2007 年湖南高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择）题两部分，满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率是 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的体积公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，球的表面积公式 $S=4\pi R^2$，其中 R 表示球的半径

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．复数 $\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$ 等于（　　）

A．$4\mathrm{i}$　　B．$-4\mathrm{i}$　　C．$2\mathrm{i}$　　D．$-2\mathrm{i}$

2．不等式 $\dfrac{x-2}{x+1}\le 0$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,-1)\cup(-1,2]$　　B．$[-1,2]$　　C．$(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$　　D．$(-1,2]$

3．设 M，N 是两个集合，则“$M\cup N=\varnothing$”是“$M\cap N\ne\varnothing$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

4．设 $\vec{a},\vec{b}$ 是非零向量，若函数 $f(x)=(x\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-x\vec{b})$ 的图象是一条直线，则必有（　　）

A．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　B．$\vec{a}//\vec{b}$　　C．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　D．$|\vec{a}|\ne|\vec{b}|$

5．设随机变量 ξ 服从标准正态分布 $N(0,1)$，已知 $\Phi(-1.96)=0.025$，则 $P(|\xi|<1.96)=$（　　）

A．0.025　　B．0.050　　C．0.950　　D．0.975

6．函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4, & x\le 1,\\ x^2-4x+3, & x>1\end{cases}$ 的图象和函数 $g(x)=\log_2 x$ 的图象的交点个数是（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

7．下列四个命题中，不正确的是（　　）

A．若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

B．函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 的不连续点是 $x=2$ 和 $x=-2$

C．若函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$

D．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

8．棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上，E，F 分别是棱 AA_1，DD_1 的中点，则直线 EF 被球 O 截得的线段长为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{2}$

9．设 F_1，F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，若在其右准线上存在 P，

使线段 PF_1 的中垂线过点 F_2，则椭圆离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　B. $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　C. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

10．设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$， S_1，S_2，$\cdots$，S_k 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,\ b_i\}$， $S_j=\{a_j,\ b_j\}$（$i\neq j$， i、$j\in\{1,2,3,\cdots,\ k\}$），都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\dfrac{b_j}{a_j}\right\}$（$\min\{x,\ y\}$ 表示两个数 x，y 中的较小者），则 k 的最大值是（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在横线上．

11．圆心为 $(1,1)$ 且与直线 $x+y=4$ 相切的圆的方程是________．

12．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a=1$，$b=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{3}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则 $B=$________．

13．函数 $f(x)=12x-x^3$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最小值是________．

14．设集合 $A=\{(x,\ y)\,|\,y\geq\dfrac{1}{2}|x-2|\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,y\leq-|x|+b\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，

（1）b 的取值范围是________；

（2）若 $(x,\ y)\in A\cap B$，且 $x+2y$ 的最大值为 9，则 b 的值是________．

15．将杨辉三角中的奇数换成 1，偶数换成 0，得到如图 1 所示的 0-1 三角数表．从上往下数，第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行，第 2 次全行的数都为 1 的是第 3 行，…，第 n 次全行的数都为 1 的是第________行；第 61 行中 1 的个数是________．

第 1 行　　　　　1　　1
第 2 行　　　　1　　0　　1
第 3 行　　　1　　1　　1　　1
第 4 行　　1　　0　　0　　0　　1
第 5 行　1　　1　　0　　0　　1　　1
……　　……………………………………

图 1

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$，$g(x)=1+\dfrac{1}{2}\sin 2x$．

（I）设 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，求 $g(x_0)$ 的值．

（II）求函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的单调递增区间．

17．（本小题满分 12 分）

某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训，以提高下岗人员的再就业能力，每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训，已知参加过财会培训的有 60%，参加过计算机培训的有 75%，假设每个人对培训项目的选择是相互独立的，且各人的选择相互之间没有影响．

（I）任选 1 名下岗人员，求该人参加过培训的概率；

（II）任选 3 名下岗人员，记 ξ 为 3 人中参加过培训的人数，求 ξ 的分布列和期望．

18．（本小题满分 12 分）

如图 2，E，F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB，CD 的中点，G 是 EF 上的一点，将 $\triangle GAB$，

$\triangle GCD$ 分别沿 AB，CD 翻折成 $\triangle G_1AB$，$\triangle G_2CD$，并连结 G_1G_2，使得平面 $G_1AB\perp$ 平面 $ABCD$，$G_1G_2 // AD$，且 $G_1G_2 < AD$．连结 BG_2，如图 3．

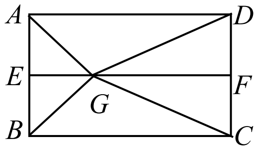


图 2

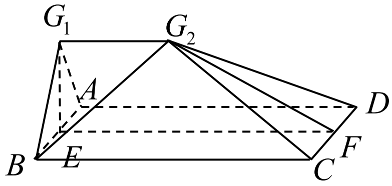


图 3

（I）证明：平面 $G_1AB\perp$ 平面 G_1ADG_2；

（II）当 $AB=12$，$BC=25$，$EG=8$ 时，求直线 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角．

19．（本小题满分 12 分）

如图 4，某地为了开发旅游资源，欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路，点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 θ（$0^\circ<\theta<90^\circ$），且 $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$，点 P 到平面 α 的距离 $PH=0.4$（km）．沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用．从点 O 到山脚修路的造价为 a 万元/km，原有公路改建费用为 $\dfrac{a}{2}$ 万元/km．当山坡上公路长度为 l km（$1\le l\le 2$）时，其造价为 $(l^2+1)a$ 万元．已知 $OA\perp AB$，$PB\perp AB$，$AB=1.5(\text{km})$，$OA=\sqrt{3}(\text{km})$．

（I）在 AB 上求一点 D，使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小；

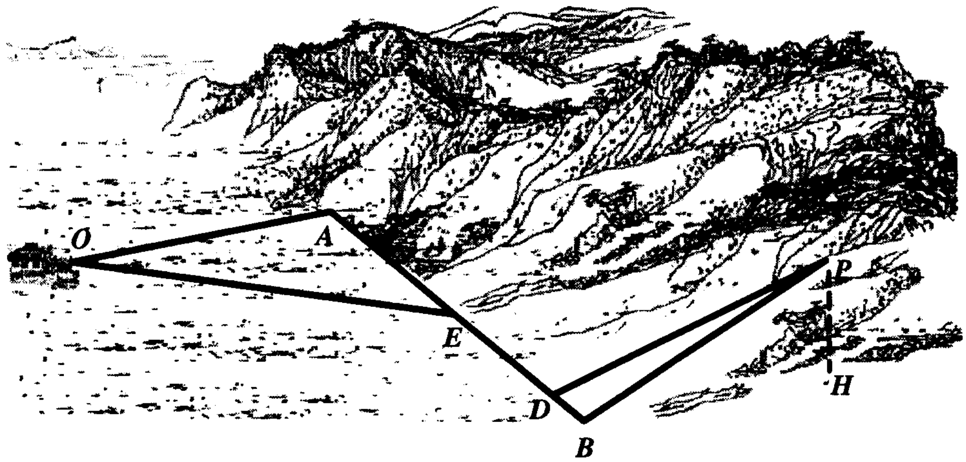


图 4

（II） 对于（I）中得到的点 D，在 DA 上求一点 E，使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小．

（III）在 AB 上是否存在两个不同的点 D'，E'，使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于（II）中得到的最小总造价，证明你的结论．

20．（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A，B 两点．

（I）若动点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$（其中 O 为坐标原点），求点 M 的轨迹方程；

（II）在 x 轴上是否存在定点 C，使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由．

21．（本小题满分 13 分）

已知 $A_n(a_n, b_n)$（$n\in\mathbf{N}^*$）是曲线 $y=e^x$ 上的点，$a_1=a$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且满足 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$，$a_n\neq 0$，$n=2,3,4,\cdots$.

（I）证明：数列 $\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}$（$n\le 2$）是常数数列；

（II）确定 a 的取值集合 M，使 $a\in M$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列；

（III）证明：当 $a\in M$ 时，弦 A_nA_{n+1}（$n\in\mathbf{N}^*$）的斜率随 n 单调递增.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．C　2．D　3．B　4．A　5．C　6．B　7．C　8．D　9．D　10．B

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在横线上．

11．$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

12．$\dfrac{5\pi}{6}$

13．-16

14．（1）$[1,+\infty)$（2）$\dfrac{9}{2}$

15．2^n-1，32

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．解：（I）由题设知 $f(x)=\dfrac{1}{2}[1+\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})]$.

因为 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，所以 $2x_0+\dfrac{\pi}{6}=k\pi$，

即 $2x_0=k\pi-\dfrac{\pi}{6}$（$k\in\mathbf{Z}$）.

所以 $g(x_0)=1+\dfrac{1}{2}\sin 2x_0=1+\dfrac{1}{2}\sin(k\pi-\dfrac{\pi}{6})$.

当 k 为偶数时，$g(x_0)=1+\dfrac{1}{2}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，

当 k 为奇数时，$g(x_0)=1+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$.

（II）$h(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{1}{2}\left[1+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]+1+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin 2x\right]+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{3}{2}$.

当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$ （$k\in\mathbf{Z}$）时，

函数 $h(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}$ 是增函数，

故函数 $h(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12}，k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

17．解：任选 1 名下岗人员，记“该人参加过财会培训”为事件 A，“该人参加过计算机培训”为事件 B，由题设知，事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.75$.

（I）解法一：任选 1 名下岗人员，该人没有参加过培训的概率是

$P_1=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.4\times 0.25=0.1$

所以该人参加过培训的概率是 $P_2=1-P_1=1-0.1=0.9$.

解法二：任选 1 名下岗人员，该人只参加过一项培训的概率是

$P_3=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)=0.6\times 0.25+0.4\times 0.75=0.45$

该人参加过两项培训的概率是 $P_4=P(A\cdot B)=0.6\times 0.75=0.45$.

所以该人参加过培训的概率是 $P_5=P_3+P_4=0.45+0.45=0.9$.

（II）因为每个人的选择是相互独立的，所以 3 人中参加过培训的人数 ξ 服从二项分布 $B(3,0.9)$，$P(\xi=k)=C_3^k\times 0.9^k\times 0.1^{3-k}$，$k=0,1,2,3$，即 ξ 的分布列是

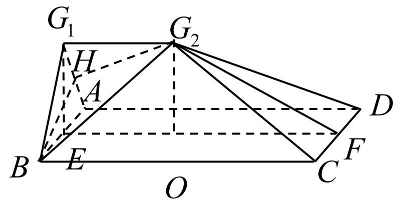
ξ	0	1	2	3
P	0.001	0.027	0. 243	0.729

ξ 的期望是 $E\xi=1\times 0.027+2\times 0.243+3\times 0.729=2.7$.

（或 ξ 的期望是 $E\xi=3\times 0.9=2.7$）

18．解：解法一：（Ⅰ）因为平面 $G_1AB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $G_1AB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$AD\perp AB$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AD\perp$ 平面 G_1AB，又 $AD\subset$ 平面 G_1ADG_2，所以平面 $G_1AB\perp$ 平面 G_1ADG_2.

（II）过点 B 作 $BH\perp AG_1$ 于点 H，连结 G_2H.



由（I）的结论可知，$BH\perp$ 平面 G_1ADG_2，

所以 $\angle BG_2H$ 是 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角.

因为平面 $G_1AB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $G_1AB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$G_1E\perp AB$，

$G_1E\subset$ 平面 G_1AB，所以 $G_1E\perp$ 平面 $ABCD$，故 $G_1E\perp EF$.

因为 $G_1G_2<AD$，$AD=EF$，所以可在 EF 上取一点 O，使 $EO=G_1G_2$，又因为 $G_1G_2\parallel AD\parallel EO$，所以四边形 G_1EOG_2 是矩形.

由题设 $AB=12$，$BC=25$，$EG=8$，则 $GF=17$. 所以 $G_2O=G_1E=8$，$G_2F=17$，$OF=\sqrt{17^2-8^2}=15$，$G_1G_2=EO=10$.

因为 $AD\perp$ 平面 G_1AB，$G_1G_2\parallel AD$，所以 $G_1G_2\perp$ 平面 G_1AB，从而 $G_1G_2\perp G_1B$.

故 $BG_2^2=BE^2+EG_1^2+G_1G_2{}^2=6^2+8^2+10^2=200$，$BG_2=10\sqrt{2}$.

又 $AG_1=\sqrt{6^2+8^2}=10$，由 $BH\bullet AG_1=G_1E\bullet AB$ 得 $BH=\frac{8\times 12}{10}=\frac{48}{5}$.

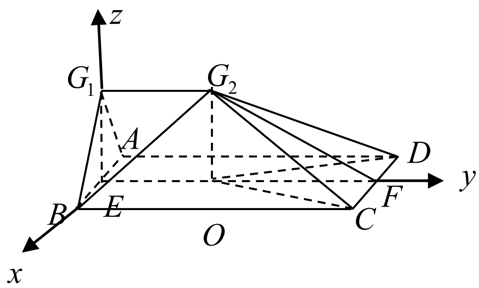
故$\sin\angle BG_2H=\dfrac{BH}{BG_2}=\dfrac{48}{5}\times\dfrac{1}{10\sqrt{2}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{25}$.

即直线BG_2与平面G_1ADG_2所成的角是$\arcsin\dfrac{12\sqrt{2}}{25}$.

解法二：（Ⅰ）因为平面$G_1AB\perp$平面$ABCD$，平面$G_1AB\cap$平面$ABCD=AB$，$G_1E\perp AB$，

$G_1E\subset$平面G_1AB，所以$G_1E\perp$平面$ABCD$，从而$G_1E\perp AD$．又$AB\perp AD$，所以$AD\perp$平面G_1AB．因为$AD\subset$平面G_1ADG_2，所以平面$G_1AB\perp$平面G_1ADG_2．

（II）由（I）可知，$G_1E\perp$平面$ABCD$．故可以E为原点，分别以直线EB，EF，EG_1为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系（如图），



由题设$AB=12$，$BC=25$，$EG=8$，则$EB=6$，$EF=25$，$EG_1=8$，相关各点的坐标分别是$A(-6,0,0)$，

$D(-6,25,0)$，$G_1(0,0,8)$，$B(6,0,0)$．

所以$\overrightarrow{AD}=(0,25,0)$，$\overrightarrow{AG_1}=(6,0,8)$．

设$\vec{n}=(x,y,z)$是平面G_1ADG_2的一个法向量，

由$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AD}=0,\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AG_1}=0.\end{cases}$得$\begin{cases}25y=0,\\ 6x+8z=0\end{cases}$故可取$\vec{n}=(4,0,-3)$．

过点G_2作$G_2O\perp$平面$ABCD$于点O，因为$G_2C=G_2D$，所以$OC=OD$，于是点O在y轴上．

因为$G_1G_2\parallel AD$，所以$G_1G_2\parallel EF$，$G_2O=G_1E=8$．

设$G_2(0,m,8)$（$0<m<25$），由$17^2=8^2+(25-m)^2$，解得$m=10$，

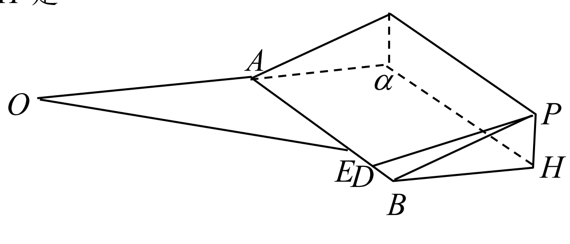
所以$\overrightarrow{BG_2}=(0,10,8)-(6,0,0)=(-6,10,8)$．

设BG_2和平面G_1ADG_2所成的角是θ，则

$$\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{BG_2}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BG_2}\right|\bullet\left|\vec{n}\right|}=\frac{|-24-24|}{\sqrt{6^2+10^2+8^2}\bullet\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12\sqrt{2}}{25}.$$

故直线BG_2与平面G_1ADG_2所成的角是$\arcsin\dfrac{12\sqrt{2}}{25}$．

19．解：（I）如图，$PH\perp\alpha$，$HB\subset\alpha$，$PB\perp AB$，由三垂线定理逆定理知，$AB\perp HB$，所以$\angle PBH$是山坡与α所成二面角的平面角，则$\angle PBH=\theta$，



$PB=\dfrac{PH}{\sin\theta}=1$．

设$BD=x(\text{km})$，$0\le x\le 1.5$．则

$PD=\sqrt{x^2+PB^2}=\sqrt{x^2+1}\in[1,2]$．

记总造价为$f_1(x)$万元，

据题设有$f_1(x)=(PD^2+1+\dfrac{1}{2}AD+AO)a=(x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{4}+\sqrt{3})a$

$=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2a+\left(\dfrac{43}{16}+\sqrt{3}\right)a$

当 $x=\dfrac{1}{4}$，即 $BD=\dfrac{1}{4}(\mathrm{km})$ 时，总造价 $f_1(x)$ 最小.

（II）设 $AE=y(\mathrm{km})$，$0\le y\le\dfrac{5}{4}$，总造价为 $f_2(y)$ 万元，根据题设有

$$f_2(y)=\left[PD^2+1+\sqrt{y^2+3}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-y\right)\right]a=\left(\sqrt{y^2+3}-\frac{y}{2}\right)a+\frac{43}{16}a.$$

则 $f_2{}'(y)=\left(\dfrac{y}{\sqrt{y^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right)a$，由 $f_2{}'(y)=0$，得 $y=1$.

当 $y\in(0,1)$ 时，$f_2{}'(y)<0$，$f_2(y)$ 在 $(0,1)$ 内是减函数；

当 $y\in\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$ 时，$f_2{}'(y)>0$，$f_2(y)$ 在 $\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$ 内是增函数.

故当 $y=1$，即 $AE=1$（km）时总造价 $f_2(y)$ 最小，且最小总造价为 $\dfrac{67}{16}a$ 万元.

（III）解法一：不存在这样的点 D'，E'.

事实上，在 AB 上任取不同的两点 D'，E'. 为使总造价最小，E 显然不能位于 D' 与 B 之间. 故可设 E' 位于 D' 与 A 之间，且 $BD'=x_1(\mathrm{km})$，$AE'=y_1(\mathrm{km})$，$0\le x_1+y_2\le\dfrac{3}{2}$，总造价为 S 万元，则 $S=\left(x_1^2-\dfrac{x_1}{2}+\sqrt{y_1^2+3}-\dfrac{y_1}{2}+\dfrac{11}{4}\right)a$. 类似于（I）、（II）讨论知，$x_1^2-\dfrac{x_1}{2}\ge-\dfrac{1}{16}$，$\sqrt{y_1^2+3}-\dfrac{y_1}{2}\ge\dfrac{3}{2}$，当且仅当 $x_1=\dfrac{1}{4}$，$y_1=1$ 同时成立时，上述两个不等式等号同时成立，此时 $BD'=\dfrac{1}{4}(\mathrm{km})$，$AE=1(\mathrm{km})$，$S$ 取得最小值 $\dfrac{67}{16}a$，点 D'，E' 分别与点 D，E 重合，所以不存在这样的点 D'，E'，使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于（II）中得到的最小总造价.

解法二：同解法一得

$$S=\left(x_1^2-\frac{x_1}{2}+\sqrt{y_1^2+3}-\frac{y_1}{2}+\frac{11}{4}\right)a$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2a+\frac{1}{4}\left[3\left(\sqrt{y_1^2+3}-y_1\right)+\left(\sqrt{y_1^2+3}+y_1\right)\right]a+\frac{43}{16}a$$

$$\ge\frac{1}{4}\times2\sqrt{3(\sqrt{y_1^2+3}-y_1)(\sqrt{y_1^2+3}+y_1)}\times a+\frac{43}{16}a$$

$$=\frac{67}{16}a.$$

当且仅当 $x_1=\dfrac{1}{4}$ 且 $3(\sqrt{y_1^2+3}-y_1)(\sqrt{y_1^2+3}+y_1)$，即 $x_1=\dfrac{1}{4}$，$y_1=1$ 同时成立时，S 取得最小值 $\dfrac{67}{16}a$，以上同解法一.

20．解：由条件知 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

解法一：（I）设 $M(x,y)$，则　则 $\overrightarrow{F_1M}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{F_1A}=(x_1+2,y_1)$，

$\overrightarrow{F_1B}=(x_2+2,\ y_2),\overrightarrow{F_1O}=(2,0)$，由 $\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$ 得

$\begin{cases}x+2=x_1+x_2+6,\\ y=y_1+y_2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2=x-4,\\ y_1+y_2=y\end{cases}$

于是 AB 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x-4}{2},\dfrac{y}{2}\right)$.

当 AB 不与 x 轴垂直时，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\frac{y}{2}}{\frac{x-4}{2}-2}=\dfrac{y}{x-8}$，即 $y_1-y_2=\dfrac{y}{x-8}(x_1-x_2)$.

又因为 A，B 两点在双曲线上，所以 $x_1^2-y_1^2=2$ ，$x_2^2-y_2^2=2$ ，两式相减得

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$ ，即 $(x_1-x_2)(x-4)=(y_1-y_2)y$.

将 $y_1-y_2=\dfrac{y}{x-8}(x_1-x_2)$ 代入上式，化简得 $(x-6)^2-y^2=4$.

当 AB 与 x 轴垂直时，$x_1=x_2=2$ ，求得 $M(8,0)$ ，也满足上述方程.

所以点 M 的轨迹方程是 $(x-6)^2-y^2=4$.

（II）假设在 x 轴上存在定点 $C(m,0)$ ，使 $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}$ 为常数.

当 AB 不与 x 轴垂直时，设直线 AB 的方程是 $y=k(x-2)(k\neq\pm1)$.

代入 $x^2-y^2=2$ 有 $(1-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+2)=0$.

则 x_1，x_2 是上述方程的两个实根，所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-1}$ ，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+2}{k^2-1}$ ，

于是 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1-2)(x_2-2)$

$=(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+m)(x_1+x_2)+4k^2+m^2$

$=\dfrac{(k^2+1)(4k^2+2)}{k^2-1}-\dfrac{4k^2(2k^2+m)}{k^2-1}+4k^2+m^2$

$=\dfrac{2(1-2m)k^2+2}{k^2-1}+m^2=2(1-2m)+\dfrac{4-4m}{k^2-1}+m^2$.

因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 是与 k 无关的常数，所以 $4-4m=0$ ，即 $m=1$ ，此时 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$.

当 AB 与 x 轴垂直时，点 A，B 的坐标可分别设为 $(2,\sqrt{2})$ ，$(2,-\sqrt{2})$ ，

此时 $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{2})\cdot(1,-\sqrt{2})=-1$.

故在 x 轴上存在定点 $C(1,0)$ ，使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数.

解法二：（I）同解法一的（I）有 $\begin{cases}x_1+x_2=x-4,\\ y_1+y_2=y\end{cases}$

当 AB 不与 x 轴垂直时，设直线 AB 的方程是 $y=k(x-2)(k\neq\pm1)$.

代入 $x^2-y^2=2$ 有 $(1-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+2)=0$.

则 x_1，x_2 是上述方程的两个实根，所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-1}$.

$y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=k\left(\dfrac{4k^2}{k-1}-4\right)=\dfrac{4k}{k^2-1}$.

由①②③得 $x-4=\dfrac{4k^2}{k^2-1}$. ……………………………………………④

$y=\dfrac{4k}{k^2-1}$． ……………………………………………………………⑤

当$k\neq 0$时，$y\neq 0$，由④⑤得，$\dfrac{x-4}{y}=k$，将其代入⑤有

$y=\dfrac{4\times\dfrac{x-4}{y}}{\dfrac{(x-4)^2}{y^2}-1}=\dfrac{4y(x-4)}{(x-4)^2-y^2}$．整理得$(x-6)^2-y^2=4$．

当$k=0$时，点M的坐标为$(4,0)$，满足上述方程.

当AB与x轴垂直时，$x_1=x_2=2$，求得$M(8,0)$，也满足上述方程.

故点M的轨迹方程是$(x-6)^2-y^2=4$．

（II）假设在x轴上存在定点点$C(m,0)$，使$\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}$为常数，

当AB不与x轴垂直时，由（I）有$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2}-1$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+2}{k^2-1}$．

以上同解法一的（II）.

21．解：（I）当$n\geqslant 2$时，由已知得$S_n^2-S_{n-1}^2=3n^2a_n$．

因为$a_n=S_n-S_{n-1}\neq 0$，所以$S_n+S_{n-1}=3n^2$． ……………………①

于是$S_{n+1}+S_n=3(n+1)^2$． ……………………②

由②－①得$a_{n+1}+a_n=6n+3$． ……………………③

于是$a_{n+2}+a_{n+1}=6n+9$． ……………………④

由④－③得$a_{n+2}-a_n=6$， ……………………⑤

所以$\dfrac{b_{n+2}}{b_n}=\dfrac{e^{a_{n+2}}}{e^{a_n}}=e^{a_{n+2}-a_n}=e^6$，即数列$\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}(n\geqslant 2)$是常数数列.

（II）由①有$S_2+S_1=12$，所以$a_2=12-2a$．由③有$a_3+a_2=15$，$a_4+a_3=21$，所以$a_3=3+2a$，$a_4=18-2a$．

而 ⑤表明：数列$\{a_{2k}\}$和$\{a_{2k+1}\}$分别是以a_2，a_3为首项，6为公差的等差数列，

所以$a_{2k}=a_2+6(k-1)$，$a_{2k+1}=a_3+6(k-1)$，$a_{2k+2}=a_4+6(k-1)(k\in\mathbf{N}^*)$，

数列$\{a_n\}$是单调递增数列$\Leftrightarrow a_1<a_2$且$a_{2k}<a_{2k+1}<a_{2k+2}$对任意的$k\in\mathbf{N}^*$成立.

$\Leftrightarrow a_1<a_2$且$a_2+6(k-1)<a_3+6(k-1)<a_4+6(k-1)$

$\Leftrightarrow a_1<a_2<a_3<a_4\Leftrightarrow a<12-2a<3+2a<18-2a\Leftrightarrow\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{15}{4}$．

即所求a的取值集合是$M=\left\{a\left|\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{15}{4}\right.\right\}$.

（III）解法一：弦A_nA_{n+1}的斜率为$k_n=\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{e^{a_{n+1}}-e^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$

任取x_0，设函数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}$，则$f(x)=\dfrac{e^x(x-x_0)-(e^x-e^{x_0})}{(x-x_0)^2}$

记$g(x)=e^x(x-x_0)-(e^x-e^{x_0})$，则$g'(x)=e^x(x-x_0)+e^x-e^x=e^x(x-x_0)$，

当$x>x_0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(x_0,+\infty)$上为增函数，

当 $x < x_0$ 时，$g'(x) < 0$，$g(x)$ 在 $(-\infty，x_0)$ 上为减函数，

所以 $x \neq x_0$ 时，$g(x) > g(x_0) = 0$，从而 $f'`(x) > 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty，x_0)$ 和 $(x_0, +\infty)$ 上都是增函数.

由（II）知，$a \in M$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递增，

取 $x_0 = a_n$，因为 $a_n < a_{n+1} < a_{n+2}$，所以 $k_n = \dfrac{e^{a_{n+1}} - e^{a_n}}{a_{n+1} - a_n} < \dfrac{e^{a_{n+2}} - e^{a_n}}{a_{n+2} - a_n}$.

取 $x_0 = a_{n+2}$，因为 $a_n < a_{n+1} < a_{n+2}$，所以 $k_{n+1} = \dfrac{e^{a_{n+1}} - e^{a_{n+2}}}{a_{n+1} - a_{n+2}} > \dfrac{e^{a_n} - e^{a_{n+2}}}{a_n - a_{n+2}}$.

所以 $k_n < k_{n+1}$，即弦 $A_nA_{n+1}(n \in \mathbf{N^*})$ 的斜率随 n 单调递增.

解法二：设函数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{a_{n+1}}}{x - a_{n+1}}$，同解法一得，$f(x)$ 在 $(-\infty，a_{n+1})$ 和 $(a_{n+1}, +\infty)$ 上都是增函数，

所以 $k_n = \dfrac{e^{a_n} - e^{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} < \lim\limits_{n \to a_{n+1}^-} \dfrac{e^x - e^{a_{n+1}}}{x - a_{n+1}} = e^{a_{n+1}}$，$k_{n+1} = \dfrac{e^{a_{n+2}} - e^{a_{n+1}}}{a_{n+2} - a_{n+1}} > \lim\limits_{n \to a_{n+1}^+} \dfrac{e^x - e^{a_{n+1}}}{x - a_{n+1}} = e^{a_{n+1}}$.

故 $k_n < k_{n+1}$，即弦 $A_nA_{n+1}(n \in \mathbf{N^*})$ 的斜率随 n 单调递增.