD⊥EG.

又∵PE=BE，∴EG⊥PB，且∠PEG=60°.

在 Rt△PEG 中，EG=PE・cos60° =$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

在 Rt△PEG 中，EG=$\dfrac{1}{2}$AD=1.

于是 tan∠GAE=$\dfrac{EG}{AE}$=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

又∠AGF=π－∠GAE.

所以所求二面角的大小为π－arctan$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

21.（本小题主要考查直线和双曲线的概念和性质，平面向量的运算等解析几何的基本思想和综合解题能力.满分 12 分.

解：（I）由 C 与 t 相交于两个不同的点，故知方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1,\\ x+y=1.\end{cases}$$

有两个不同的实数解.消去 y 并整理得

（1－a^2）x^2+2a^2x－2a^2=0. ①

所以 $\begin{cases}1-a^2\neq 0.\\ 4a^4+8a^2(1-a^2)>0.\end{cases}$

解得 $0<a<\sqrt{2}$ 且 $a\neq 1$.

双曲线的离心率

$e=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}.$

$\because 0<a<\sqrt{2}$且$a\neq 1,$

$\therefore e>\frac{\sqrt{6}}{2}$且$e\neq\sqrt{2}$

即离心率e的取值范围为$(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty).$

（II）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(0,1)$

$\because \overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB},$

$\therefore (x_1,y_1-1)=\frac{5}{12}(x_2,y_2-1).$

由此得$x_1=\frac{5}{12}x_2.$

由于 x_1+x_2 都是方程①的根，且 $1-a^2\neq 0$，

所以$\frac{17}{12}x_2=-\frac{2a^2}{1-a^2}.$

$\frac{5}{12}x_2^2=-\frac{2a^2}{1-a^2}.$

消去,x_2,得$-\frac{2a^2}{1-a^2}=\frac{289}{60}$

由$a>0$,所以$a=\frac{17}{13}$

22．本小题主要考查数列，等比数列的概念和基本知识，考查运算能力以及分析、归纳和推理能力.满分 14 分.

解：（I） $a_2=a_1+(-1)^1=0,$

$a_3=a_2+3^1=3.$

$a_4=a_3+(-1)^2=4,$

$a_5=a_4+3^2=13,$

所以，$a_3=3$, $a_5=13.$

(II)　$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$

$=a_{2k-1}+(-1)^k+3^k,$

所以 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=3^k+(-1)^k,$

同理 $a_{2k-1}-a_{2k-3}=3^{k-1}+(-1)^{k-1},$

……

$a_3-a_1=3+(-1).$

所以$(a_{2k+1}-a_{2k-1})+(a_{2k-1}-a_{2k-3})+\cdots+(a_3-a_1)$

$=(3^k+3^{k-1}+\cdots+3)+[(-1)^k+(-1)^{k-1}+\cdots+(-1)],$

由此得 $a_{2k+1}-a_1=\frac{3}{2}(3^k-1)+\frac{1}{2}[(-1)^k-1],$

于是 $a_{2k+1}=\dfrac{3^{k+1}}{2}+\dfrac{1}{2}(-1)^{k}-1.$

$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^{k}$

$=\dfrac{3^{k}}{2}+\dfrac{1}{2}(-1)^{k-1}-1+(-1)^{k}$

$=\dfrac{3^{k}}{2}+\dfrac{1}{2}(-1)^{k}=1.$

$\{a_n\}$的通项公式为：

当 n 为奇数时，$a_n=\dfrac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2}+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\times\dfrac{1}{2}-1;$

当 n 为偶数时，$a_n=\dfrac{3^{\frac{n}{2}}}{2}+(-1)^{\frac{n}{2}}\times\dfrac{1}{2}-1.$