2013年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题．每小题5分，在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1．（5分）已知集合M={x|－3<x<1，x∈R}，N={－3，－2，－1，0，1}，则M∩N=（　　）

A．{－2，－1，0，1}　　B．{－3，－2，－1，0}　　C．{－2，－1，0}　　D．{－3，－2，－1}

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】11：计算题．

【分析】找出集合M与N的公共元素，即可求出两集合的交集．

【解答】解：∵集合M={x|－3<x<1，x∈R}，N={－3，－2，－1，0，1}，

∴M∩N={－2，－1，0}．

故选：C．

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5分）$|\frac{2}{1+i}|$=（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

【考点】A8：复数的模．

【专题】11：计算题．

【分析】通过复数的分子与分母同时求模即可得到结果．

【解答】解：$|\frac{2}{1+i}|=\frac{2}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．

故选：C．

【点评】本题考查复数的模的求法，考查计算能力．

3．（5分）设x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y+1\geqslant 0\\x\leqslant 3\end{cases}$，则z=2x﹣3y的最小值是（　　）

A．﹣7　　B．﹣6　　C．﹣5　　D．﹣3

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】59：不等式的解法及应用．

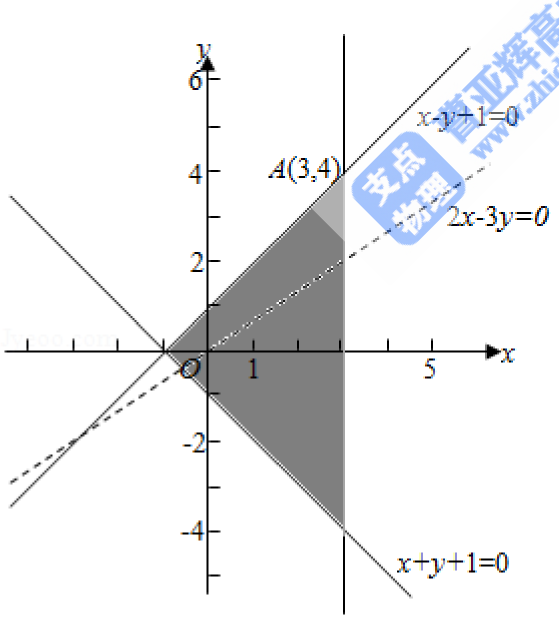
【分析】先画出满足约束条件：$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y+1\geqslant 0\\x\leqslant 3\end{cases}$，的平面区域，求出平面区域的各角点，然后将角点坐标代入目标函数，比较后，即可得到目标函数z=2x﹣3y的最小值．

【解答】解：根据题意，画出可行域与目标函数线如下图所示，

由$\begin{cases}x-y+1=0\\x=3\end{cases}$得$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，

由图可知目标函数在点A（3，4）取最小值z=2×3﹣3×4=﹣6．

故选：B．



【点评】用图解法解决线性规划问题时，分析题目的已知条件，找出约束条件和目标函数是关键，可先将题目中的量分类、列出表格，理清头绪，然后列出不等式组（方程组）寻求约束条件，并就题目所述找出目标函数．然后将可行域各角点的值一一代入，最后比较，即可得到目标函数的最优解．

4．（5分）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知b=2，$B=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{\pi}{4}$，则△ABC的面积为（　　）

A．$2\sqrt{3}+2$　　B．$\sqrt{3}+1$　　C．$2\sqrt{3}-2$　　D．$\sqrt{3}-1$

【考点】%H：三角形的面积公式；HP：正弦定理．

【专题】58：解三角形．

【分析】由sinB，sinC及b的值，利用正弦定理求出c的值，再求出A的度数，由b，c及sinA的值，利用三角形的面积公式即可求出三角形ABC的面积．

【解答】解：∵b=2，$B=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{\pi}{4}$，

∴由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得：$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$，$A=\frac{7\pi}{12}$，

∴$\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{3}+1$．

故选：B．

【点评】此题考查了正弦定理，三角形的面积公式，以及两角和与差的余弦函数公式，熟练掌握正弦定理是解本题的关键．

5．（5分）设椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，P是C上的点$PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30°$，则C的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】K4：椭圆的性质．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】设$|PF_2|=x$，在直角三角形PF_1F_2中，依题意可求得$|PF_1|$与$|F_1F_2|$，利用椭圆离心率的性质即可求得答案．

【解答】解：$|PF_2|=x$，∵$PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30°$，

∴$|PF_1|=2x$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}x$，

又$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$

∴$2a=3x$，$2c=\sqrt{3}x$，

∴C的离心率为：$e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：D.

【点评】本题考查椭圆的简单性质，求得$|PF_1|$与$|PF_2|$及$|F_1F_2|$是关键，考查理解与应用能力，属于中档题.

6．（5分）已知$\sin2\alpha=\frac{2}{3}$，则$\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})=$（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

【考点】GE：诱导公式；GG：同角三角函数间的基本关系；GS：二倍角的三角函数.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】所求式子利用二倍角的余弦函数公式化简，再利用诱导公式变形，将已知等式代入计算即可求出值.

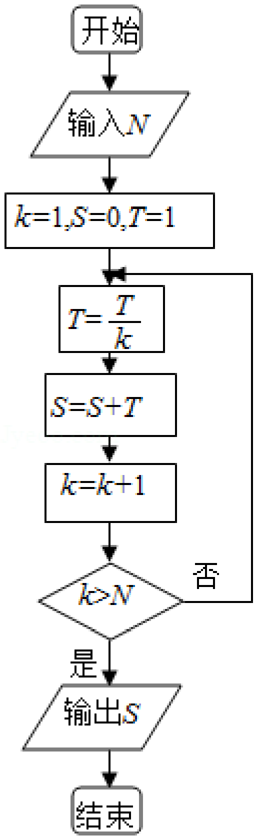
【解答】解：∵$\sin2\alpha=\frac{2}{3}$，

∴$\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{2}(1-\sin2\alpha)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{6}$.

故选：A.

【点评】此题考查了二倍角的余弦函数公式，以及诱导公式的作用，熟练掌握公式是解本题的关键.

7．（5分）执行如图的程序框图，如果输入的N=4，那么输出的S=（　　）



A. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

B. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times2}+\frac{1}{4\times3\times2}$

C. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

D. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times2}+\frac{1}{4\times3\times2}+\frac{1}{5\times4\times3\times2}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】27：图表型．

【分析】由程序中的变量、各语句的作用，结合流程图所给的顺序可知当条件满足时，用$S+\frac{T}{k}$的值代替S得到新的S，并用k+1代替k，直到条件不能满足时输出最后算出的S值，由此即可得到本题答案．

【解答】解：根据题意，可知该按以下步骤运行

第一次：S=1，

第二次：$S=1+\frac{1}{2}$，

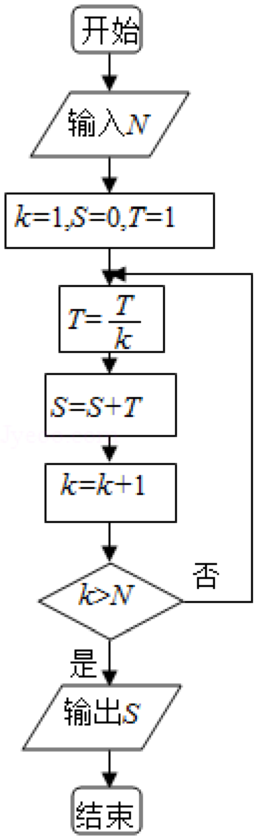
第三次：S=1+$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{3\times2}$，

第四次：S=1+$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{3\times2}$+$\frac{1}{4\times3\times2}$.

此时k=5时，符合k＞N=4，输出S的值.

∴S=1+$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{3\times2}$+$\frac{1}{4\times3\times2}$

故选：B.



【点评】本题主要考查了直到型循环结构，循环结构有两种形式：当型循环结构和直到型循环结构，以及表格法的运用，属于基础题.

8．（5分）设a=$\log_3 2$，b=$\log_5 2$，c=$\log_2 3$，则（　　）

A．a＞c＞b　　B．b＞c＞a　　C．c＞a＞b　　D．c＞b＞a

【考点】4M：对数值大小的比较.

【专题】11：计算题.

【分析】判断对数值的范围，然后利用换底公式比较对数式的大小即可.

【解答】解：由题意可知：$a=\log_3 2\in$（0，1），$b=\log_5 2\in$（0，1），$c=\log_2 3>1$，

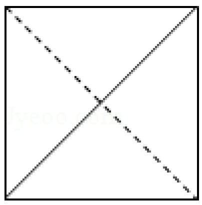
所以$a=\log_3 2$，$b=\log_5 2=\frac{\log_3 2}{\log_3 5}<\log_3 2$，

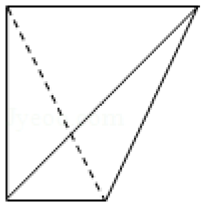
所以$c>a>b$，

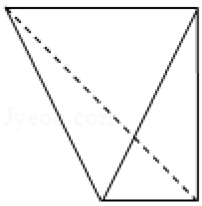
故选：C．

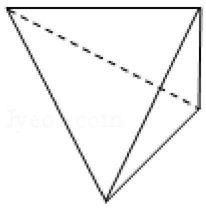
【点评】本题考查对数值的大小比较，换底公式的应用，基本知识的考查．

9．（5分）一个四面体的顶点在空间直角坐标系O﹣xyz中的坐标分别是（1，0，1），（1，1，0），（0，1，1），（0，0，0），画该四面体三视图中的正视图时，以zOx平面为投影面，则得到正视图可以为（　　）

A．

B．

C．

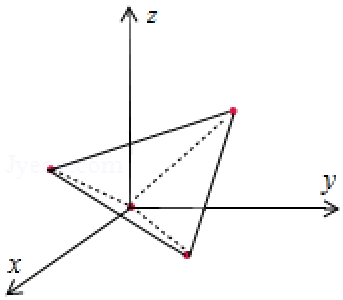
D．

【考点】L7：简单空间图形的三视图．

【专题】11：计算题；13：作图题．

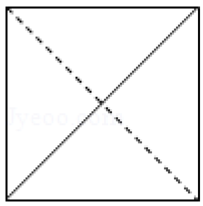
【分析】由题意画出几何体的直观图，然后判断以zOx平面为投影面，则得到正视图即可．

【解答】解：因为一个四面体的顶点在空间直角坐标系O﹣xyz中的坐标分别是（1，0，1），（1，1，0），（0，1，1），（0，0，0），几何体的直观图如图，是正方体的顶点为顶点的一个正四面体，所以以zOx平面为投影面，



则得到正视图为：

故选：A．



【点评】本题考查几何体的三视图的判断，根据题意画出几何体的直观图是解题的关键，考查空间想象能力．

10．（5分）设抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，直线l过F且与C交于A，B两点．若|AF|=3|BF|，则l的方程为（　　）

A．$y=x-1$或$y=-x+1$　　B．$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$或$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

C．$y=\sqrt{3}(x-1)$或$y=-\sqrt{3}(x-1)$　　D．$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$或$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】根据题意，可得抛物线焦点为F（1，0），由此设直线l方程为$y=k(x-1)$，与抛物线方程联解消去x，得$\frac{k}{4}y^2-y-k=0$．再设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），由根与系数的关系和|AF|=3|BF|，建立关于y_1、y_2和k的方程组，解之可得k值，从而得到直线l的方程．

【解答】解：∵抛物线C方程为$y^2=4x$，可得它的焦点为F（1，0），

∴设直线l方程为$y=k(x-1)$

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$消去x，得$\frac{k}{4}y^2-y-k=0$

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

可得$y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=-4$…（*）

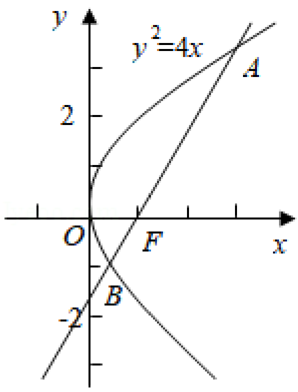
∵|AF|=3|BF|，

∴$y_1+3y_2=0$，可得$y_1=-3y_2$，代入（*）得$-2y_2=\frac{4}{k}$且$-3y_2^2=-4$，

消去y_2得$k^2=3$，解之得$k=\pm\sqrt{3}$

∴直线l方程为$y=\sqrt{3}(x-1)$或$y=-\sqrt{3}(x-1)$

故选：C.



【点评】本题给出抛物线的焦点弦AB被焦点F分成1：3的两部分，求直线AB的方程，着重考查了抛物线的标准方程、简单几何性质和直线与圆锥曲线的位置关系等知识，属于中档题.

11．（5分）已知函数f（x）=x^3+ax^2+bx+c，下列结论中错误的是（　　）

A．$\exists x_0\in R$，f（x_0）=0

B．函数y=f（x）的图象是中心对称图形

C．若x_0是f（x）的极小值点，则f（x）在区间（$-\infty$，x_0）上单调递减

D．若x_0是f（x）的极值点，则f′（x_0）=0

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6D：利用导数研究函数的极值.

【专题】16：压轴题；53：导数的综合应用.

【分析】对于A，对于三次函数f（x

）$=x^3+ax^2+bx+c$，由于当$x\to-\infty$时，$y\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$y\to+\infty$，故在区间（$-\infty$，$+\infty$）肯定存在零点；

对于B，根据对称变换法则，求出对应中心坐标，可以判断；

对于C：采用取特殊函数的方法，若取$a=-1$，$b=-1$，$c=0$，则$f(x)=x^3-x^2-x$，利用导数研究其极值和单调性进行判断；

D：若x_0是$f(x)$的极值点，根据导数的意义，则$f'(x_0)=0$，正确．

【解答】解：

A、对于三次函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

A：由于当$x\to-\infty$时，$y\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$y\to+\infty$，

故$\exists x_0\in R$，$f(x_0)=0$，故A正确；

B、$\because f(-\frac{2a}{3}-x)+f(x)=(-\frac{2a}{3}-x)^3+a(-\frac{2a}{3}-x)^2+b(-\frac{2a}{3}-x)+c+x^3+ax^2+bx+c=\frac{4a^3}{27}-\frac{2ab}{3}+2c$，

$f(-\frac{a}{3})=(-\frac{a}{3})^3+a(-\frac{a}{3})^2+b(-\frac{a}{3})+c=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$，

$\because f(-\frac{2a}{3}-x)+f(x)=2f(-\frac{a}{3})$，

$\therefore$点P（$-\frac{a}{3}$，$f(-\frac{a}{3})$）为对称中心，故B正确．

C、若取$a=-1$，$b=-1$，$c=0$，则$f(x)=x^3-x^2-x$，

对于$f(x)=x^3-x^2-x$，$\because f'(x)=3x^2-2x-1$

$\therefore$由$f'(x)=3x^2-2x-1>0$得$x\in(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$

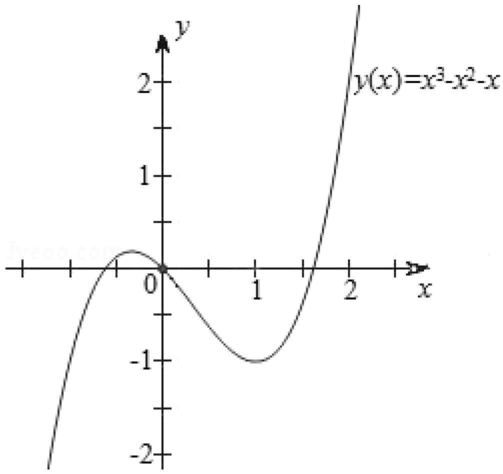
由$f'(x)=3x^2-2x-1<0$得$x\in(-\frac{1}{3},1)$

$\therefore$函数$f(x)$的单调增区间为：$(-\infty,-\frac{1}{3})$，$(1,+\infty)$，减区间为：$(-\frac{1}{3},1)$，

故1是$f(x)$的极小值点，但$f(x)$在区间$(-\infty,1)$不是单调递减，故C错误；

D：若x_0是$f(x)$的极值点，根据导数的意义，则$f'(x_0)=0$，故D正确．

由于该题选择错误的，故选：C．



【点评】本题考查了导数在求函数极值中的应用，利用导数求函数的单调区间，及导数的运算．

12．（5分）若存在正数x使2^x（x﹣a）＜1成立，则a的取值范围是（　　）

A．（﹣∞，+∞）　B．（﹣2，+∞）　C．（0，+∞）　D．（﹣1，+∞）

【考点】3E：函数单调性的性质与判断；7E：其他不等式的解法．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】转化不等式为$a>x-\frac{1}{2^x}$，利用x是正数，通过函数的单调性，求出a的范围即可．

【解答】解：因为2^x（x﹣a）＜1，所以$a>x-\frac{1}{2^x}$，

函数y=$x-\frac{1}{2^x}$是增函数，x＞0，所以y＞﹣1，即a＞﹣1，

所以a的取值范围是（﹣1，+∞）．

故选：D．

【点评】本题考查不等式的解法，函数单调性的应用，考查分析问题解决问题的能力．

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分．

13．（4分）从1，2，3，4，5中任意取出两个不同的数，其和为5的概率是__

$\underline{0.2\quad}$.

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】由题意结合组合数公式可得总的基本事件数，再找出和为5的情形，由古典概型的概率公式可得答案.

【解答】解：从1，2，3，4，5中任意取出两个不同的数共有C_5^2=10种情况，

和为5的有（1，4）（2，3）两种情况，

故所求的概率为：$\frac{2}{10}$=0.2

故答案为：0.2

【点评】本题考查古典概型及其概率公式，属基础题.

14．（4分）已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BD}$=$\underline{\quad 2\quad}$.

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】根据两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，可得要求的式子为$(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，再根据两个向量垂直的性质，运算求得结果.

【解答】解：∵已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$=0，

故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\bullet(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=4+0-0-\frac{1}{2}\times4=2$，

故答案为2.

【点评】本题主要考查两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，两个向量垂直的性质，属于中档题.

15．（4分）已知正四棱锥O﹣ABCD的体积为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，底面边长为$\sqrt{3}$，则以O为球心，OA为半径的球的表面积为$\underline{\quad 24\pi\quad}$.

【考点】L3：棱锥的结构特征；LG：球的体积和表面积．

【专题】16：压轴题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】先直接利用锥体的体积公式即可求得正四棱锥O﹣ABCD的高，再利用直角三角形求出正四棱锥O﹣ABCD的侧棱长OA，最后根据球的表面积公式计算即得．

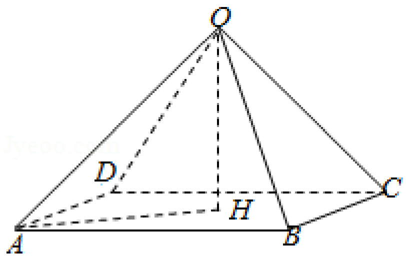
【解答】解：如图，正四棱锥O﹣ABCD的体积$V=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times OH=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore OH=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

在直角三角形OAH中，$OA=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}=\sqrt{6}$

所以表面积为$4\pi r^2=24\pi$；

故答案为：24π．



【点评】本题考查锥体的体积、球的表面积计算，考查学生的运算能力，属基础题．

16．（4分）函数$y=\cos(2x+\phi)$（$-\pi\le\phi<\pi$）的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位后，与函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象重合，则$\phi=$__$\frac{5\pi}{6}$__．

【考点】HJ：函数$y=A\sin(\omega x+\phi)$的图象变换．

【专题】11：计算题；16：压轴题；57：三角函数的图像与性质．

【分析】根据函数图象平移的公式，可得平移后的图象为$y=\cos[2(x-\frac{\pi}{2})+\phi]$的图象，即$y=\cos(2x+\phi-\pi)$的图象．结合题意得函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})=$

$\cos(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})$的图象与y=cos（2x+ϕ﹣π）图象重合，由此结合三角函数的诱导公式即可算出ϕ的值．

【解答】解：函数y=cos（2x+ϕ）（﹣π≤ϕ＜π）的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位后，得平移后的图象的函数解析式为

$y=\cos[2(x-\frac{\pi}{2})+\phi]=\cos(2x+\phi-\pi)$，

而函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\cos(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})$，

由函数y=cos（2x+ϕ）（﹣π≤ϕ＜π）的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位后，与函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象重合，得

$2x+\phi-\pi=2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$，解得：$\phi=\frac{5\pi}{6}$．

符合﹣π≤ϕ＜π．

故答案为$\frac{5\pi}{6}$．

【点评】本题给出函数y=cos（2x+ϕ）的图象平移，求参数ϕ的值．着重考查了函数图象平移的公式、三角函数的诱导公式和函数y=Asin（ωx+ϕ）的图象变换等知识，属于基础题．

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（12分）已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，$a_1=25$，且a_1，a_{11}，a_{13}成等比数列．

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求$a_1+a_4+a_7+\ldots+a_{3n-2}$．

【考点】84：等差数列的通项公式；88：等比数列的通项公式；8E：数列的求和．

【专题】54：等差数列与等比数列．

【分析】（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d≠0，利用成等比数列的定义可得，$a_{11}^2=a_1a_{13}$，再利用等差数列的通项公式可得$(a_1+10d)^2=a_1(a_1+12d)$，化为$d(2a_1+25d)=0$，解出d即可得到通项公式a_n；

（II）由（I）可得$a_{3n-2}=-2(3n-2)+27=-6n+31$，可知此数列是以25为首项，$-6$为公差的等差数列．利用等差数列的前n项和公式即可得出$a_1+a_4+a_7+\ldots+a_{3n-2}$．

【解答】解：（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d\neq 0$，

由题意a_1，a_{11}，a_{13}成等比数列，$\therefore a_{11}^2=a_1a_{13}$，

$\therefore (a_1+10d)^2=a_1(a_1+12d)$，化为$d(2a_1+25d)=0$，

$\because d\neq 0$，$\therefore 2\times 25+25d=0$，解得$d=-2$．

$\therefore a_n=25+(n-1)\times(-2)=-2n+27$．

（II）由（I）可得$a_{3n-2}=-2(3n-2)+27=-6n+31$，可知此数列是以25为首项，$-6$为公差的等差数列．

$\therefore S_n=a_1+a_4+a_7+\ldots+a_{3n-2}=\dfrac{n(a_1+a_{3n-2})}{2}$

$=\dfrac{n(25-6n+31)}{2}$

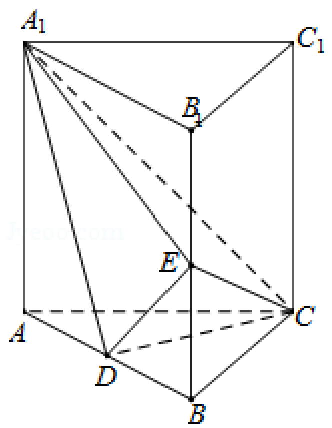
$=-3n^2+28n$．

【点评】熟练掌握等差数列与等比数列的通项公式及其前n项和公式是解题的关键．

18．（12分）如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别是AB，BB_1的中点

（Ⅰ）证明：$BC_1\parallel$平面A_1CD；

（Ⅱ）$AA_1=AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，求三棱锥$C-A_1DE$的体积．



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LS：直线与平面平行．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】（Ⅰ）连接AC_1

交A_1C于点F，则DF为三角形ABC_1的中位线，故$DF\parallel BC_1$．再根据直线和平面平行的判定定理证得

$BC_1\parallel$平面A_1CD．

（Ⅱ）由题意可得此直三棱柱的底面ABC为等腰直角三角形，由D为AB的中点可得$CD\perp$平面ABB_1A_1．求得CD的值，利用

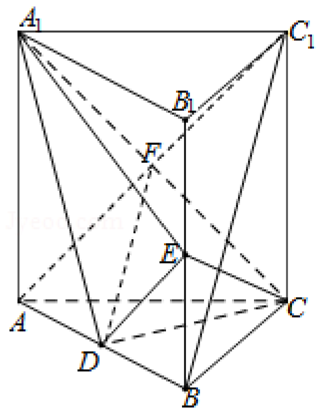
勾股定理求得A_1D、DE和A_1E的值，可得$A_1D\perp DE$．进而求得$S_{\triangle A_1DE}$的值，再根据三棱锥$C-A_1DE$的体积

为$\frac{1}{3}\bullet S_{\triangle A_1DE}\bullet CD$，运算求得结果．

【解答】解：（Ⅰ）证明：连接AC_1交A_1C于点F，则F为AC_1的中点．

∵直棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别是AB，BB_1的中点，故DF为三角形ABC_1的中位线，故$DF\parallel BC_1$．

由于$DF\subset$平面A_1CD，而BC_1不在平面A_1CD中，故有$BC_1\parallel$平面A_1CD．



（Ⅱ）∵$AA_1=AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，故此直三棱柱的底面ABC为等腰直角三角形．

由D为AB的中点可得$CD\perp$平面ABB_1A_1，∴$CD=\frac{AC\bullet BC}{AB}=\sqrt{2}$．

∵$A_1D=\sqrt{A_1A^2+AD^2}=\sqrt{6}$，同理，利用勾股定理求得 $DE=\sqrt{3}$，$A_1E=3$．

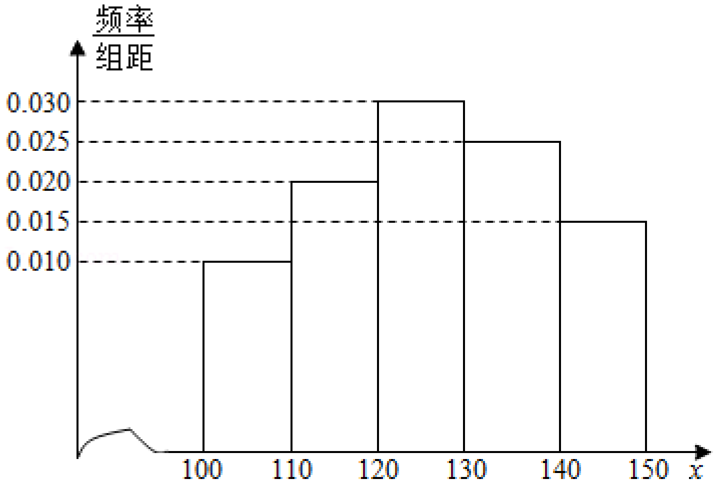
再由勾股定理可得$A_1D^2+DE^2=A_1E^2$，∴$A_1D\perp DE$．

∴$S_{\triangle A_1DE}=\frac{1}{2}\bullet A_1D\bullet DE=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

∴$V_{C-A_1DE}=\frac{1}{3}\bullet S_{\triangle A_1DE}\bullet CD=1$．

【点评】本题主要考查直线和平面平行的判定定理的应用，求三棱锥的体积，体现了数形结合的数学思想，属于中档题．

19．（12分）经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出1t该产品获利润500元，未售出的产品，每1t亏损300元．根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示．经销商为下一个销售季度购进了130t该农产品．以X（单位：t，100≤X≤150）表示下一个销售季度内的市场需求量，T（单位：元）表示下一个销售季度内经销该农产品的利润．



（Ⅰ）将T表示为X的函数；

（Ⅱ）根据直方图估计利润T不少于57000元的概率．

【考点】B8：频率分布直方图．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】（I）由题意先分段写出，当X∈[100，130）时，当X∈[130，150）时，和利润值，最后利用分段函数的形式进行综合即可．

（II）由（I）知，利润T不少于57000元，当且仅当120≤X≤150．再由直方图知需求量X∈[120，150]的频率为0.7，利用样本估计总体的方法得出下一个销售季度的利润T不少于57000元的概率的估计值．

【解答】解：（I）由题意得，当X∈[100，130）时，T=500X﹣300（130﹣X）=800X﹣39000，

当X∈[130，150]时，T=500×130=65000，

$\therefore T=\begin{cases}800X-39000, & X\in[100,130)\\ 65000, & X\in[130,150]\end{cases}$.

（II）由（I）知，利润T不少于57000元，当且仅当$120\le X\le 150$.

由直方图知需求量$X\in[120,150]$的频率为0.7，

所以下一个销售季度的利润T不少于57000元的概率的估计值为0.7.

【点评】本题考查用样本的频率分布估计总体分布及识图的能力，求解的重点是对题设条件及直方图的理解，了解直方图中每个小矩形的面积的意义.

20. （12分）在平面直角坐标系xOy中，已知圆P在x轴上截得线段长为$2\sqrt{2}$，在y轴上截得线段长为$2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求圆心P的轨迹方程；

（Ⅱ）若P点到直线y=x的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，求圆P的方程.

【考点】J1：圆的标准方程；J3：轨迹方程.

【专题】15：综合题；16：压轴题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】（Ⅰ）由题意，可直接在弦心距、弦的一半及半径三者组成的直角三角形中利用勾股定理建立关于点P的横纵坐标的方程，整理即可得到所求的轨迹方程；

（Ⅱ）由题，可先由点到直线的距离公式建立关于点P的横纵坐标的方程，将此方程与（I）所求的轨迹方程联立，解出点P的坐标，进而解出圆的半径即可写出圆P的方程.

【解答】解：（Ⅰ）设圆心P（x，y），由题意得圆心到x轴的距离与半径之间的关系为$2=-y^2+r^2$，同理圆心到y轴的距离与半径之间的关系为$3=-x^2+r^2$，由两式整理得$x^2+3=y^2+2$，整理得$y^2-x^2=1$即为圆心P的轨迹方程，此轨迹是等轴双曲线

（Ⅱ）由P点到直线y=x的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$得，$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$，即$|x-y|=1$，即$x=y+1$或$y=x+1$，分别代入$y^2-x^2=1$解得P（0，－1）或P（0，1）

若P（0，－1），此时点P在y轴上，故半径为$\sqrt{3}$，所以圆P的方程为$(y+1)^2+x^2=3$；

若P（0，1），此时点P在y轴上，故半径为$\sqrt{3}$，所以圆P的方程为（y﹣1）^{2}+x^2=3；

综上，圆P的方程为（y+1）^{2}+x^2=3或（y﹣1）^{2}+x^2=3

【点评】本题考查求轨迹方程的方法解析法及点的直线的距离公式、圆的标准方程与圆的性质，解题的关键是理解圆的几何特征，将几何特征转化为方程

21．（12分）已知函数f（x）=x^2e^{-x}

（Ⅰ）求f（x）的极小值和极大值；

（Ⅱ）当曲线y=f（x）的切线l的斜率为负数时，求l在x轴上截距的取值范围．

【考点】5C：根据实际问题选择函数类型；6D：利用导数研究函数的极值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】15：综合题；16：压轴题；35：转化思想；53：导数的综合应用．

【分析】（Ⅰ）利用导数的运算法则即可得出f′（x），利用导数与函数单调性的关系及函数的极值点的定义，即可求出函数的极值；

（Ⅱ）利用导数的几何意义即可得到切线的斜率，得出切线的方程，利用方程求出与x轴交点的横坐标，再利用导数研究函数的单调性、极值、最值即可．

【解答】解：（Ⅰ）∵f（x）=x^2e^{-x}，

∴f′（x）=$2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2)$，

令f′（x）=0，解得x=0或x=2，

令f′（x）＞0，可解得0＜x＜2；

令f′（x）＜0，可解得x＜0或x＞2，

故函数在区间（﹣∞，0）与（2，+∞）上是减函数，在区间（0，2）上是增函数．

∴x=0是极小值点，x=2极大值点，又f（0）=0，f（2）=$\frac{4}{e^2}$．

故f（x）的极小值和极大值分别为0，$\frac{4}{e^2}$．

（Ⅱ）设切点为（x_0，$x_0^2e^{-x_0}$），

则切线方程为$y-x_0^2e^{-x_0}=e^{-x_0}(2x_0-x_0^2)$（$x-x_0$），

令$y=0$，解得$x=\frac{x_0^2-x_0}{x_0-2}=(x_0-2)+\frac{2}{x_0-2}+3$，

∵曲线$y=f$（x）的切线l的斜率为负数，

∴$e^{-x_0}(2x_0-x_0^2)<0$，

∴$x_0<0$或$x_0>2$，

令$f(x_0)=x_0+\frac{2}{x_0-2}+1$，

则$f'(x_0)=1-\frac{2}{(x_0-2)^2}=\frac{(x_0-2)^2-2}{(x_0-2)^2}$.

①当$x_0<0$时，$(x_0-2)^2-2>0$，即f'（x_0）>0，∴f（x_0）在（$-\infty$，0）上单调递增，∴f（x_0）$<f$（0）=0；

②当$x_0>2$时，令f'（x_0）=0，解得$x_0=2+\sqrt{2}$.

当$x_0>2+\sqrt{2}$时，f'（x_0）>0，函数f（x_0）单调递增；当$2<x_0<2+\sqrt{2}$时，f'（x_0）<0，函数f（x_0）单调递减.

故当$x_0=2+\sqrt{2}$时，函数f（x_0）取得极小值，也即最小值，且$f(2+\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$.

综上可知：切线l在x轴上截距的取值范围是（$-\infty$，0）$\cup[3+2\sqrt{2}，+\infty)$.

【点评】本题考查利用导数求函数的极值与利用导数研究函数的单调性、切线、函数的值域，综合性强，考查了推理能力和计算能力.

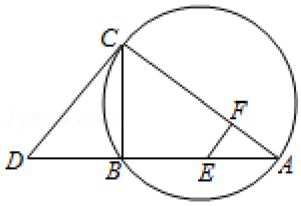
选做题．请考生在第22、23、24题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一部分，作答时请写清题号．

22．【选修4﹣1几何证明选讲】

如图，CD为△ABC外接圆的切线，AB的延长线交直线CD于点D，E、F分别为弦AB与弦AC上的点，且BC•AE=DC•AF，B、E、F、C四点共圆．

（1）证明：CA是△ABC外接圆的直径；

（2）若DB=BE=EA，求过B、E、F、C四点的圆的面积与△ABC外接圆面积的比值．



【考点】NC：与圆有关的比例线段．

【专题】5B：直线与圆．

【分析】（1）已知CD为△ABC外接圆的切线，利用弦切角定理可得∠DCB=∠A，及BC•AE=DC•AF，可知△CDB∽△AEF，于是∠CBD=∠AFE．

利用B、E、F、C四点共圆，可得∠CFE=∠DBC，进而得到∠CFE=∠AFE=90°即可证明CA是△ABC外接圆的直径；

（2）要求过B、E、F、C四点的圆的面积与△ABC外接圆面积的比值．只需求出其外接圆的直径的平方之比即可．由过B、E、F、C四点的圆的直径为CE，及DB=BE，可得CE=DC，利用切割线定理可得DC^2=DB•DA，CA^2=CB^2+BA^2，都用DB表示即可．

【解答】（1）证明：∵CD为△ABC外接圆的切线，∴∠DCB=∠A，

∵BC•AE=DC•AF，∴$\frac{BC}{FA}=\frac{DC}{EA}$．

∴△CDB∽△AEF，∴∠CBD=∠AFE．

∵B、E、F、C四点共圆，∴∠CFE=∠DBC，∴∠CFE=∠AFE=90°．

∴∠CBA=90°，∴CA是△ABC外接圆的直径；

（2）连接CE，∵∠CBE=90°，

∴过B、E、F、C四点的圆的直径为CE，由DB=BE，得CE=DC，

又BC^2=DB•BA=2DB^2，

∴CA^2=4DB^2+BC^2=6DB^2．

而DC^2=DB•DA=3DB^2，

故过B、E、F、C四点的圆的面积与△ABC面积的外接圆的面积比值=$\frac{CE^2}{AC^2}$=

$\frac{3DB^2}{6DB^2}=\frac{1}{2}$.

【点评】熟练掌握弦切角定理、相似三角形的判定与性质、四点共圆的性质、直径的判定、切割线定理、勾股定理等腰三角形的性质是解题的关键.

23．已知动点P、Q都在曲线C：$\begin{cases}x=2\cos\beta\\y=2\sin\beta\end{cases}$（β为参数）上，对应参数分别为β=α与β=2α（0＜α＜2π），M为PQ的中点.

（1）求M的轨迹的参数方程；

（2）将M到坐标原点的距离d表示为α的函数，并判断M的轨迹是否过坐标原点.

【考点】QH：参数方程化成普通方程.

【专题】5S：坐标系和参数方程.

【分析】（1）利用参数方程与中点坐标公式即可得出；

（2）利用两点之间的距离公式、三角函数的单调性即可得出.

【解答】解：（1）依题意有P（2cosα，2sinα），Q（2cos2α，2sin2α），

因此M（cosα+cos2α，sinα+sin2α）.

M的轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha+\cos2\alpha\\y=\sin2\alpha+\sin\alpha\end{cases}$（α为参数，0＜α＜2π）.

（2）M点到坐标原点的距离d=$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2\cos\alpha}$（0＜α＜2π）.

当α=π时，d=0，故M的轨迹过坐标原点.

【点评】本题考查了参数方程与中点坐标公式、两点之间的距离公式、三角函数的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

24．（14分）【选修4－－5；不等式选讲】

设a，b，c均为正数，且a+b+c=1，证明：

（Ⅰ）$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}$

（Ⅱ）$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant1$.

【考点】R6：不等式的证明．

【专题】14：证明题；16：压轴题．

【分析】（Ⅰ）依题意，由$a+b+c=1\Rightarrow (a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$，利用基本不等式可得$3(ab+bc+ca)\le 1$，从而得证；

（Ⅱ）利用基本不等式可证得：$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a$，$\frac{b^2}{c}+c\ge 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$，三式累加即可证得结论．

【解答】证明：（Ⅰ）由$a^2+b^2\ge 2ab$，$b^2+c^2\ge 2bc$，$c^2+a^2\ge 2ca$得：

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$，

由题设得$(a+b+c)^2=1$，即$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$，

所以$3(ab+bc+ca)\le 1$，即$ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$．

（Ⅱ）因为$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a$，$\frac{b^2}{c}+c\ge 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$，

故$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c)\ge 2(a+b+c)$，即$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$．

所以$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 1$．

【点评】本题考查不等式的证明，突出考查基本不等式与综合法的应用，考查推理论证能力，属于中档题．