2007 年广东高考理科数学真题及答案

本试卷共 4 页，21 小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的铅笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上、将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上，如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 作答选做题时，请先用 2B 铅笔填涂选做题的题号（或题组号）对应的信息点，再作答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。

5. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：锥体的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高。

如果事件 A、B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

如果事件 A、B 相互独立，那么 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

用最小二乘法求线性回归方程系数公式 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}, \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求的.

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M，$g(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 N，则 $M\cap N=$

A. $\{x|x>-1\}$　　B. $\{x|x<1\}$　　C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. ϕ

2. 若复数 $(1+bi)(2+i)$ 是纯虚数（i 是虚数单位，b 是实数）则 $b=$

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -2

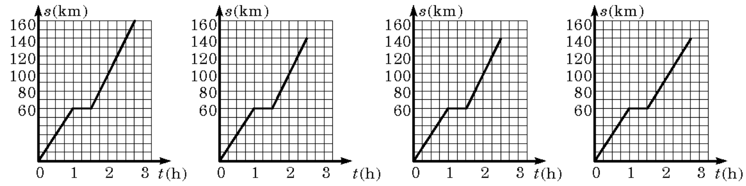
3. 若函数 $f(x)=\sin^2 x-\dfrac{1}{2}(x\in R)$,则$f(x)$是

A. 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数　　B. 最小正周期为 π 的奇函数

C. 最小正周期为 2π 的偶函数　　D. 最小正周期为 π 的偶函数

4. 客车从甲地以 60 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达乙地，在乙地停留了半小时，然后以 80

km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达丙地，下列描述客车从甲地出发.经过乙地，最后到达丙地所经过的路程 s 与时间 t 之间关系的图象中，正确的是

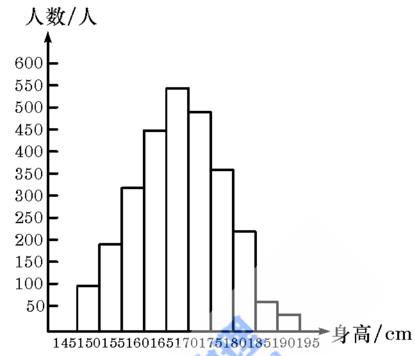


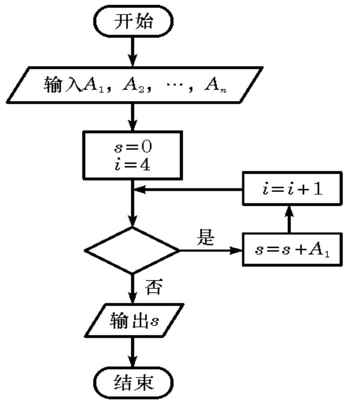
A　　　　B　　　　C　　　　D

5. 已知数$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$，第 k 项满足 $5<a_k<8$，则 $k=$

A. 9　　　B. 8　　　C. 7　　　D. 6

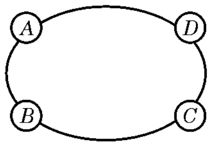
6. 图 1 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图，从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 A_1、A_2、…、A_{10}（如 A_2 表示身高（单位：cm）（150,155）内的学生人数）. 图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160~180cm(含 160cm, 不含 180cm) 的学生人数，那么在流程图中的判断框内应填写的条件是





A. i<6　　　B. i<7　　　C. i<8　　　D. i<9

7. 图 3 是某汽车维修公司的维修点环形分布图，公司在年初分配给 A、B、C、D 四个维修点的这批配件分别调整为 40、45、61 件，但调整只能在相邻维修点之间进行，那么要完成上述调整，最少的调动件次（n 件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为 n）为



A. 15　　　B. 16　　　C. 17　　　D. 18

8. 设 S 是至少含有两个元素的集合，在 S 上定义了一个二元运算“*”（即对任意的 $a,b\in S$，对于有序元素对 (a,b)，在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应）. 若对任意的 $a,b\in S$，有

$a*(b*a)=b$，则对任意的 $a,b\in S$，下列等式中不恒成立的是

A. $(a*b)*a=a$　　　B. $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

C. $b*(b*b)=b$　　　D. $(a*b)*[b*(a*b)=b$

二、填空题 本大题共 7 小题，每小题 5 分，满分 30 分，其中 13～15 题是选做题，考生只能选做二题，三题全答的，只计算前两题得分.

9. 甲、乙两个袋中均装有红、白两种颜色的小球，这些小球除颜色外完全相同.其中甲袋装有 4 个红球，2 个白球，乙袋装有 1 个红球，5 个白球. 现分别从甲、乙两袋中各随机取出一个球，则取出的两球都是红球的概率为__________.（答案用分数表示）

10. 若向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1,\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 120°，则$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________.

11. 在平面直角坐标系xOy中，有一定点A（2，1），若线段OA的垂直平分线过抛物线$y^2=2px\ (p>0)$的焦点，则该抛物线的准线方程是____________.

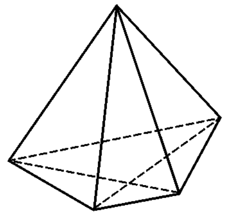


图 4

12. 如果一个凸多面体n棱锥，那么这个凸多面体的所有顶点所确定的直线共有________条. 这些直线中共有$f(n)$对异面直线，则$f(4)=$________；$f(n)=$_________.（答案用数字或n的解析式表示）

13.（坐标系与参数方程选做题）在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=t+3\\y=3-t\end{cases}$，（参数$t\in R$），圆$C$的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta+2\end{cases}$（参数$\theta\in[0,2\pi]$），则圆$C$的圆心坐标为_________，圆心到直线$l$的距离为__________.

14.（不等式选讲选做题）设函数$f(x)=\left|2x-1\right|+x+3$,则$f(-2)=$___________；若$f(x)\le 2$，则$x$的取值范围是___________.

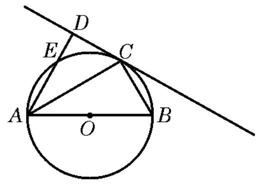


图 5

15.（几何证明选讲选做题）如图 5 所示，圆O的直径$AB=6$，C为圆周上一点，$BC=3$，过C作圆的切线l，过A作l的垂线AD，AD分别与直线l、圆交于点D、E，则$\angle DAC=$_________，线段AE的长为 _____________.

三、解答题：本大题共有 6 小题，满分 80 分.解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16.（本小题满分 12 分）

已知△ABC顶点的直角坐标分别为$A(3,4)$、$B(0,0)$、$C(c,0)$.

（1）若$c=5$，求 $\sin\angle A$ 的值；

（2）若$\angle A$是钝角，求c的取值范围.

17.(本题满分 12 分)

下表提供了某厂节油降耗技术发行后生产甲产品过程中记录的产量x(吨)与相应的生产能耗 y(吨标准煤)的几组对应数据.

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

（1）请画出上表数据的散点图；

（2）请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=\hat{b}x+\hat{a}$；

（3）已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤，试根据（2）求出的线性回归方程，预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤？

（参考数值：3×2.5+4×3+5×4+6×4.5＝66.5）

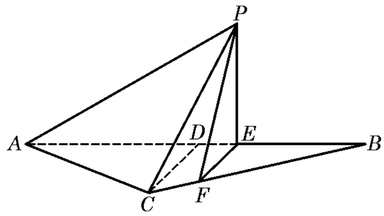
18.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆心在第二象限，半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆 C 与直线 $y=x$ 相切于坐标原点 O. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$ 与圆 C 的一个交点到椭圆两点的距离之和为 10.

（1）求圆 C 的方程.

（2）试探究圆 C 上是否存在异于原点的点 Q，使 Q 到椭圆右焦点 F 的距离等于线段 OF 的长. 若存在，请求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

19.（本小题满分 14 分）



如图 6 所示，等腰△ABC 的底边 $AB=6\sqrt{6}$，高 $CD=3$，点 E 是线段 BD 上异于点 B、D 的动点. 点 F 在 BC 边上，且 $EF\perp AB$. 现沿 EF 将△BEF 折起到△PEF 的位置，使 $PE\perp AE$. 记 $BE=x$　$V(x)$ 表示四棱锥 $P\text{-}ACFE$ 的体积.

（1）求 $V(x)$ 的表达式；

（2）当 x 为何值时，$V(x)$ 取得最大值？

（3）当 $V(x)$ 取得最大值时，求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值

20.（本小题满分 14 分）

已知 a 是实数，函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，求 a 的取值范围.

21.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2+x-1$, α、β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 $(\alpha>\beta)$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数. 设 $a_1=1, a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}(n=1,2,\cdots)$，

(1) 求 α、β 的值；

(2) 证明：对任意的正整数 n，都有 $a_n>\alpha$；

(3) 记 $b_n=\ln\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\ (n=1,2,\cdots)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

参考答案

一. CADBB CBA

二. 9. $\frac{1}{9}$　10. $\frac{1}{2}$　11. $x=-\frac{5}{4}$　12. $\frac{n^2+n}{2}$，12，$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

13. $(0,2)$, $2\sqrt{2}$　14. 6, $[-1,\ 1]$　15. 30°, 3

三. 解答题

16. (1) 解: $|AC|=2\sqrt{5}$，设 AC 中点为 M，则 $\cos A=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{\sqrt{5}}{5}\therefore \sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

(2) 解: $\overrightarrow{AC}=(c-3,-4),\overrightarrow{AB}=(-3,-4)$，若 $\angle A$ 是钝角，则

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-3(c-3)+16<0\therefore c>\frac{25}{3}$.

17. 解: (1) 散点图略

(2) $\sum_{i=1}^{4}X_iY_i=66.5$　$\sum_{i=1}^{4}X_i^2=3^2+4^2+5^2+6^2=86$　$\overline{X}=4.5$　$\overline{Y}=3.5$

$\hat{b}=\frac{66.5-4\times4.5\times3.5}{86-4\times4.5^2}=\frac{66.5-63}{86-81}=0.7$；$\hat{a}=\overline{Y}-\hat{b}\overline{X}=3.5-0.7\times4.5=0.35$

所求的回归方程为 $y=0.7x+0.35$

(3) $x=100$，$y=100\times0.7+0.35=70.35$ 吨,

预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低 $90-70.35=19.65$ (吨)

18. 解: (1) 设圆 C 的圆心为 (m,n)

则 $\begin{cases} m=-n, \\ m<0,n>0 \\ \frac{|m-n|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \end{cases}$　解得 $\begin{cases} m=-2 \\ n=2 \end{cases}$

所求的圆的方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$

(2) 由已知可得 $2a=10$　$a=5$

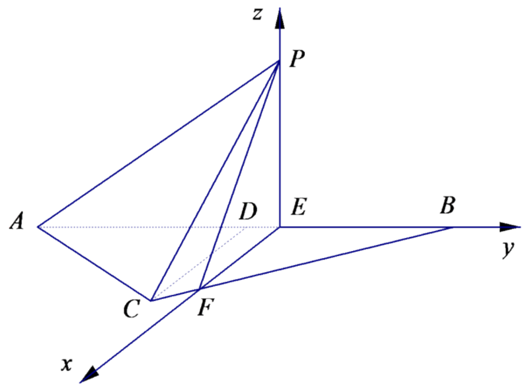
椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，右焦点为 $F(4,0)$.

设存在点 $Q(x,y)\in C$ 满足条件，则 $\begin{cases}(x+2)^2+(y-2)^2=8 \\ (x-4)^2+y^2=16\end{cases}$ 解得 $Q(\frac{4}{5},\frac{12}{5})$

故存在符合要求的点 $Q(\frac{4}{5},\frac{12}{5})$.

19. 解：(1) $V=\frac{1}{3}(9\sqrt{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{6}}\cdot x)\cdot x\ \ (0<x<3\sqrt{6})$ 即 $V=3\sqrt{6}x-\frac{\sqrt{6}}{36}x^3\ (0<x<3\sqrt{6})$；

(2) $V'=3\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{12}x^2=\frac{\sqrt{6}}{12}(36-x^2)$，



$\therefore x\in(0,6)$ 时，$V'>0$; $\therefore x\in(6,3\sqrt{6})$ 时，$V'<0$;

$\therefore x=6$ 时 $V(x)$ 取得最大值.

(3) 以 E 为空间坐标原点, 直线 EF 为 x 轴, 直线 EB 为 y 轴，直线 EP 为 z 轴建立空间直角坐标系，则

$A(0,6-6\sqrt{6},0),C(3,6-3\sqrt{6},0),\overrightarrow{AC}=(3,3\sqrt{6},0)$；

$P(0,0,6),F(\sqrt{6},0,0)\ \therefore\overrightarrow{PF}=(\sqrt{6},0,-6)$，设异面直线 AC 与 PF 夹角是 θ

$\therefore\cos\theta=\frac{|3\sqrt{6}|}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}\sqrt{7}}=\frac{1}{7}$

20. 解：若 $a=0$，则 $f(x)=2x-3$ 有唯一零点为 $\frac{3}{2}\notin[-1,1]$，故 $a=0$ 不符合要求；

由 $f(x)=2ax^2+2x-3-a=0\ \therefore a(2x^2-1)=3-2x\ \therefore a=\frac{3-2x}{(2x^2-1)}$，$x\in[-1,1]$ 且 $x\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由 $a'_x=\frac{2(2x^2-6x+1)}{(2x^2-1)^2}$ 当 $2x^2-6x+1=0$ 时，$x_1=\frac{3-\sqrt{7}}{2}\in[-1,1]$,

$x_2=\frac{3+\sqrt{7}}{2}>1$，

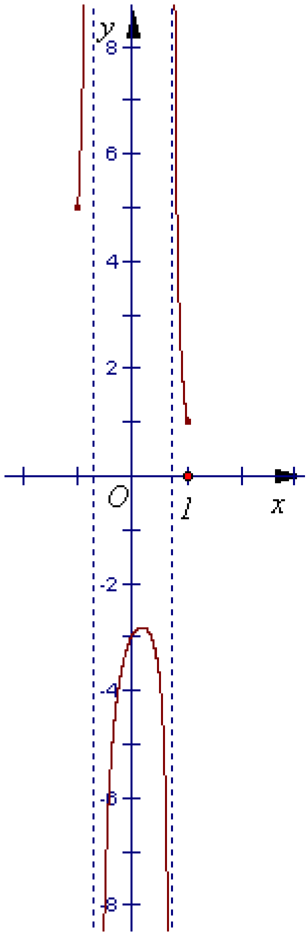
当 $x\in[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},x_1)$ 时，$a'>0$，a 在两个区间上分别递增；

当 $x\in(x_1,\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ 时，$a'<0$，a 在两个区间上分别递减；

由 $x=-1$ 时，$a=5$，$x=1$ 时，$a=1$，$x_1=\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ 时，$a=-\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

$\therefore a \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{7}}{2}] \cup [1, +\infty)$

分析如图:



解法二：若 $a=0$ ， $f(x)=2x-3$ ，显然在上没有零点，所以 $a \neq 0$

令 $\Delta = 4+8a(3+a) = 8a^2+24a+4=0$

得 $a=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$

当 $a=\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ 时， $y=f(x)$ 恰有一个零点在 $[-1,1]$ 上；

当 $f(-1)\cdot f(1)=(a-1)(a-5)\leq 0$

即 $1<a<5$ 时， $y=f(x)$ 也恰有一个零点在 $[-1,1]$ 上；

当 $y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有两个零点时，则

$$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=8a^2+24a+4>0 \\ -1<-\frac{1}{2a}<1 \\ f(1)\geq 0 \\ f(-1)\geq 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a<0 \\ \Delta=8a^2+24a+4>0 \\ -1<-\frac{1}{2a}<1 \\ f(1)\leq 0 \\ f(-1)\leq 0 \end{cases}$$

解得 $a\geq 5$ 或 $a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$

因此 a 的取值范围是 $a\leq\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ 或 ； $a\geq 1$

21 解:(1) 由 $x^2+x-1=0$ 得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\therefore \alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

(2)(数学归纳法)①当 $n=1$ 时, $a_1=1>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 命题成立;

②假设当$n=k(k\ge 1,k\in N^*)$时命题成立, 即$a_k>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$\therefore a_{k+1}=\dfrac{a_k^2+1}{2a_k+1}=\dfrac{a_k+\frac{1}{2}}{2}+\dfrac{\frac{5}{8}}{a_k+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\ge 2\cdot\sqrt{\dfrac{5}{16}}-\dfrac{1}{2}=\alpha$, 又等号成立时$a_k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$\therefore a_k>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$时, $a_{k+1}>\beta \therefore n=k+1$时命题成立;由①②知对任意$n\in N^*$均有$a_n>\alpha$.

(3) $f'(x)=2x+1$ $\therefore a_{n+1}=a_n-\dfrac{a_n^2+a_n-1}{2a_n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n+1}$

$$\therefore a_{n+1}-\beta=\frac{a_n^2+1}{2a_n+1}-\beta=\frac{(a_n-\beta)^2-(\beta^2+\beta-1)}{2a_n+1}=\frac{(a_n-\beta)^2}{2a_n+1}$$

同理 $\therefore a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(a_n-\alpha)^2}{2a_n+1}\therefore\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=(\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha})^2\therefore\ln\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=2\ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$

$\therefore$ $b_{n+1}=2b_n$ 又 $b_1=\ln\dfrac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}=\ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=4\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$数列$\{b_n\}$是一个首项为 $4\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 公比为2的等比数列;

$$\therefore\quad S_n=\frac{4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1-2^n\right)}{1-2}=4\left(2^n-1\right)\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$