2004年重庆高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是：$($　　$)$

A．$[1，+\infty)$　　B．$(\frac{2}{3},+\infty)$　　C．$[\frac{2}{3},1]$　　D．$(\frac{2}{3},1]$

2．（5分）函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $\frac{f(2)}{f(\frac{1}{2})}=($　　$)$

A．1　　B．-1　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

3．（5分）圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为：$($　　$)$

A．2　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

4．（5分）不等式 $x+\frac{2}{x+1}>2$ 的解集是 $($　　$)$

A．$(-1，0)\cup(1，+\infty)$　　B．$(-\infty，-1)\cup(0，1)$

C．$(-1，0)\cup(0，1)$　　D．$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$

5．（5分）$\sin163°\sin223°+\sin253°\sin313°$ 等于 $($　　$)$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6．（5分）若向量 $\vec{a}$与$\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，$|\vec{b}|=4,(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=-72$，则向量 $\vec{a}$ 的模为 $($　　$)$

A．2　　B．4　　C．6　　D．12

7．（5分）已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 成立的 $($　　$)$

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．（5分）不同直线 m，n 和不同平面 α，β，给出下列命题：

①$\left.\begin{matrix}\alpha//\beta\\ m\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m//\beta$，②$\left.\begin{matrix}m//n\\ m//\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow n//\beta$，③$\left.\begin{matrix}m\subset\alpha\\ n\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow m,n$异面，④$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ m//\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m\perp\beta$

其中假命题有：$($　　$)$

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．3个

9．（5 分）若数列$\{a_n\}$是等差数列，首项$a_1>0$，$a_{2003}+a_{2004}>0$，$a_{2003}\cdot a_{2004}<0$，则使前n项和$S_n>0$成立的最大自然数n是(　　)

A．4005　　B．4006　　C．4007　　D．4008

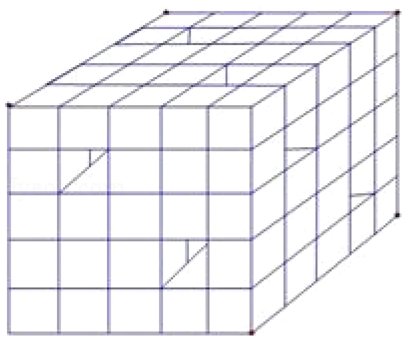
10．（5 分）已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$(a>0,b>0)$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在双曲线的右支上，且$|PF_1|=4|PF_2|$，则此双曲线的离心率$e$的最大值为(　　)

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{5}{3}$　　C．2　　D．$\dfrac{7}{3}$

11．（5 分）已知盒中装有 3 只螺口与 7 只卡口灯泡，这些灯泡的外形与功率都相同且灯口向下放着，现需要一只卡口灯泡使用，电工师傅每次从中任取一只并不放回，则他直到第 3 次才取得卡口灯泡的概率为：(　　)

A．$\dfrac{21}{40}$　　B．$\dfrac{17}{40}$　　C．$\dfrac{3}{10}$　　D．$\dfrac{7}{120}$

12．（5 分）如图，棱长为 5 的正方体无论从哪一个面看，都有两个直通的边长为 1 的正方形孔，则这个有孔正方体的表面积（含孔内各面）是(　　)



A．258　　B．234　　C．222　　D．210

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）若在$(1+ax)^5$的展开式中x^3的系数为-80，则$a=$_____.

14．（4 分）已知$\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=2,(x>0,y>0)$，则$xy$的最小值是_____.

15．（4 分）已知曲线$y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}$，则过点$P(2,4)$的切线方程是_____.

16．（4 分）正四棱锥$S-ABCD$的底面边长和各侧棱长都为$\sqrt{2}$，点S、A、B、C、D都在同一个球面上，则该球的体积为_____.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）求函数 $y=\sin^4 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4 x$ 的最小正周期和最小值；并写出该函数在 $[0，\pi]$ 上的单调递增区间．

18．（12 分）设甲、已、丙三人每次射击命中目标的概率分别为 0.7、0.6 和 0.5．

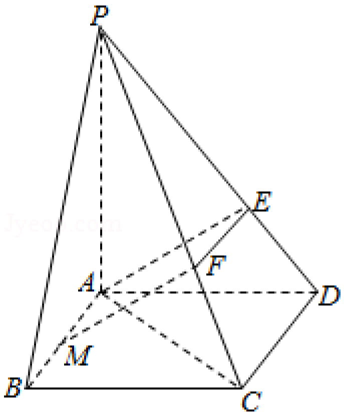
（1）三人各向目标射击一次，求至少有一人命中目标的概率及恰有两人命中目标的概率；

（2）若甲单独向目标射击三次，求他恰好命中两次的概率．

19．（12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AE\perp PD$，$EF//CD$，$AM=EF$

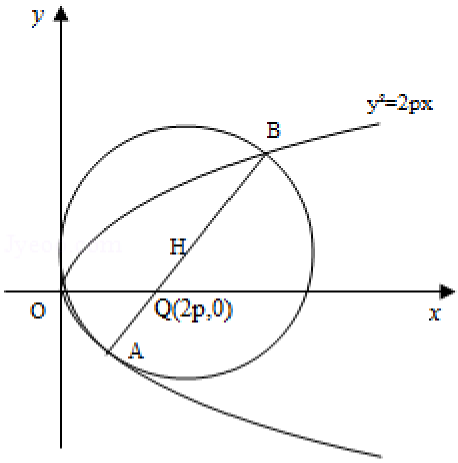
（1）证明 MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线；

（2）若 $PA=3AB$，求直线 AC 与平面 EAM 所成角的正弦值．



20．（12 分）某工厂生产某种产品，已知该产品的产量 x（吨）与每吨产品的价格 P（元/吨）之间的关系为 $P=24200-\frac{1}{5}x^2$，且生产 x 吨的成本为 $R=50000+200x$ 元．问该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大？最大利润是多少？（利润 $=$ 收入 $-$ 成本）

21．（12 分）设 $p>0$ 是一常数，过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A、B，以线段 AB 为直径作圆 $H(H$ 为圆心）．试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上；并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程．



22．（14 分）设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=\frac{5}{3}$，$a_{n+2}=\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n$，$(n\in N^+)$

（1）令$b_n=a_{n+1}-a_n$，$(n=1,2\ldots)$求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{na_n\}$的前n项和S_n．

2004年重庆市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是：(　　)

A．$[1,+\infty)$　　B．$(\frac{2}{3},+\infty)$　　C．$[\frac{2}{3},1]$　　D．$(\frac{2}{3},1]$

【解答】解：要使函数有意义：$\log_{\frac{1}{2}}^{(3x-2)}\geqslant 0$，

即：$\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}1$

可得　$0<3x-2\leqslant 1$

解得 $x\in(\frac{2}{3},1]$

故选：D．

2．（5分）函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $\frac{f(2)}{f(\frac{1}{2})}=($　　$)$

A．1　　B．-1　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

【解答】解：由题意知，$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，

则 f（2）$=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$，$f(\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^2-1}{(\frac{1}{2})^2+1}=-\frac{3}{5}$，

$\therefore\frac{f(2)}{f(\frac{1}{2})}=-1$．

故选：B．

3．（5分）圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为：(　　)

A．2　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

【解答】解：圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心 $(1,-2)$，

它到直线 $x-y=1$ 的距离：$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

故选：D．

4.（5 分）不等式$x+\dfrac{2}{x+1}>2$的解集是(　　)

A．$(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$　　B．$(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$

C．$(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$　　D．$(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$

【解答】解：法一：$x+\dfrac{2}{x+1}>2$　得$x-2+\dfrac{2}{x+1}>0$　即$\dfrac{x(x-1)}{x+1}>0$

可得　$x(x-1)(x+1)>0$可得$-1<x<0$或$x>1$．

法二：验证，$x=-2$、$\dfrac{1}{2}$不满足不等式，排除B、C、D．

故选：A．

5.（5 分）$\sin163^{\circ}\sin223^{\circ}+\sin253^{\circ}\sin313^{\circ}$等于(　　)

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：原式$=\sin163^{\circ}\bullet\sin223^{\circ}+\cos163^{\circ}\cos223^{\circ}$

$=\cos(163^{\circ}-223^{\circ})$

$=\cos(-60^{\circ})$

$=\dfrac{1}{2}$．

故选：B．

6.（5 分）若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°，$|\vec{b}|=4,(\vec{a}+2\vec{b})\bullet(\vec{a}-3\vec{b})=-72$，则向量$\vec{a}$的模为(　　)

A．2　　B．4　　C．6　　D．12

【解答】解：$(a+2b)\bullet(a-3b)$

$=|a|^{2}-|a||b|\cos60^{\circ}-6|b|^{2}$

$=|a|^{2}-2|a|-96=-72$，

$\therefore|a|^{2}-2|a|-24=0$．

$\therefore(|a|-6)\bullet(|a|+4)=0$．

$\therefore|a|=6$．

故选：C．

7.（5 分）已知p是r的充分不必要条件，s是r的必要条件，q是s的必要条件，那么p是q成立的(

)

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：依题意有 $p\Rightarrow r$，

$r\Rightarrow s$，

$s\Rightarrow q$，

$\therefore p\Rightarrow r\Rightarrow s\Rightarrow q$．

但由于 r 推不出 p，

$\therefore q$ 推不出 p．

故选：A．

8．（5 分）不同直线 m，n 和不同平面 α，β，给出下列命题：

①$\left.\begin{matrix}\alpha//\beta\\ m\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m//\beta$，②$\left.\begin{matrix}m//n\\ m//\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow n//\beta$，③$\left.\begin{matrix}m\subset\alpha\\ n\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow m,n$异面，④$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ m//\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m\perp\beta$

其中假命题有：(　　)

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【解答】解：①$\left.\begin{matrix}\alpha//\beta\\ m\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m//\beta$，$m$ 与平面 β 没有公共点，所以是正确的．

②$\left.\begin{matrix}m//n\\ m//\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow n//\beta$，直线 n 可能在 β 内，所以不正确．

③$\left.\begin{matrix}m\subset\alpha\\ n\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow m,n$异面，可能两条直线相交，所以不正确．

④$\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ m//\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m\perp\beta$，$m$ 与平面 β 可能平行，不正确．

故选：D．

9．（5 分）若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1>0$，$a_{2003}+a_{2004}>0$，a_{2003}．$a_{2004}<0$，则使前 n 项和 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 是(　　)

A．4005　　B．4006　　C．4007　　D．4008

【解答】解：

解法1：由 $a_{2003}+a_{2004}>0$， $a_{2003}•a_{2004}<0$，知 a_{2003} 和 a_{2004} 两项中有一正数一负数，又 $a_1>0$，则公差为负数，

否则各项总为正数，故 $a_{2003}>a_{2004}$，即 $a_{2003}>0$， $a_{2004}<0$．

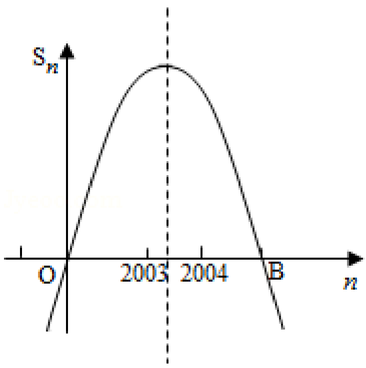
$\therefore S_{4006}=\dfrac{4006(a_1+a_{4006})}{2}=\dfrac{4006(a_{2003}+a_{2004})}{2}>0$，

$\therefore S_{4007}=\dfrac{4007}{2}•(a_1+a_{4007})=4007•a_{2004}<0$，

故4006为 $S_n>0$ 的最大自然数．

故选 B．

解法2：由 $a_1>0$， $a_{2003}+a_{2004}>0$， $a_{2003}•a_{2004}<0$，同解法1的分析得 $a_{2003}>0$， $a_{2004}<0$，



$\therefore S_{2003}$ 为 S_n 中的最大值．

$\because S_n$ 是关于 n 的二次函数，如草图所示，

$\therefore$ 2003到对称轴的距离比2004到对称轴的距离小，

$\therefore \dfrac{4007}{2}$ 在对称轴的右侧．

根据已知条件及图象的对称性可得4006在图象中右侧零点 B 的左侧，

4007，4008都在其右侧， $S_n>0$ 的最大自然数是4006．

故选： B．

10．（5分）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$， $(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1， F_2，点 P 在双曲线的右支上，

且 $|PF_1|=4|PF_2|$，则此双曲线的离心率 e 的最大值为(　　)

A． $\dfrac{4}{3}$　　B． $\dfrac{5}{3}$　　C．2　　D． $\dfrac{7}{3}$

【解答】解：设$P(x,y)$，由焦半径得$|PF_1|=ex+a$，$|PF_2|=ex-a$，

$\therefore ex+a=4(ex-a)$，化简得$e=\dfrac{5a}{3x}$，

$\because p$在双曲线的右支上，

$\therefore x\geqslant a$，

$\therefore e\leqslant\dfrac{5}{3}$，即双曲线的离心率$e$的最大值为$\dfrac{5}{3}$

故选：B．

11．（5 分）已知盒中装有 3 只螺口与 7 只卡口灯泡，这些灯泡的外形与功率都相同且灯口向下放着，现需要一只卡口灯泡使用，电工师傅每次从中任取一只并不放回，则他直到第 3 次才取得卡口灯泡的概率为：(　　)

A．$\dfrac{21}{40}$　　B．$\dfrac{17}{40}$　　C．$\dfrac{3}{10}$　　D．$\dfrac{7}{120}$

【解答】解：$\because$盒中装有 3 只螺口与 7 只卡口灯泡，

$\therefore$从中取一只螺口的概率是$\dfrac{3}{10}$，

再次从中取一只螺口的概率是$\dfrac{2}{9}$，

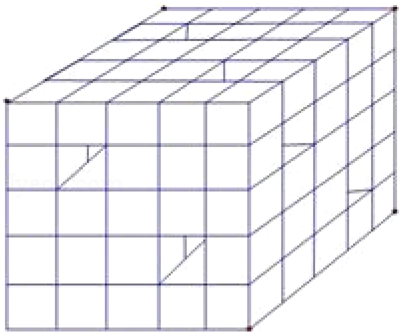
$\because$有 8 只灯泡，有一只螺口和 7 只卡口灯泡，

$\therefore$从中取一只卡口灯泡的概率是$\dfrac{7}{8}$，

$\therefore$到第 3 次才取得卡口灯泡的概率为$P=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{120}$，

故选：D．

12．（5 分）如图，棱长为 5 的正方体无论从哪一个面看，都有两个直通的边长为 1 的正方形孔，则这个有孔正方体的表面积（含孔内各面）是(　　)



A．258　　B．234　　C．222　　D．210

【解答】解：正方体无论从哪一个面看，都有两个直通的边长为 1 的正方形孔，

正方体共有 6 个直通小孔，有 6 个交汇处，

表面积等于正方体的表面积减去 12 个表面上的小正方形面积，

加上 6 个棱柱的侧面积，减去 6 个通道的 6 个小正方体的表面积.

则 $S_{全}=6\times 25-12+6\times 4\times 5-6\times 6=222$.

故选：C .

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）若在 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 -80 ，则 $a=$ __ -2 __.

【解答】解：$(1+ax)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(ax)^r=a^rC_5^rx^r$

令 $x=3$ 的展开式中 x^3 的系数为 $a^3C_5^3=10a^3$

$\because$ 展开式中 x^3 的系数为 -80

$\therefore 10a^3=-80$

$\therefore a=-2$

故答案为 -2

14.（4 分）已知 $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2,(x>0,y>0)$ ，则 xy 的最小值是 __ 15 __.

【解答】解：$\because \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2,(x>0,y>0)$ ，

$\therefore \frac{15}{xy}„(\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{y}}{2})^2=1$ ，

$\therefore xy…15$.

答案：15.

15.（4 分）已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ ，则过点 $P(2,4)$ 的切线方程是 __ $4x-y-4=0$ 或 $y=x+2$ __.

【解答】解：$\because P(2,4)$ 在 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ 上，又 $y'=x^2$ ，

$\therefore$ 斜率 $k=2^2=4$.

$\therefore$ 所求直线方程为 $y-4=4(x-2)$ ， $4x-y-4=0$.

当切点不是点 P 时，设切点为 $(x_1$ ， $y_1)$ ，根据切线过点 P ，可得：

$x_1^2=\frac{y_1-4}{x_1-2}$ 又 $yi=\frac{1}{3}x_1^3+\frac{4}{3}$ ，可解出 $x_1=-1$ ， $y_i=1$ （舍去 $(2,4)$ ），

所以切线方程为 $y-1=x+1$

即切线方程为 $y=x+2$

故答案为：$4x-y-4=0$ 或 $y=x+2$

16．（4 分）正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长和各侧棱长都为 $\sqrt{2}$，点 S、A、B、C、D 都在同一个球面上，则该球的体积为__$\frac{4\pi}{3}$__．

【解答】解：正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长和各侧棱长都为 $\sqrt{2}$，

点 S、A、B、C、D 都在同一个球面上，

则该球的球心恰好是底面 $ABCD$ 的中心，球的半径是 1，体积为 $\frac{4\pi}{3}$．

故答案为：$\frac{4\pi}{3}$

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）求函数 $y=\sin^4 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4 x$ 的最小正周期和最小值；并写出该函数在 $[0，\pi]$ 上的单调递增区间．

【解答】解：$y=\sin^4 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)+\sqrt{3}\sin 2x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$．

故该函数的最小正周期是 π；最小值是 -2；单调递增区间是 $[0，\frac{\pi}{3}]$，$[\frac{5\pi}{6}，\pi]$．

18．（12 分）设甲、已、丙三人每次射击命中目标的概率分别为 0.7、0.6 和 0.5．

（1）三人各向目标射击一次，求至少有一人命中目标的概率及恰有两人命中目标的概率；

（2）若甲单独向目标射击三次，求他恰好命中两次的概率．

【解答】解：（1）设 A_k 表示“第 k 人命中目标”，$k=1$，2，3．

这里 A_1，A_2，A_3 独立，且 $P(A_1)=0.7$，$P(A_2)=0.6$，$P(A_3)=0.5$．

从而，至少有一人命中目标的概率为

$1-P(\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-0.3\times0.4\times0.5=0.94$

恰有两人命中目标的概率为

$P(A_1 \bullet A_2 \bullet \overline{A_3}+A_1 \bullet \overline{A_2} \bullet A_3+\overline{A_1} \bullet A_2 \bullet A_3)$

$=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$

$=0.7\times 0.6\times 0.5+0.7\times 0.4\times 0.5+0.3\times 0.6\times 0.5=0.44$

则至少有一人命中目标的概率为0.94，恰好有两人命中目标的概率为0.44.

（2）设甲每次射击为一次试验，从而该问题构成三次重复独立试验．由已知在每次试验中事件“命中目标发生的概率为0.7.

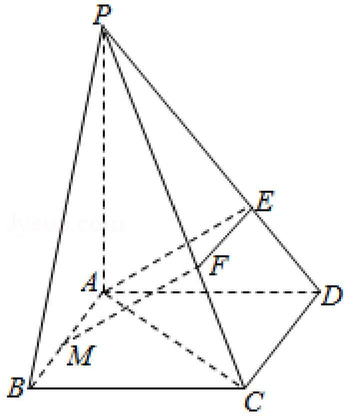
故所求概率为P_3（2）$=C_3^2(0.7)^2(0.3)=0.441$

故他恰好命中两次的概率为0.441.

19．（12分）如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是正方形，$PA\perp$底面$ABCD$，$AE\perp PD$，$EF//CD$，$AM=EF$

（1）证明MF是异面直线AB与PC的公垂线；

（2）若$PA=3AB$，求直线AC与平面EAM所成角的正弦值.



【解答】(I)证明：因$PA\perp$底面，有$PA\perp AB$，又知$AB\perp AD$，

故$AB\perp$面PAD，推得$BA\perp AE$，

又$AM//CD//EF$，且$AM=EF$，

证得$AEFM$是矩形，故$AM\perp MF$．

又因$AE\perp PD$，$AE\perp CD$，故$AE\perp$面PCD，

而$MF//AE$，得$MF\perp$面PCD，

故$MF\perp PC$，

因此MF是AB与PC的公垂线.

(II) 解：连接 BD 交 AC 于 O，连接 BE，过 O 作 BE 的垂线 OH，

垂足 H 在 BE 上．

易知 $PD\perp$ 面 MAE，故 $DE\perp BE$，

又 $OH\perp BE$，故 $OH//DE$，

因此 $OH\perp$ 面 MAE．

连接 AH，则 $\angle HAO$ 是所要求的线 AC 与面 NAE 所成的角

设 $AB=a$，则 $PA=3a$，$AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$．

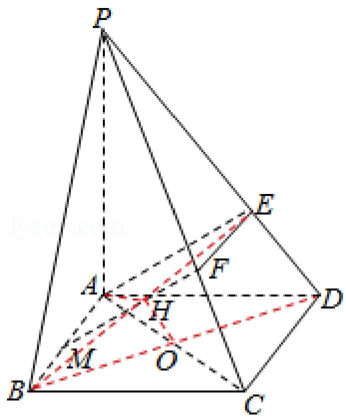
因 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADE}\sim\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{PDA}$，故

$$ED=\frac{AD^2}{PD}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+(3a)^2}}=\frac{a}{\sqrt{10}},$$

$$OH=\frac{1}{2}ED=\frac{a}{2\sqrt{10}}.$$

从而在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{AHO}$ 中

$$\sin HAO=\frac{OH}{AO}=\frac{a}{2\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}.$$



20．（12 分）某工厂生产某种产品，已知该产品的产量 x（吨）与每吨产品的价格 P（元/吨）之间的关系为 $P=24200-\dfrac{1}{5}x^2$，且生产 x 吨的成本为 $R=50000+200x$ 元．问该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大？最大利润是多少？（利润 $=$ 收入 $-$ 成本）

【解答】解：设生产 x 吨产品，利润为 y 元，

则 $y=px-R=(24200-\dfrac{1}{5}x^2)x-(50000+200x)$

$=-\dfrac{1}{5}x^3+24000x-50000(x>0)$

$y'=-\frac{3}{5}x^2+24000$，

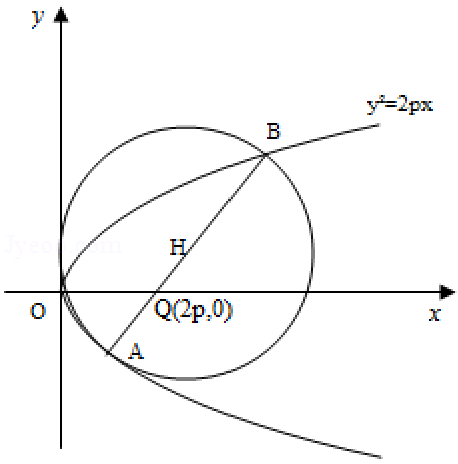
由 $y'=0$，得 $x=200$

$\because 0<x<200$ 时 $y'>0$，当 $x\ldots 200$ 时 $y'<0$

$\therefore$ 当 $x=200$ 时，$y_{max}=3150000$（元）

答：该厂每月生产 200 吨产品才能使利润达到最大，最大利润是 3150000（元）

21．（12 分）设 $p>0$ 是一常数，过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A、B，以线段 AB 为直径作圆 $H(H$ 为圆心)．试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上；并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程．



【解答】解：由题意，设直线 AB 的方程为 $ay=x-2$，

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则其坐标满足 $\begin{cases}ay=x-2\\y^2=2px\end{cases}$

消去 x 的 $y^2-2apy-4p^2=0$，

则 $\begin{cases}x_1+x_2=(4+2a^2)p\\x_1\bullet x_2=4p^2\end{cases}$

因此 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$

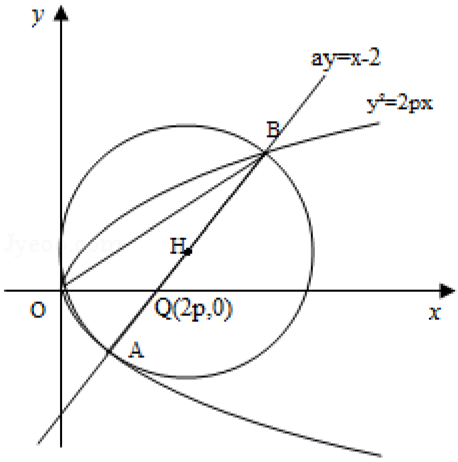
$\therefore OA\perp OB$，故 O 必在圆 H 的圆周上，

又由题意圆心 H 是 AB 的中点，故

$\begin{cases}x_H=(2+a^2)p\\y_H=ap\end{cases}$，

由前已证OH应是圆H的半径，且$|OH|=\sqrt{a^4+5a^2+4}p$；

从而当$a=0$时，圆H的半径最小，也使圆H的面积最小.



22．（14分）设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=\frac{5}{3}$，$a_{n+2}=\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n$，$(n\in N^+)$

（1）令$b_n=a_{n+1}-a_n$，$(n=1,2\ldots)$求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{na_n\}$的前n项和S_n．

【解答】解：（1）$\because b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n-a_{n+1}$

$=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)=\frac{2}{3}b_n$

$\therefore\{b_n\}$是以公比为$\frac{2}{3}$的等比数列，且$b_1=a_2-a_1=\frac{2}{3}$

$\therefore b_n=(\frac{2}{3})^n$

（2）由$b_n=a_{n+1}-a_n=(\frac{2}{3})^n$得

$a_{n+1}-a_1=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)$

$=(\frac{2}{3})^n+(\frac{2}{3})^{n-1}+\ldots+(\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}=2[1-(\frac{2}{3})^n]$

注意到$a_1=1$，可得$a_n=3-\frac{2^n}{3^{n-1}}$

记数列$\{\frac{n2^{n-1}}{3^{n-1}}\}$的前$n$项和为$T_{n,则}$

$T_n=1+2\bullet\frac{2}{3}+\ldots+n\bullet(\frac{2}{3})^{n-1}$，

$\frac{2}{3}T_n=\frac{2}{3}+2\bullet(\frac{2}{3})^2+\ldots+n\bullet(\frac{2}{3})^n$

两式相减得

$\frac{1}{3}T_n=1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+\ldots+(\frac{2}{3})^{n-1}-n\bullet(\frac{2}{3})n=3[1-(\frac{2}{3})^n]-n(\frac{2}{3})^n$

故 $T_n=9[1-(\frac{2}{3})^n]-3n(\frac{2}{3})^n=9-\frac{(3+n)2^n}{3^{n-1}}$

从而 $S_n=a_1+2a_2+\ldots+na_n=3(1+2+3+\ldots+n)-2T_n$

$=\frac{3}{2}n(n+1)+\frac{(n+3)2^{n+1}}{3^{n-1}}-18$