

2017年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅲ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. （5分）已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $B=\{2, 4, 6, 8\}$ ，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】11：计算题；37：集合思想；40：定义法；5J：集合.

【分析】利用交集定义先求出 $A\cap B$ ，由此能求出 $A\cap B$ 中元素的个数.

【解答】解： \because 集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $B=\{2, 4, 6, 8\}$ ，

$\therefore A\cap B=\{2, 4\}$ ，

$\therefore A\cap B$ 中元素的个数为2.

故选：B.

【点评】本题考查交集中元素个数的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意交集定义的合理运用.

2. （5分）复平面内表示复数 $z=i(-2+i)$ 的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【考点】A4：复数的代数表示法及其几何意义.

【专题】35：转化思想；5N：数系的扩充和复数.

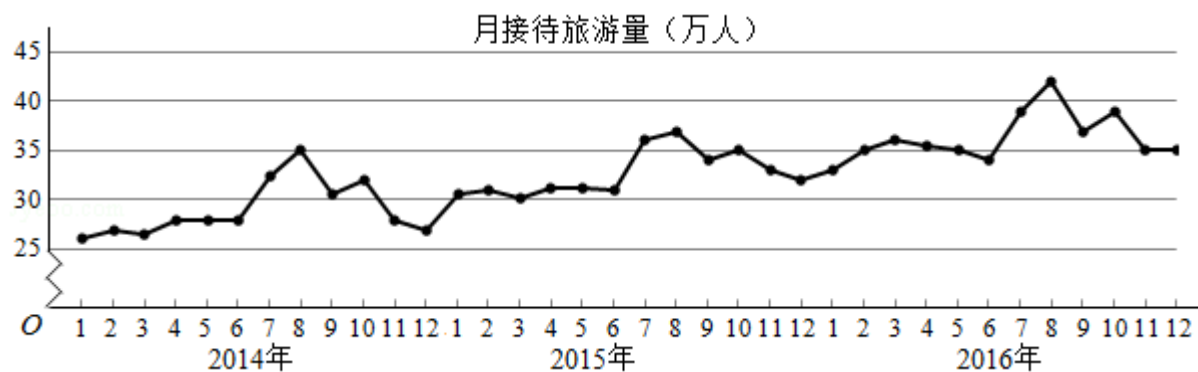
【分析】利用复数的运算法则、几何意义即可得出.

【解答】解： $z=i(-2+i)=-2i-1$ 对应的点 $(-1, -2)$ 位于第三象限.

故选：C.

【点评】本题考查了复数的运算法则、几何意义，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3. (5分) 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了2014年1月至2016年12月期间月接待游客量(单位: 万人)的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是()

- A. 月接待游客量逐月增加
- B. 年接待游客量逐年增加
- C. 各年的月接待游客量高峰期大致在7, 8月
- D. 各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月, 波动性更小, 变化比较平稳

【考点】 2K: 命题的真假判断与应用; B9: 频率分布折线图、密度曲线.

【专题】 27: 图表型; 2A: 探究型; 5I: 概率与统计.

【分析】 根据已知中2014年1月至2016年12月期间月接待游客量(单位: 万人)的数据, 逐一分析给定四个结论的正误, 可得答案.

【解答】 解: 由已知中2014年1月至2016年12月期间月接待游客量(单位: 万人)的数据可得:

月接待游客量逐月有增有减, 故A错误;

年接待游客量逐年增加, 故B正确;

各年的月接待游客量高峰期大致在7, 8月, 故C正确;

各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月, 波动性更小, 变化比较平稳, 故D正确;

故选: A.

【点评】 本题考查的知识点是数据的分析，命题的真假判断与应用，难度不大，属于基础题.

4. (5分) 已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

【考点】 GS: 二倍角的三角函数.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 40: 定义法; 56: 三角函数的求值.

【分析】 由条件, 两边平方, 根据二倍角公式和平方关系即可求出.

【解答】 解: $\because \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{3}$,

$$\therefore (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \sin 2\alpha = \frac{16}{9},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = -\frac{7}{9},$$

故选: A.

【点评】 本题考查了二倍角公式, 属于基础题.

5. (5分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x+2y-6 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的取值范围是 ()

- A. $[-3, 0]$ B. $[-3, 2]$ C. $[0, 2]$ D. $[0, 3]$

【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 5T: 不等式.

【分析】 画出约束条件的可行域, 利用目标函数的最优解求解目标函数的范围即可.

【解答】 解: x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x+2y-6 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的可行域如图:

目标函数 $z=x-y$, 经过可行域的A, B时, 目标函数取得最值,

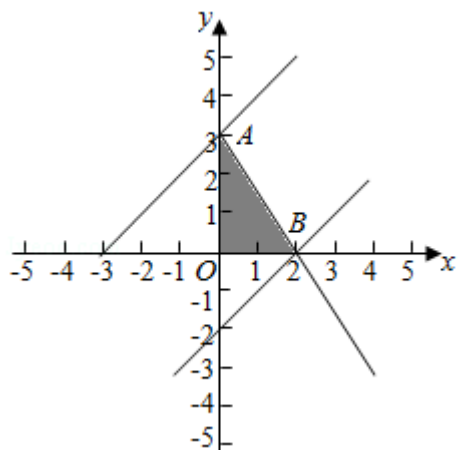
$$\text{由} \begin{cases} x=0 \\ 3x+2y-6=0 \end{cases} \text{解得A} (0, 3),$$

由 $\begin{cases} y=0 \\ 3x+2y-6=0 \end{cases}$ 解得 $B(2, 0)$,

目标函数的最大值为：2，最小值为：-3，

目标函数的取值范围：[-3, 2].

故选：B.



【点评】 本题考查线性规划的简单应用，目标函数的最优解以及可行域的作法是解题的关键.

6. (5分) 函数 $f(x) = \frac{1}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6})$ 的最大值为 ()

A. $\frac{6}{5}$

B. 1

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

【考点】 HW: 三角函数的最值.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 57: 三角函数的图像与性质.

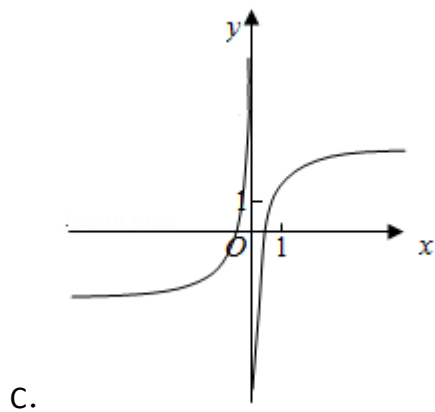
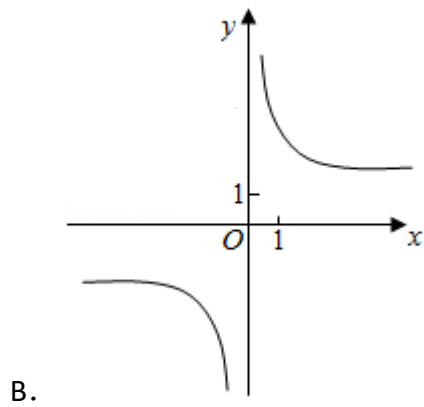
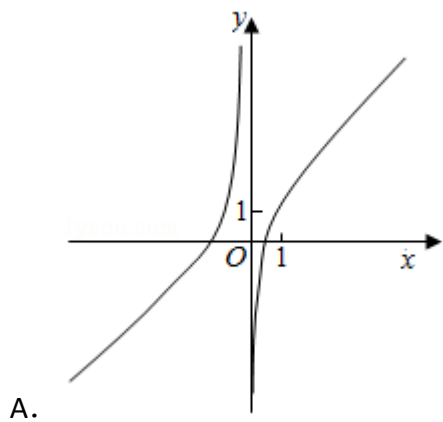
【分析】 利用诱导公式化简函数的解析式，通过正弦函数的最值求解即可.

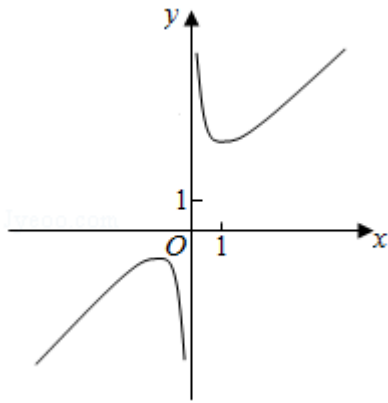
【解答】 解：函数 $f(x) = \frac{1}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6})$
 $= \frac{1}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3})$
 $= \frac{6}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) \leq \frac{6}{5}.$

故选：A.

【点评】 本题考查诱导公式的应用，三角函数的最值，正弦函数的有界性，考查计算能力.

7. (5分) 函数 $y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$ 的部分图象大致为 ()





D.

【考点】 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 51: 函数的性质及应用

【分析】 通过函数的解析式, 利用函数的奇偶性的性质, 函数的图象经过的特殊点判断函数的图象即可.

【解答】 解: 函数 $y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$, 可知: $f(x)=x+\frac{\sin x}{x^2}$ 是奇函数, 所以函数的图象关于原点对称,

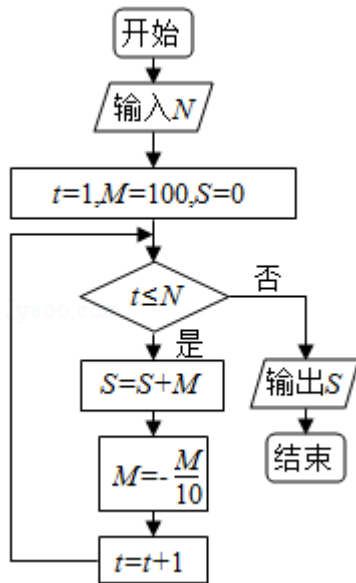
则函数 $y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$ 的图象关于 $(0, 1)$ 对称,

当 $x \rightarrow 0^+$, $f(x) > 0$, 排除A、C, 当 $x=\pi$ 时, $y=1+\pi$, 排除B.

故选: D.

【点评】 本题考查函数的图象的判断, 函数的奇偶性以及特殊点是常用方法.

8. (5分) 执行如图的程序框图, 为使输出S的值小于91, 则输入的正整数N的最小值为 ()



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【考点】EF：程序框图.

【专题】11：计算题；39：运动思想；49：综合法；5K：算法和程序框图.

【分析】通过模拟程序，可得到S的取值情况，进而可得结论.

【解答】解：由题可知初始值 $t=1$ ， $M=100$ ， $S=0$ ，

要使输出S的值小于91，应满足“ $t \leq N$ ”，

则进入循环体，从而 $S=100$ ， $M=-10$ ， $t=2$ ，

要使输出S的值小于91，应接着满足“ $t \leq N$ ”，

则进入循环体，从而 $S=90$ ， $M=1$ ， $t=3$ ，

要使输出S的值小于91，应不满足“ $t \leq N$ ”，跳出循环体，

此时N的最小值为2，

故选：D.

【点评】本题考查程序框图，判断出什么时候跳出循环体是解决本题的关键，注意解题方法的积累，属于中档题.

9. (5分) 已知圆柱的高为1，它的两个底面的圆周在直径为2的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为 ()

A. π

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}$

【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LR：球内接多面体.

【专题】11：计算题；34：方程思想；40：定义法；5Q：立体几何.

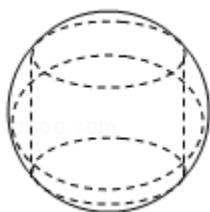
【分析】推导出该圆柱底面圆周半径 $r = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，由此能求出该圆柱的体积.

【解答】解：∵圆柱的高为1，它的两个底面的圆周在直径为2的同一个球的球面上，

$$\therefore \text{该圆柱底面圆周半径 } r = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{该圆柱的体积: } V = Sh = \pi \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \times 1 = \frac{3\pi}{4}.$$

故选：B.



【点评】本题考查圆柱的体积的求法，考查圆柱、球等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查化归与转化思想，是中档题.

10. (5分) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，E为棱CD的中点，则 ()

- A. $A_1E \perp DC_1$ B. $A_1E \perp BD$ C. $A_1E \perp BC_1$ D. $A_1E \perp AC$

【考点】LO：空间中直线与直线之间的位置关系.

【专题】11：计算题；31：数形结合；41：向量法；5G：空间角.

【分析】法一：连 B_1C ，推导出 $BC_1 \perp B_1C$ ， $A_1B_1 \perp BC_1$ ，从而 $BC_1 \perp$ 平面 A_1ECB_1 ，由此得到 $A_1E \perp BC_1$.

法二：以D为原点，DA为x轴，DC为y轴， DD_1 为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出结果.

【解答】解：法一：连 B_1C ，由题意得 $BC_1 \perp B_1C$ ，

$\because A_1B_1 \perp \text{平面} B_1BCC_1$, 且 $BC_1 \subset \text{平面} B_1BCC_1$,

$\therefore A_1B_1 \perp BC_1$,

$\because A_1B_1 \cap B_1C = B_1$,

$\therefore BC_1 \perp \text{平面} A_1ECB_1$,

$\because A_1E \subset \text{平面} A_1ECB_1$,

$\therefore A_1E \perp BC_1$.

故选: C.

法二: 以D为原点, DA为x轴, DC为y轴, DD_1 为z轴, 建立空间直角坐标系,

设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中棱长为2,

则 $A_1(2, 0, 2)$, $E(0, 1, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $C_1(0, 2, 2)$,
 $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$,

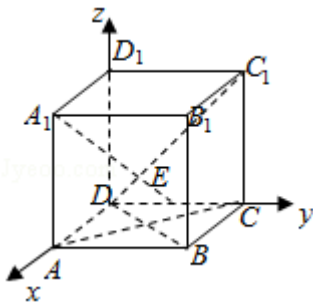
$\overrightarrow{A_1E} = (-2, 1, -2)$, $\overrightarrow{DC_1} = (0, 2, 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-2, -2, 0)$,

$\overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$,

$\because \overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{DC_1} = -2$, $\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{BD} = 2$, $\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$, $\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$,

$\therefore A_1E \perp BC_1$.

故选: C.



【点评】 本题考查线线垂直的判断, 是中档题, 解题时要认真审题, 注意向量法的合理运用.

11. (5分) 已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ,

且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切, 则C的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

【考点】 K4: 椭圆的性质.

【专题】 34: 方程思想; 5B: 直线与圆; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切, 可得原点到直线的

$$\text{距离} \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = a, \text{ 化简即可得出.}$$

【解答】 解: 以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切,

$$\therefore \text{原点到直线的距离} \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = a, \text{ 化为: } a^2 = 3b^2.$$

$$\therefore \text{椭圆C的离心率} e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故选: A.

【点评】 本题考查了椭圆的标准方程及其性质、直线与圆相切的性质、点到直线的距离公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

12. (5分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【考点】 52: 函数零点的判定定理.

【专题】 11: 计算题; 33: 函数思想; 49: 综合法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 通过转化可知问题等价于函数 $y = 1 - (x - 1)^2$ 的图象与 $y = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象只有一个交点求 a 的值. 分 $a = 0$ 、 $a < 0$ 、 $a > 0$ 三种情况, 结合函数的单调性分析可得结论.

【解答】 解: 因为 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1}) = -1 + (x - 1)^2 + a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$
 $= 0$,

所以函数 $f(x)$ 有唯一零点等价于方程 $1 - (x - 1)^2 = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 有唯一解

,
等价于函数 $y = 1 - (x - 1)^2$ 的图象与 $y = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象只有一个交点.

①当 $a=0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x \geq -1$, 此时有两个零点, 矛盾;

②当 $a < 0$ 时, 由于 $y = 1 - (x - 1)^2$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增、在 $(1, +\infty)$ 上递减

,
且 $y = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增、在 $(1, +\infty)$ 上递减,

所以函数 $y = 1 - (x - 1)^2$ 的图象的最高点为 $A(1, 1)$, $y = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 的图

象的最高点为 $B(1, 2a)$,

由于 $2a < 0 < 1$, 此时函数 $y = 1 - (x - 1)^2$ 的图象与 $y = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 的图象有两

个交点, 矛盾;

③当 $a > 0$ 时, 由于 $y = 1 - (x - 1)^2$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增、在 $(1, +\infty)$ 上递减

,
且 $y = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递减、在 $(1, +\infty)$ 上递增,

所以函数 $y = 1 - (x - 1)^2$ 的图象的最高点为 $A(1, 1)$, $y = a(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}})$ 的图

象的最低点为 $B(1, 2a)$,

由题可知点 A 与点 B 重合时满足条件, 即 $2a = 1$, 即 $a = \frac{1}{2}$, 符合条件;

综上所述, $a = \frac{1}{2}$,

故选: C.

【点评】 本题考查函数零点的判定定理, 考查函数的单调性, 考查运算求解能力, 考查数形结合能力, 考查转化与化归思想, 考查分类讨论的思想, 注意解题方法的积累, 属于难题.

二、填空题

13. (5分) 已知向量 $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (3, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m = \underline{2}$.

【考点】 9T: 数量积判断两个平面向量的垂直关系.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 40: 定义法; 5A: 平面向量及应用.

【分析】 利用平面向量数量积坐标运算法则和向量垂直的性质求解.

【解答】 解: \because 向量 $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (3, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 3m = 0,$$

解得 $m=2$.

故答案为: 2.

【点评】 本题考查实数值的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意平面向量数量积坐标运算法则和向量垂直的性质的合理运用.

14. (5分) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{3}{5}x$, 则 $a = \underline{5}$.

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 利用双曲线方程, 求出渐近线方程, 求解 a 即可.

【解答】 解: 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{3}{5}x$,

可得 $\frac{3}{a} = \frac{3}{5}$, 解得 $a=5$.

故答案为: 5.

【点评】 本题考查双曲线的简单性质的应用, 考查计算能力.

15. (5分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $C=60^\circ$, $b=\sqrt{6}$, $c=3$, 则 $A = \underline{75^\circ}$.

【考点】 HP: 正弦定理; HR: 余弦定理.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 40: 定义法; 58: 解三角形.

【分析】 根据正弦定理和三角形的内角和计算即可

【解答】 解: 根据正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $C=60^\circ$, $b=\sqrt{6}$, $c=3$,

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore b < c,$$

$$\therefore B = 45^\circ,$$

$$\therefore A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ,$$

故答案为：75°.

【点评】 本题考查了三角形的内角和以及正弦定理，属于基础题

16. (5分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$, 则满足 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 的 x 的取值范围是 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$.

【考点】 3T: 函数的值.

【专题】 32: 分类讨论; 4R: 转化法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 根据分段函数的表达式，分别讨论 x 的取值范围，进行求解即可.

【解答】 解：若 $x \leq 0$ ，则 $x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$ ，

则 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 等价于 $x+1+x - \frac{1}{2} + 1 > 1$ ，即 $2x > -\frac{1}{2}$ ，则 $x > -\frac{1}{4}$ ，

此时 $-\frac{1}{4} < x \leq 0$ ，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = 2^x > 1$ ， $x - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ ，

当 $x - \frac{1}{2} > 0$ 即 $x > \frac{1}{2}$ 时，满足 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 恒成立，

当 $0 \geq x - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{2} \geq x > 0$ 时， $f(x - \frac{1}{2}) = x - \frac{1}{2} + 1 = x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ ，

此时 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 恒成立，

综上 $x > -\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $(-\frac{1}{4}, +\infty)$.

【点评】 本题主要考查不等式的求解，结合分段函数的不等式，利用分类讨论的数学思想进行求解是解决本题的关键.

三、解答题

17. (12分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\dots+(2n-1)a_n=2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{\frac{a_n}{2n+1}\}$ 的前 n 项和.

【考点】 8E: 数列的求和; 8H: 数列递推式.

【专题】 34: 方程思想; 35: 转化思想; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】 (1) 利用数列递推关系即可得出.

(2) $\frac{a_n}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$. 利用裂项求和方法即可得出.

【解答】 解: (1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\dots+(2n-1)a_n=2n$.

$n \geq 2$ 时, $a_1+3a_2+\dots+(2n-3)a_{n-1}=2(n-1)$.

$$\therefore (2n-1)a_n=2. \therefore a_n=\frac{2}{2n-1}.$$

当 $n=1$ 时, $a_1=2$, 上式也成立.

$$\therefore a_n=\frac{2}{2n-1}.$$

(2) $\frac{a_n}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$.

$$\therefore \text{数列 } \{\frac{a_n}{2n+1}\} \text{ 的前 } n \text{ 项和} = (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}.$$

【点评】 本题考查了数列递推关系、裂项求和方法, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

18. (12分) 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶4元, 售价每瓶6元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶2元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 有关. 如果最高气温不低于25, 需求量为500瓶; 如果最高气温位于区间 $[20, 25)$, 需求量为300瓶; 如果最高气温低于20, 需求量为200瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

最高气温	$[10, 15)$	$[15, 20)$	$[20, 25)$	$[25, 30)$	$[30, 35)$	$[35, 40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.

- (1) 求六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率;
- (2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量为450瓶时, 写出 Y 的所有可能值, 并估计 Y 大于零的概率.

【考点】 CB: 古典概型及其概率计算公式; CH: 离散型随机变量的期望与方差

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 51: 概率与统计.

【分析】 (1) 由前三年六月份各天的最高气温数据, 求出最高气温位于区间 $[20, 25)$ 和最高气温低于20的天数, 由此能求出六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率.

(2) 当温度大于等于 25°C 时, 需求量为500, 求出 $Y=900$ 元; 当温度在 $[20, 25)$ $^{\circ}\text{C}$ 时, 需求量为300, 求出 $Y=300$ 元; 当温度低于 20°C 时, 需求量为200, 求出 $Y=-100$ 元, 从而当温度大于等于20时, $Y>0$, 由此能估计估计 Y 大于零的概率.

【解答】 解: (1) 由前三年六月份各天的最高气温数据, 得到最高气温位于区间 $[20, 25)$ 和最高气温低于20的天数为 $2+16+36=54$, 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 有关.

如果最高气温不低于25, 需求量为500瓶,

如果最高气温位于区间 $[20, 25)$, 需求量为300瓶,

如果最高气温低于20, 需求量为200瓶,

\therefore 六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率 $p=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$.

(2) 当温度大于等于 25°C 时, 需求量为500,

$Y=450\times 2=900$ 元,

当温度在 $[20, 25)$ $^{\circ}\text{C}$ 时, 需求量为300,

$Y=300\times 2 - (450 - 300)\times 2=300$ 元,

当温度低于 20°C 时, 需求量为200,

$Y=400 - (450 - 200)\times 2=-100$ 元,

当温度大于等于20时, $Y>0$,

由前三年六月份各天的最高气温数据，得当温度大于等于 20°C 的天数有：

$$90 - (2+16) = 72,$$

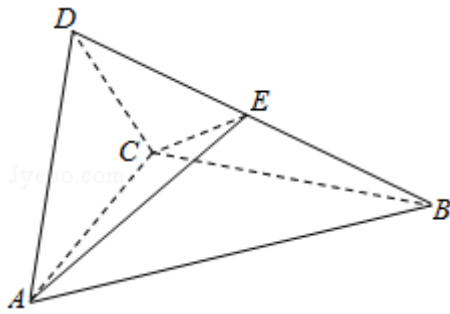
$$\therefore \text{估计} Y \text{大于零的概率} P = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}.$$

【点评】 本题考查概率的求法，考查利润的所有可能取值的求法，考查函数、古典概型等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题.

19. (12分) 如图四面体 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 是正三角形， $AD=CD$.

(1) 证明： $AC \perp BD$;

(2) 已知 $\triangle ACD$ 是直角三角形， $AB=BD$ ，若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点，且 $AE \perp EC$ ，求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.



【考点】 LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积; LW: 直线与平面垂直.

【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 41: 向量法; 5F: 空间位置关系与距离

【分析】 (1) 取 AC 中点 O ，连结 DO 、 BO ，推导出 $DO \perp AC$ ， $BO \perp AC$ ，从而 $AC \perp$ 平面 BDO ，由此能证明 $AC \perp BD$.

(2) 法一：连结 OE ，设 $AD=CD=\sqrt{2}$ ，则 $OC=OA=1$ ，由余弦定理求出 $BE=1$ ，由 $BE=ED$ ，四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的高都是点 A 到平面 BCD 的高 h ， $S_{\triangle DCE}=S_{\triangle BCE}$ ，由此能求出四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比. 法二：设 $AD=CD=\sqrt{2}$ ，则 $AC=AB=BC=BD=2$ ， $AO=CO=DO=1$ ， $BO=\sqrt{3}$ ，推导出 $BO \perp DO$ ，以 O 为原点， OA 为 x 轴， OB 为 y 轴， OD 为 z 轴，建立空间直角坐标系，由 $AE \perp EC$ ，求出 $DE=BE$ ，由此能求出四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.

【解答】 证明：(1) 取 AC 中点 O ，连结 DO 、 BO ，

∵△ABC是正三角形，AD=CD，

∴DO⊥AC，BO⊥AC，

∴DO∩BO=O，∴AC⊥平面BDO，

∴BD⊂平面BDO，∴AC⊥BD.

解：（2）法一：连结OE，由（1）知AC⊥平面OBD，

∴OE⊂平面OBD，∴OE⊥AC，

设AD=CD= $\sqrt{2}$ ，则OC=OA=1，EC=EA，

∴AE⊥CE，AC=2，∴ $EC^2+EA^2=AC^2$ ，

∴EC=EA= $\sqrt{2}$ =CD，

∴E是线段AC垂直平分线上的点，∴EC=EA=CD= $\sqrt{2}$ ，

由余弦定理得：

$$\cos\angle CBD = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC \cdot BD} = \frac{BC^2 + BE^2 - CE^2}{2BC \cdot BE},$$

$$\text{即 } \frac{4+4-2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{4+BE^2-2}{2 \times 2 \times BE}, \text{ 解得 } BE=1 \text{ 或 } BE=2,$$

∵BE < BD=2，∴BE=1，∴BE=ED，

∴四面体ABCE与四面体ACDE的高都是点A到平面BCD的高h，

∵BE=ED，∴ $S_{\triangle DCE} = S_{\triangle BCE}$ ，

∴四面体ABCE与四面体ACDE的体积比为1.

法二：设AD=CD= $\sqrt{2}$ ，则AC=AB=BC=BD=2，AO=CO=DO=1，

∴BO= $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ ，∴ $BO^2+DO^2=BD^2$ ，∴BO⊥DO，

以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OD为z轴，建立空间直角坐标系，

则C(-1, 0, 0)，D(0, 0, 1)，B(0, $\sqrt{3}$, 0)，A(1, 0, 0)，

设E(a, b, c)， $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DB}$ ，(0 ≤ λ ≤ 1)，则(a, b, c-1) = λ(0, $\sqrt{3}$, -1)

，解得E(0, $\sqrt{3}\lambda$, 1-λ)，

∴ $\overrightarrow{CE} = (1, \sqrt{3}\lambda, 1-\lambda)$ ， $\overrightarrow{AE} = (-1, \sqrt{3}\lambda, 1-\lambda)$ ，

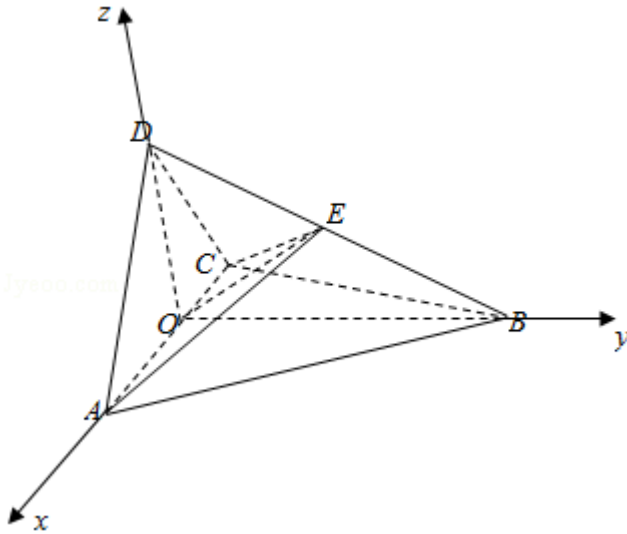
∴AE⊥EC，∴ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CE} = -1 + 3\lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 0$ ，

由λ ∈ [0, 1]，解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ ，∴DE=BE，

∴四面体ABCE与四面体ACDE的高都是点A到平面BCD的高h，

$\because DE=BE, \therefore S_{\triangle DCE}=S_{\triangle BCE}$,

\therefore 四面体ABCE与四面体ACDE的体积比为1.



【点评】 本题考查线线垂直的证明，考查两个四面体的体积之比的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、空间想象能力，考查数形结合思想、化归与转化思想，是中档题.

20. (12分) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于A、B两点，点C的坐标为 $(0, 1)$ ，当 m 变化时，解答下列问题：

- (1) 能否出现 $AC \perp BC$ 的情况？说明理由；
- (2) 证明过A、B、C三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

【考点】 KJ: 圆与圆锥曲线的综合.

【专题】 34: 方程思想; 43: 待定系数法; 5B: 直线与圆.

【分析】 (1) 设曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于A $(x_1, 0)$ ，B $(x_2, 0)$ ，运用韦达定理，再假设 $AC \perp BC$ ，运用直线的斜率之积为 -1 ，即可判断是否存在这样的情况；

(2) 设过A、B、C三点的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ($D^2+E^2-4F>0$)，由题意可得 $D=m$ ， $F=-2$ ，代入 $(0, 1)$ ，可得 $E=1$ ，再令 $x=0$ ，即可得到圆在 y 轴的交点，进而得到弦长为定值.

【解答】 解：(1) 曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于A、B两点，

可设A $(x_1, 0)$, B $(x_2, 0)$,

由韦达定理可得 $x_1x_2 = -2$,

若 $AC \perp BC$, 则 $k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$,

$$\text{即有} \frac{1-0}{0-x_1} \cdot \frac{1-0}{0-x_2} = -1,$$

即为 $x_1x_2 = -1$ 这与 $x_1x_2 = -2$ 矛盾,

故不出现 $AC \perp BC$ 的情况;

(2) 证明: 设过A、B、C三点的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ($D^2+E^2-4F>0$)

,

由题意可得 $y=0$ 时, $x^2+Dx+F=0$ 与 $x^2+mx-2=0$ 等价,

可得 $D=m$, $F=-2$,

圆的方程即为 $x^2+y^2+mx+Ey-2=0$,

由圆过C $(0, 1)$, 可得 $0+1+0+E-2=0$, 可得 $E=1$,

则圆的方程即为 $x^2+y^2+mx+y-2=0$,

另解: 设过A、B、C三点的圆在y轴上的交点为H $(0, d)$,

则由相交弦定理可得 $|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OH|$,

即有 $2 = |OH|$,

再令 $x=0$, 可得 $y^2+y-2=0$,

解得 $y=1$ 或 -2 .

即有圆与y轴的交点为 $(0, 1)$, $(0, -2)$,

则过A、B、C三点的圆在y轴上截得的弦长为定值3.

【点评】 本题考查直线与圆的方程的求法, 注意运用韦达定理和直线的斜率公式, 以及待定系数法, 考查方程思想和化简整理的运算能力, 属于中档题.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a < 0$ 时, 证明 $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$.

【考点】 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】 11: 计算题; 32: 分类讨论; 48: 分析法; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (1) 题干求导可知 $f'(x) = \frac{(2ax+1)(x+1)}{x}$ ($x>0$)，分 $a=0$ 、 $a>0$ 、 a

<0 三种情况讨论 $f'(x)$ 与 0 的大小关系可得结论；

(2) 通过 (1) 可知 $f(x)_{\max} = f(-\frac{1}{2a}) = -1 - \ln 2 - \frac{1}{4a} + \ln(-\frac{1}{a})$ ，进而转化可知问题转化为证明：当 $t>0$ 时 $-\frac{1}{2}t + \ln t \leq -1 + \ln 2$ 。进而令 $g(t) = -\frac{1}{2}t + \ln t$ ，利用导数求出 $y=g(t)$ 的最大值即可。

【解答】 (1) 解：因为 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$ ，

求导 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + (2a+1) = \frac{2ax^2 + (2a+1)x + 1}{x} = \frac{(2ax+1)(x+1)}{x}$ ， ($x>0$)，

① 当 $a=0$ 时， $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ 恒成立，此时 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

② 当 $a>0$ ，由于 $x>0$ ，所以 $(2ax+1)(x+1) > 0$ 恒成立，此时 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

③ 当 $a<0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，解得： $x = -\frac{1}{2a}$ 。

因为当 $x \in (0, -\frac{1}{2a})$ 时 $f'(x) > 0$ 、当 $x \in (-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$ ，

所以 $y=f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2a})$ 上单调递增、在 $(-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递减。

综上所述：当 $a \geq 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2a})$ 上单调递增、在 $(-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递减；

(2) 证明：由 (1) 可知：当 $a < 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2a})$ 上单调递增、在 $(-\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x = -\frac{1}{2a}$ 时函数 $y=f(x)$ 取最大值 $f(x)_{\max} = f(-\frac{1}{2a}) = -1 - \ln 2 - \frac{1}{4a} + \ln(-\frac{1}{a})$ 。

从而要证 $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$ ，即证 $f(-\frac{1}{2a}) \leq -\frac{3}{4a} - 2$ ，

即证 $-1 - \ln 2 - \frac{1}{4a} + \ln(-\frac{1}{a}) \leq -\frac{3}{4a} - 2$ ，即证 $-\frac{1}{2}(-\frac{1}{a}) + \ln(-\frac{1}{a}) \leq -1 + \ln 2$ 。

令 $t = -\frac{1}{a}$ ，则 $t > 0$ ，问题转化为证明： $-\frac{1}{2}t + \ln t \leq -1 + \ln 2$ 。... (*)

令 $g(t) = -\frac{1}{2}t + \ln t$ ，则 $g'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{t}$ ，

令 $g'(t) = 0$ 可知 $t=2$, 则当 $0 < t < 2$ 时 $g'(t) > 0$, 当 $t > 2$ 时 $g'(t) < 0$,

所以 $y=g(t)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增、在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

即 $g(t) \leq g(2) = -\frac{1}{2} \times 2 + \ln 2 = -1 + \ln 2$, 即(*)式成立,

所以当 $a < 0$ 时, $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$ 成立.

【点评】 本题考查利用导数研究函数的单调性, 考查分类讨论的思想, 考查转化能力, 考查运算求解能力, 注意解题方法的积累, 属于中档题.

[选修4-4: 坐标系与参数方程]

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t \\ y=kt \end{cases}$, (t 为参数)

, 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+m \\ y=\frac{m}{k} \end{cases}$, (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P , 当 k 变化

时, P 的轨迹为曲线 C .

(1) 写出 C 的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 $l_3: \rho(\cos\theta + \sin\theta) - \sqrt{2} = 0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

【考点】 QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】 34: 方程思想; 4Q: 参数法; 4R: 转化法; 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】 解: (1) 分别消掉参数 t 与 m 可得直线 l_1 与直线 l_2 的普通方程为 $y=k(x-2)$ ①与 $x=-2+ky$ ②; 联立①②, 消去 k 可得 C 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 4$;

(2) 将 l_3 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta + \sin\theta) - \sqrt{2} = 0$ 化为普通方程: $x+y - \sqrt{2} = 0$, 再

与曲线 C 的方程联立, 可得 $\begin{cases} x=\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, 即可求得 l_3 与 C 的交点 M 的极径为 $\rho = \sqrt{5}$

【解答】 解: (1) \because 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t \\ y=kt \end{cases}$, (t 为参数),

\therefore 消掉参数 t 得: 直线 l_1 的普通方程为: $y=k(x-2)$ ①;

又直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+m \\ y=\frac{m}{k} \end{cases}$, (m 为参数),

同理可得, 直线 l_2 的普通方程为: $x = -2 + ky$ ②;

联立①②, 消去 k 得: $x^2 - y^2 = 4$, 即 C 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 4$ ($x \neq 2$ 且 $y \neq 0$);

(2) $\therefore l_3$ 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta + \sin\theta) - \sqrt{2} = 0$,

\therefore 其普通方程为: $x + y - \sqrt{2} = 0$,

联立 $\begin{cases} x+y=\sqrt{2} \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$ 得: $\begin{cases} x=\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$,

$\therefore \rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{18}{4} + \frac{2}{4} = 5$.

$\therefore l_3$ 与 C 的交点 M 的极径为 $\rho = \sqrt{5}$.

【点评】 本题考查参数方程与极坐标方程化普通方程, 考查函数与方程思想与等价转化思想的运用, 属于中档题.

[选修4-5: 不等式选讲]

23. 已知函数 $f(x) = |x+1| - |x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

【考点】 R4: 绝对值三角不等式; R5: 绝对值不等式的解法.

【专题】 32: 分类讨论; 33: 函数思想; 4C: 分类法; 4R: 转化法; 51: 函数的性质及应用; 5T: 不等式.

【分析】 (1) 由于 $f(x) = |x+1| - |x-2| = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ 2x-1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$, 解不等式 $f(x)$

≥ 1 可分 $-1 \leq x \leq 2$ 与 $x > 2$ 两类讨论即可解得不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 依题意可得 $m \leq [f(x) - x^2 + x]_{\max}$, 设 $g(x) = f(x) - x^2 + x$, 分 $x \leq -1$ 、 $-1 < x < 2$ 、 $x \geq 2$ 三类讨论, 可求得 $g(x)_{\max} = \frac{5}{4}$, 从而可得 m 的取值范围.

【解答】解： (1) $\because f(x) = |x+1| - |x-2| = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ 2x-1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$, $f(x) \geq 1$,

\therefore 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $2x-1 \geq 1$, 解得 $1 \leq x \leq 2$;

当 $x > 2$ 时, $3 \geq 1$ 恒成立, 故 $x > 2$;

综上, 不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集为 $\{x | x \geq 1\}$.

(2) 原式等价于存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) - x^2 + x \geq m$ 成立,

即 $m \leq [f(x) - x^2 + x]_{\max}$, 设 $g(x) = f(x) - x^2 + x$.

由 (1) 知, $g(x) = \begin{cases} -x^2 + x - 3, & x \leq -1 \\ -x^2 + 3x - 1, & -1 < x < 2 \\ -x^2 + x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$

当 $x \leq -1$ 时, $g(x) = -x^2 + x - 3$, 其开口向下, 对称轴方程为 $x = \frac{1}{2} > -1$,

$\therefore g(x) \leq g(-1) = -1 - 1 - 3 = -5$;

当 $-1 < x < 2$ 时, $g(x) = -x^2 + 3x - 1$, 其开口向下, 对称轴方程为 $x = \frac{3}{2} \in (-1, 2)$,

$\therefore g(x) \leq g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 1 = \frac{5}{4}$;

当 $x \geq 2$ 时, $g(x) = -x^2 + x + 3$, 其开口向下, 对称轴方程为 $x = \frac{1}{2} < 2$,

$\therefore g(x) \leq g(2) = -4 + 2 + 3 = 1$;

综上, $g(x)_{\max} = \frac{5}{4}$,

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, \frac{5}{4}]$.

【点评】 本题考查绝对值不等式的解法, 去掉绝对值符号是解决问题的关键, 突出考查分类讨论思想与等价转化思想、函数与方程思想的综合运用, 属于难题.