

# 2004 年河南高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。共 150 分。考试时间 120 分钟。

## 第 I 卷（选择题 共 60 分）

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径，

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. 设集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ , 则  $A \cap (C_U B) =$  ( )

- A.  $\{2\}$                       B.  $\{2, 3\}$                       C.  $\{3\}$                       D.  $\{1, 3\}$

2. 已知函数  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ , 若  $f(a) = \frac{1}{2}$ , 则  $f(-a) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C. 2                      D. -2

3. 已知  $\vec{a}, \vec{b}$  均为单位向量，它们的夹角为  $60^\circ$ ，那么  $|\vec{a} + 3\vec{b}| =$  ( )

- A.  $\sqrt{7}$                       B.  $\sqrt{10}$                       C.  $\sqrt{13}$                       D. 4

4. 函数  $y = \sqrt{x-1} + 1 (x \geq 1)$  的反函数是 ( )

- A.  $y = x^2 - 2x + 2 (x < 1)$                       B.  $y = x^2 - 2x + 2 (x \geq 1)$   
C.  $y = x^2 - 2x (x < 1)$                       D.  $y = x^2 - 2x (x \geq 1)$

5.  $(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}})^7$  的展开式中常数项是 ( )

- A. 14                      B. -14                      C. 42                      D. -42

6. 设  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  若  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$  ( )

- A.  $\frac{7}{5}$                       B.  $\frac{1}{5}$                       C.  $\frac{7}{2}$                       D. 4

7. 椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的两个焦点为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交，一个交点

为 P, 则  $|\overrightarrow{PF_2}| =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\frac{7}{2}$       D. 4

8. 设抛物线  $y^2 = 8x$  的准线与  $x$  轴交于点 Q, 若过点 Q 的直线  $l$  与抛物线有公共点, 则直线  $l$  的斜率的取值范围是 ( )

- A.  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$       B.  $[-2, 2]$       C.  $[-1, 1]$       D.  $[-4, 4]$

9. 为了得到函数  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$  的图象, 可以将函数  $y = \cos 2x$  的图象 ( )

- A. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度      B. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度      D. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度

10. 已知正四面体 ABCD 的表面积为 S, 其四个面的中心分别为 E、F、G、H, 设四面体 EFGH 的表面积为 T, 则  $\frac{T}{S}$  等于 ( )

- A.  $\frac{1}{9}$       B.  $\frac{4}{9}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{1}{3}$

11. 从 1, 2, …, 9 这九个数中, 随机抽取 3 个不同的数, 则这 3 个数的和为偶数的概率是 ( )

- A.  $\frac{5}{9}$       B.  $\frac{4}{9}$       C.  $\frac{11}{21}$       D.  $\frac{10}{21}$

12. 已知  $a^2 + b^2 = 1, b^2 + c^2 = 2, c^2 + a^2 = 2$ , 则  $ab + bc + ca$  的最小值为 ( )

- A.  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$       C.  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$       D.  $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 不等式  $x + x^3 \geq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

14. 已知等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 = 3, a_{10} = 384$ , 则该数列的通项  $a_n =$ \_\_\_\_\_.

15. 由动点 P 向圆  $x^2 + y^2 = 1$  引两条切线 PA、PB, 切点分别为 A、B,  $\angle APB = 60^\circ$ , 则动点 P 的轨迹方程为\_\_\_\_\_.

16. 已知  $a$ 、 $b$  为不垂直的异面直线,  $\alpha$  是一个平面, 则  $a$ 、 $b$  在  $\alpha$  上的射影有可能是\_\_\_\_\_.

- ①两条平行直线      ②两条互相垂直的直线  
③同一条直线      ④一条直线及其外一点

在一面结论中, 正确结论的编号是\_\_\_\_\_ (写出所有正确结论的编号).

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ . 已知  $a_{10} = 30, a_{20} = 50$ .

(I) 求通项  $a_n$ ;

(II) 若  $S_n = 242$ , 求  $n$ .

18. (本小题满分 12 分)

求函数  $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$  的最小正周期、最大值和最小值.

19. (本小题满分 12 分)

已知  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$  在  $\mathbb{R}$  上是减函数, 求  $a$  的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

从 10 位同学 (其中 6 女, 4 男) 中随机选出 3 位参加测验. 每位女同学能通过测验的概率均为  $\frac{4}{5}$ , 每位男同学能通过测验的概率均为  $\frac{3}{5}$ . 试求:

(I) 选出的 3 位同学中, 至少有一位男同学的概率;

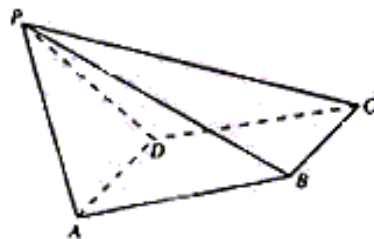
(II) 10 位同学中的女同学甲和男同学乙同时被选中且通过测验的概率.

21. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥  $P-ABCD$ ,  $PB \perp AD$ , 侧面  $PAD$  为边长等于 2 的正三角形, 底面  $ABCD$  为菱形, 侧面  $PAD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角为  $120^\circ$ .

(I) 求点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离;

(II) 求面  $APB$  与面  $CPB$  所成二面角的大小.



22. (本小题满分 14 分)

设双曲线 C:  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  与直线  $l: x + y = 1$  相交于两个不同的点 A、B.

(I) 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围;

(II) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P, 且  $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB}$ . 求 a 的值.

### 文科数学参考答案

#### 一、选择题

DCBABCBCBACB

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13.  $\{x | x \geq 0\}$     14.  $3 \cdot 2^{n-3}$     15.  $x^2 + y^2 = 4$     16. ①②④

#### 三、解答题

17. 本小题主要考查等差数列的通项公式、求和公式, 考查运算能力. 满分 12 分.

解: (I) 由  $a_n = a_1 + (n-1)d, a_{10} = 30, a_{20} = 50$ , 得方程组

$$\begin{cases} a_1 + 9d = 30, \\ a_1 + 19d = 50. \end{cases} \quad \dots\dots 4 \text{ 分} \quad \text{解得 } a_1 = 12, d = 2. \quad \text{所以 } a_n = 2n + 10. \dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 由  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, S_n = 242$  得方程

$$12n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = 242. \quad \dots\dots 10 \text{ 分} \quad \text{解得 } n = 11 \text{ 或 } n = -22 (\text{舍去}). \dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 本小题主要考查三角函数基本公式和简单的变形, 以及三角函数的有关性质. 满分 12 分.

解:  $f(x) = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{2 - 2 \sin x \cos x}$

$$= \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{2(1 - \sin x \cos x)} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sin x \cos x)$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2}.$$

所以函数  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$ ，最大值是  $\frac{3}{4}$ ，最小值是  $\frac{1}{4}$ 。……12 分

19. 本小题主要考查导数的概念和计算，应用导数研究函数单调性的基本方法，考查综合运用数学知识解决问题的能力。满分 12 分。

解：函数  $f(x)$  的导数： $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 1$ 。……3 分

(I) 当  $f'(x) < 0$  ( $x \in R$ ) 时， $f(x)$  是减函数。

$$3ax^2 + 6x - 1 < 0(x \in R) \Leftrightarrow a < 0 \text{ 且 } \Delta = 36 + 12a < 0 \Leftrightarrow a < -3.$$

所以，当  $a < -3$  时，由  $f'(x) < 0$ ，知  $f(x)(x \in R)$  是减函数；……9 分

(II) 当  $a = -3$  时， $f(x) = -3x^3 + 3x^2 - x + 1 = -3(x - \frac{1}{3})^3 + \frac{8}{9}$ ，

由函数  $y = x^3$  在  $R$  上的单调性，可知

当  $a = -3$  时， $f(x)(x \in R)$  是减函数；

(III) 当  $a > -3$  时，在  $R$  上存在一个区间，其上有  $f'(x) > 0$ ，

所以，当  $a > -3$  时，函数  $f(x)(x \in R)$  不是减函数。

综上，所求  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -3]$ 。……12 分

20. 本小题主要考查组合，概率等基本概念，独立事件和互斥事件的概率以及运用概率知识解决实际问题的能力，满分 12 分。

解：(I) 随机选出的 3 位同学中，至少有一位男同学的概率为

$$1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{6}; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 甲、乙被选中且能通过测验的概率为

$$\frac{C_8^1}{C_{10}^3} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{125}; \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 本小题主要考查棱锥，二面角和线面关系等基本知识，同时考查空间想象能力和推理、运算能力。满分 12 分。

(I) 解：如图，作  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ，垂足为点  $O$ 。连结  $OB$ 、 $OA$ 、 $OD$ 、 $OB$  与  $AD$  交于点  $E$ ，连结  $PE$ 。

$\because AD \perp PB, \therefore AD \perp OB$ ,

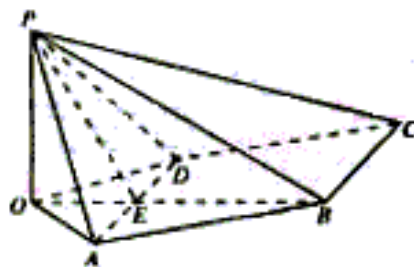
$\because PA = PD, \therefore OA = OD$ ,

于是  $OB$  平分  $AD$ ，点  $E$  为  $AD$  的中点，所以  $PE \perp AD$ 。

由此知  $\angle PEB$  为面  $PAD$  与面  $ABCD$  所成二面角的平面角，……4 分

$$\therefore \angle PEB = 120^\circ, \angle PEO = 60^\circ$$

由已知可求得  $PE = \sqrt{3}$



$$\therefore PO = PE \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

即点 P 到平面 ABCD 的距离为  $\frac{3}{2}$ . .....6 分

(II) 解法一: 如图建立直角坐标系, 其中 O 为坐标原点, x 轴平行于 DA.

$P(0, 0, \frac{3}{2}), B(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0), PB$  中点 G 的坐标为  $(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$ . 连结 AG.

又知  $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), C(-2, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0)$ . 由此得到:

$$\overrightarrow{GA} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}),$$

$$\overrightarrow{PB} = (0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}), \overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0).$$

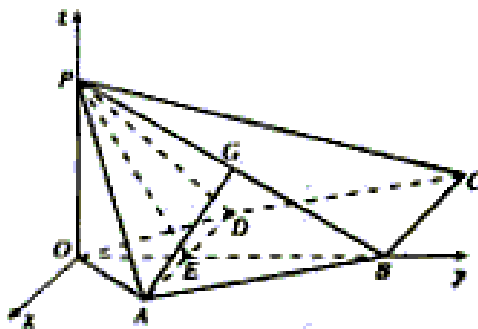
于是有  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$

所以  $\overrightarrow{GA} \perp \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{PB}$ .  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{BC}$  的夹角  $\theta$

等于所求二面角的平面角, .....10 分

$$\text{于是 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

所以所求二面角的大小为  $\pi - \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$ . .....12 分



解法二: 如图, 取 PB 的中点 G, PC 的中点 F, 连结 EG、AG、GF, 则  $AG \perp PB, FG \parallel BC,$

$$FG = \frac{1}{2} BC.$$

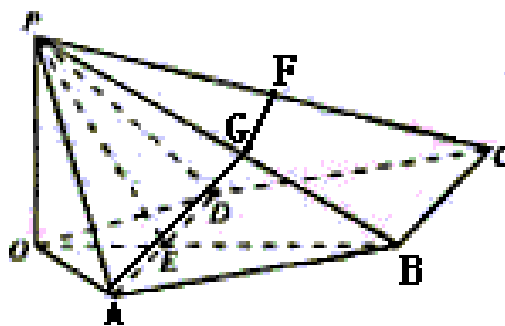
$\because AD \perp PB, \therefore BC \perp PB, FG \perp PB,$

$\therefore \angle AGF$  是所求二面角的平面角. ....9 分

$\because AD \perp \text{面 } POB, \therefore AD \perp EG.$

又  $\because PE = BE, \therefore EG \perp PB,$  且  $\angle PEG = 60^\circ$ .

在  $\text{Rt} \triangle PEG$  中,  $EG = PE \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



在  $\text{Rt} \triangle PEG$  中,  $EG = \frac{1}{2} AD = 1$ . 于是  $\tan \angle GAE = \frac{EG}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

又  $\angle AGF = \pi - \angle GAE$ . 所以所求二面角的大小为  $\pi - \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$ . .....12 分

22. (本小题主要考查直线和双曲线的概念和性质, 平面向量的运算等解析几何的基本思想和综合解题能力.

满分 14 分.

解: (I) 由 C 与 t 相交于两个不同的点, 故知方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

有两个不同的实数解. 消去 y 并整理得  $(1-a^2)x^2 + 2a^2x - 2a^2 = 0$ . ① .....2 分

$$\text{所以} \begin{cases} 1-a^2 \neq 0. \\ 4a^4 + 8a^2(1-a^2) > 0. \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < a < \sqrt{2} \text{ 且 } a \neq 1.$$

双曲线的离心率

$$e = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}. \quad \because 0 < a < \sqrt{2} \text{ 且 } a \neq 1,$$

$$\therefore e > \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 且 } e \neq \sqrt{2}$$

即离心率 e 的取值范围为  $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ . .....6 分

(II) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P_1(0, 1)$

$$\because \overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB}, \quad \therefore (x_1, y_1 - 1) = \frac{5}{12} (x_2, y_2 - 1). \quad \text{由此得 } x_1 = \frac{5}{12} x_2. \text{ .....8 分}$$

由于  $x_1, x_2$  都是方程①的根, 且  $1-a^2 \neq 0$ ,

$$\text{所以 } \frac{17}{12} x_2 = -\frac{2a^2}{1-a^2}, \quad \frac{5}{12} x_2^2 = -\frac{2a^2}{1-a^2}. \text{ 消去 } x_2, \text{ 得 } -\frac{2a^2}{1-a^2} = \frac{289}{60}$$

由  $a > 0$ , 所以  $a = \frac{17}{13}$ . .....14 分