绝密★启用前

2008年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

得 分	评 卷 人

一. 填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．不等式$\left|x-1\right|<1$的解集是____________.

2．若集合$A=\left\{x\left|x\leq 2\right.\right\}$、$B=\left\{x\left|x\geq a\right.\right\}$满足$A\cap B=\left\{2\right\}$，则实数$a=$______.

3．若复数z满足$z=\mathrm{i}(2-z)$（i是虚数单位），则$z=$__________.

4．若函数$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)=\log_2 x$，则$f(x)=$___________.

5．若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$_____.

6．若直线$ax-y+1=0$经过抛物线$y^2=4x$的焦点，则实数$a=$_______.

7．若z是实系数方程$x^2+2x+p=0$的一个虚根，且$\left|z\right|=2$，则$p=$____.

8．在平面直角坐标系中，从五个点：$A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(1,1)$、$D(0,2)$、$E(2,2)$中任取三个，这三点能构成三角形的概率是__________（结果用分数表示）.

9．若函数$f(x)=(x+a)(bx+2a)$（常数a、$b\in\mathrm{R}$）是偶函数，且它的值域为$\left(-\infty,4\right]$，则该函数的解析式$f(x)=$_____________.

10．已知总体的各个体的值由小到大依次为2，3，3，7，a，b，12，13.7，18.3，20，且总体的中位数为10.5. 若要使该总体的方差最小，则a、b的取值分别是_____

________.

11．在平面直角坐标系中，点 A、B、C 的坐标分别为（0，1）、（4，2）、（2，6）. 如果 $P(x,y)$ 是△ ABC 围成的区域（含边界）上的点，那么当 $w=xy$ 取到最大值时，点 P 的坐标是________.

得 分	评 卷 人

二. 选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

12. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的点. 若 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 等于

[答] (　　)

(A) 4.　　(B) 5.　　(C) 8.　　(D) 10.

13. 给定空间中的直线 l 及平面 α. 条件“直线 l 与平面 α 内两条相交直线都垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的　　[答] (　　)

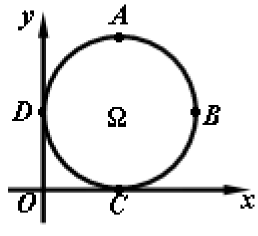
(A) 充分非必要条件.　　(B) 必要非充分条件.

(C) 充要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为 $a-\dfrac{3}{2}$ 的无穷等比数列，且 $\{a_n\}$ 各项的和为 a，则 a 的值是　　[答] (　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{5}{4}$.

15. 如图，在平面直角坐标系中，Ω 是一个与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴分别相切于点 C、D 的定圆所围成的区域（含边界），A、B、C、D 是该圆的四等分点. 若点 $P(x,y)$、点 $P'(x',y')$ 满足 $x\le x'$ 且 $y\ge y'$，则称 P 优于 P'. 如果 Ω 中的点 Q 满足：不存在 Ω 中的其它点优于 Q，那么所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧　　[答] (　　)



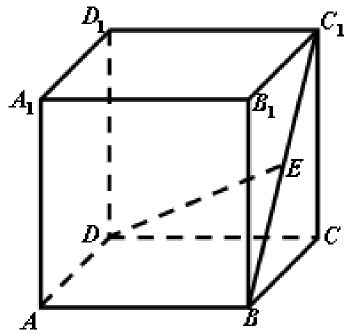
(A) $\overset{\frown}{AB}$.　　(B) $\overset{\frown}{BC}$.　　(C) $\overset{\frown}{CD}$.　　(D) $\overset{\frown}{DA}$.

三. 解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

得 分	评 卷 人

16.（本题满分12分）

如图，在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是BC_1的中点. 求直线DE与平面$ABCD$所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.



[解]

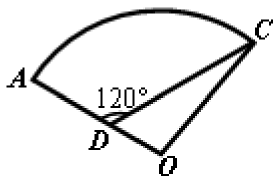
得 分	评 卷 人

17.（本题满分13分）

如图，某住宅小区的平面图呈扇形 AOC .　　　小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处. 小区里有两条笔直的小路 AD 、 DC ，且拐弯处的转角为120°.

已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了10分钟，从 D 沿 DA 走到 A 用了6分钟.

若此人步行的速度为每分钟50米，求该扇形的半径 OA 的长（精确到1米）.



[解]

得 分	评 卷 人

18.（本题满分15分）本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分10分.

已知函数 $f(x)=\sin 2x$，$g(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，直线 $x=t$ $(t\in \mathrm{R})$ 与函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的图像分别交于 M、N 两点.

（1）当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，求 $|MN|$ 的值；

（2）求 $|MN|$ 在 $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时的最大值.

[解]（1）

（2）

得 分	评 卷 人

19.（本题满分16分）本题共有2个小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分.

已知函数 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^{|x|}}$.

（1）若 $f(x)=2$，求 x 的值；

（2）若 $2^t f(2t)+mf(t)\geq 0$ 对于 $t\in[1,\ 2]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

[解]（1）

（2）

得 分	评 卷 人

20.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分7分.

已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

（1）求双曲线C的渐近线方程；

（2）已知点M的坐标为$(0,\ 1)$. 设P是双曲线C上的点，Q是点P关于原点的对称点.

记$\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$. 求$\lambda$的取值范围；

（3）已知点D、E、M的坐标分别为$(-2,\ -1)$、$(2,\ -1)$、$(0,\ 1)$，P为双曲线C上在第一象限内的点. 记l为经过原点与点P的直线，s为$\triangle DEM$截直线l所得线段的长. 试将s表示为直线l的斜率k的函数.

[解]（1）

（2）

（3）

得 分	评 卷 人

21.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分．

已知数列$\left\{a_n\right\}$：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=r$，$a_{n+3}=a_n+2$（n是正整数），与数列$\left\{b_n\right\}$：$b_1=1$，$b_2=0$，$b_3=-1$，$b_4=0$，$b_{n+4}=b_n$（n是正整数）. 记$T_n=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+\cdots+b_na_n$.

（1）若$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=64$，求$r$的值；

（2）求证：当n是正整数时，$T_{12n}=-4n$；

（3）已知$r>0$，且存在正整数m，使得在T_{12m+1}，T_{12m+2}，$\cdots$，T_{12m+12}中有4项为100. 求r的值，并指出哪4项为100.

[解] (1)

[证明]（2）

[解]（3）

2008年全国普通高等学校招生统一考试

上海数学试卷(文史类)答案要点及评分标准

说明

1.本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2.评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

解答

一、（第1题至第11题）

1. $(0,2)$.　　2. 2.　　3. $1+\mathrm{i}$.　　4. $2^x\ (x\in\mathrm{R})$.

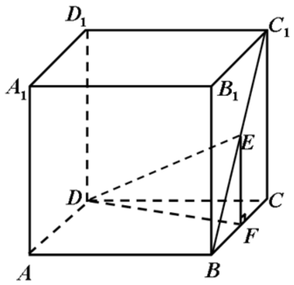
5. $\sqrt{7}$.　　6. -1.　　7. 4.　　8. $\dfrac{4}{5}$.

9. $-2x^2+4$.　　10. $a=10.5,\quad b=10.5$.　　11. $\left(\dfrac{5}{2},5\right)$.

二、（第12题至第15题）

题　号	12	13	14	15
代　号	D	C	B	D

三、（第16题至第21题）



16．[解] 过 E 作 $EF\perp BC$，交 BC 于 F，连接 DF.

$\because EF\perp$ 平面$ABCD$，

$\therefore\ \angle EDF$ 是直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角. …… 4分

由题意，得 $EF=\dfrac{1}{2}CC_1=1$.

$\because\ CF=\dfrac{1}{2}CB=1$, $\therefore\ DF=\sqrt{5}$.　　…… 8分

$\because\ EF\perp DF$，$\therefore\ \tan\angle EDF=\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.　　…… 10分

故直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小是 $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.　　…… 12分

17. [解法一] 设该扇形的半径为 r 米. 由题意，得

$CD=500$（米），$DA=300$（米），$\angle CDO=60°$. …… 4分

在$\triangle CDO$中，$CD^2+OD^2-2\cdot CD\cdot OD\cdot\cos 60°=OC^2$， …… 6分

即$500^2+(r-300)^2-2\times500\times(r-300)\times\frac{1}{2}=r^2$， …… 9分

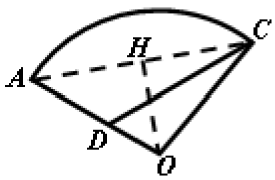
解得$r=\frac{4900}{11}\approx445$（米）.

答：该扇形的半径OA的长约为445米. …… 13分

[解法二] 连接AC，作$OH\perp AC$，交AC于H. …… 2分

由题意，得$CD=500$（米），$AD=300$（米），$\angle CDA=120°$. …… 4分

在$\triangle ACD$中，$AC^2=CD^2+AD^2-2\cdot CD\cdot AD\cdot\cos120°$



$=500^2+300^2+2\times500\times300\times\frac{1}{2}=700^2$，

$\therefore AC=700$（米）， …… 6分

$\cos\angle CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2\cdot AC\cdot AD}=\frac{11}{14}$. …… 9分

在直角$\triangle HAO$中，$AH=350$（米），$\cos\angle HAO=\frac{11}{14}$，

$\therefore\ OA=\frac{AH}{\cos\angle HAO}=\frac{4900}{11}\approx445$（米）.

答：该扇形的半径OA的长约为445米. …… 13分

18. [解]（1）$|MN|=\left|\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right|$ …… 2分

$=\left|1-\cos\frac{2\pi}{3}\right|=\frac{3}{2}$. …… 5分

（2）$|MN|=\left|\sin 2t-\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\right|$

$=\left|\frac{3}{2}\sin 2t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\right|$ …… 8分

$=\sqrt{3}\left|\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\right|$. …… 11分

$\because\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$2t-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \pi-\frac{\pi}{6}\right]$， …… 13分

$\therefore\ |MN|$的最大值为$\sqrt{3}$. …… 15分

19. [解]（1）当$x<0$时，$f(x)=0$；当$x\ge 0$时，$f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^x}$. …… 2分

由条件可知 $2^x-\dfrac{1}{2^x}=2$，即 $2^{2x}-2\cdot 2^x-1=0$，

解得 $2^x=1\pm\sqrt{2}$. …… 6分

$\because$ $2^x>0$，$\therefore$ $x=\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$. …… 8分

（2）当$t\in[1,2]$时，$2^t\left(2^{2t}-\dfrac{1}{2^{2t}}\right)+m\left(2^t-\dfrac{1}{2^t}\right)\ge 0$， …… 10分

即 $m\left(2^{2t}-1\right)\ge-\left(2^{4t}-1\right)$.

$\because$ $2^{2t}-1>0$，$\therefore$ $m\ge-\left(2^{2t}+1\right)$. …… 13分

$\because$ $t\in[1,\ 2]$，$\therefore$ $-\left(1+2^{2t}\right)\in[-17,-5]$，

故m的取值范围是$[-5,\ +\infty)$. …… 16分

20. [解]（1）所求渐近线方程为$y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=0,\quad y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=0$. …… 3分

（2）设P的坐标为$\left(x_0,\ y_0\right)$，则Q的坐标为$\left(-x_0,\ -y_0\right)$. …… 4分

$\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left(x_0,\ y_0-1\right)\cdot\left(-x_0,\ -y_0-1\right)$

$=-x_0^2-y_0^2+1=-\dfrac{3}{2}x_0^2+2$. …… 7分

$\because$ $\left|x_0\right|\ge\sqrt{2}$，

$\therefore$ λ的取值范围是$\left(-\infty,\ -1\right]$. …… 9分

（3）若P为双曲线C上第一象限内的点，

则直线l的斜率$k\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. …… 11分

由计算可得，当$k\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$时，$s(k)=\dfrac{2}{1-k^2}\sqrt{1+k^2}$；

当$k\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$s(k)=\dfrac{2k+1}{k+k^2}\sqrt{1+k^2}$. …… 15分

$\therefore$ s表示为直线l的斜率k的函数是

$$s(k)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-k^2}\sqrt{1+k^2}, & 0<k\le\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2k+1}{k+k^2}\sqrt{1+k^2}, & \dfrac{1}{2}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$ …… 16分

21. [解]（1） $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}$

$=1+2+r+3+4+(r+2)+5+6+(r+4)+7+8+(r+6)$

$=48+4r$. …… 2分

$\because$ $48+4r=64$，$\therefore r=4$. …… 4分

[证明]（2）用数学归纳法证明：当 $n\in \mathrm{Z}^+$ 时， $T_{12n}=-4n$.

① 当 $n=1$ 时，$T_{12}=a_1-a_3+a_5-a_7+a_9-a_{11}=-4$，等式成立. …… 6分

② 假设 $n=k$ 时等式成立，即 $T_{12k}=-4k$，

那么当 $n=k+1$ 时，

$T_{12(k+1)}=T_{12k}+a_{12k+1}-a_{12k+3}+a_{12k+5}-a_{12k+7}+a_{12k+9}-a_{12k+11}$ …… 8分

$=-4k+(8k+1)-(8k+r)+(8k+4)-(8k+5)+(8k+r+4)-(8k+8)$

$=-4k-4=-4(k+1)$，等式也成立.

根据①和②可以断定：当 $n\in \mathrm{Z}^+$ 时，$T_{12n}=-4n$. …… 10分

[解]（3）$T_{12m}=-4m$（$m\ge1$）.

当 $n=12m+1,\ \ 12m+2$ 时，$T_n=4m+1$；

当 $n=12m+3,\ \ 12m+4$ 时，$T_n=-4m+1-r$；

当 $n=12m+5,\ \ 12m+6$ 时，$T_n=4m+5-r$；

当 $n=12m+7,\ \ 12m+8$ 时，$T_n=-4m-r$；

当 $n=12m+9,\ \ 12m+10$ 时，$T_n=4m+4$；

当 $n=12m+11,\ \ 12m+12$ 时，$T_n=-4m-4$. …… 13分

$\because$ $4m+1$ 是奇数，$-4m+1-r$，$-4m-r$，$-4m-4$ 均为负数，

$\therefore$ 这些项均不可能取到100. …… 15分

$\therefore$ $4m+5-r=4m+4=100$，解得 $m=24$， $r=1$，

此时T_{293}，T_{294}，T_{297}，T_{298}为100. …… 18分

1．不等式$\left|x-1\right|<1$的解集是__________.

【答案】$(0,2)$

【解析】由$-1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$.

2．若集合$A=\left\{x\mid x\leqslant 2\right\}$，$B=\left\{x\mid x\geqslant a\right\}$满足$A\cap B=\{2\}$，则实数$a$=_____.

【答案】2

【解析】由$A\cap B=\{2\}\Rightarrow A,B$只有一个公共元素$2\Rightarrow a=2$.

3．若复数z满足$z=i(2-z)$（i是虚数单位），则z=_____.

【答案】$1+i$

【解析】由$z=i(2-z)\Rightarrow z=\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+i$.

4．若函数$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)=\log_2 x$，则$f(x)=$_____.

【答案】$2^x\left(x\in R\right)$

【解析】令$\because y=\log_2 x(x>0)$, 则$y\in R$且$x=2^y$, $\therefore f(x)=2^x\left(x\in R\right)$.

5．若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=2$且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$________.

【答案】$\sqrt{7}$

【解析】$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=7\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$.

6．若直线$ax-y+1=0$经过抛物线$y^2=4x$的焦点，则实数$a=$__________.

【答案】-1

【解析】直线$ax-y+1=0$经过抛物线$y^2=4x$的焦点$F(1,0)$, 则$a+1=0\therefore a=-1$.

7．若z是实系数方程$x^2+2x+p=0$的一个虚根，且$\left|z\right|=2$，则$p=$_____.

【答案】4

【解析】设$z=a+bi$,则方程的另一个根为$z'=a-bi$,且$\left|z\right|=2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2$，

由韦达定理直线 $z+z'=2a=-2,\therefore a=-1,\therefore b^2=3,b=\pm\sqrt{3},$

所以 $p=z\cdot z'=(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)=4.$

8．在平面直角坐标系中，从五个点：$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(1,1)$，$D(0,2)$，$E(2,2)$ 中任取三个，这三点能构成三角形的概率是________（结果用分数表示）．

【答案】$\dfrac{4}{5}$

【解析】由已知得 A、C、E三点共线, B、C、D 三点共线,

所以五点中任选三点能构成三角形的概率为 $\dfrac{C_3^3-2}{C_5^3}=\dfrac{4}{5}.$

9．若函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)$（常数 a，$b\in\mathbf{R}$）是偶函数，且它的值域为 $\left(-\infty,4\right]$，则该函数的解析式 $f(x)=$______.

【答案】$-2x^2+4$

【解析】$f(x)=(x+a)(bx+2a)=bx^2+(2a+ab)x+2a^2$ 是偶函数，则其图象关于

y轴对称, $\therefore 2a+ab=0\Rightarrow b=-2,\therefore f(x)=-2x^2+2a^2$, 且值域为 $\left(-\infty,4\right]$，

$\therefore 2a^2=4,\therefore f(x)=-2x^2+4.$

10．已知总体的各个体的值由小到大依次为2，3，3，7，a，b，12，13.7，18.3，20，且总体的中位数为10.5．若要使该总体的方差最小，则a、b的取值分别_________.

【答案】$a=10.5,b=10.5$

【解析】中位数为10.5$\Rightarrow a+b=21$, 根据均值不等式知，只需 $a=b=10.5$ 时，

总体方差最小.

11．在平面直角坐标系中，点 A，B，C 的坐标分别为 $(0,1),(4,2),(2,6)$．如果 $P(x,y)$ 是 $\triangle ABC$ 围成的区域（含边界）上的点，那么当 $\omega=xy$ 取到最大值时，点 P 的坐标是_________.

【答案】$\left(\dfrac{5}{2},5\right)$

【解析】作图知 $\omega=xy$ 取到最大值时，点 P 在线段BC上, $BC:y=-2x+10,x\in[2,4]$,

$\therefore \omega = xy = x(-2x+10)$, 故当 $x=\dfrac{5}{2}, y=5$ 时, ω 取到最大值.

二、选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

12．设 p 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的点．若 F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，

则 $|PF_1|+|PF_2|$ 等于（　　）

A．4　　　B．5　　　C．8　　　D．10

【答案】**D**

【解析】 由椭圆的第一定义知 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$.

13．给定空间中的直线l及平面α．条件“直线l与平面α内两条相交直线都垂直”是“直线l与平面α垂直”的（　　　）

A．充分非必要条件　　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　　D．既非充分又非必要条件

【答案】**C**

【解析】“直线l与平面α内两条相交直线都垂直”$\Leftrightarrow$“直线l与平面α垂直”.

14．若数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为$a=\dfrac{3}{2}$的无穷等比数列，且$\{a_n\}$各项的和为a，

则a的值是（　　）

A．1　　　B．2　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　D．$\dfrac{5}{4}$

【答案】B

【解析】由$\begin{cases} S=\dfrac{a_1}{1-q} \\ |q|<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{1-a+\dfrac{3}{2}} \\ |a-\dfrac{3}{2}|<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\text{或}a=2 \\ \dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow a=2$.

15．如图，在平面直角坐标系中，Ω是一个与x轴的正半轴、y轴的正半轴分别相切于点C、D的定圆所围成的区域（含边界），A、B、C、D是该圆的四等分点．若点$P(x, y)$、点$P'(x', y')$满足$x\le x'$且$y\ge y'$，则称P优于P'．如果Ω中的点Q满足：不存在Ω中的其它点优于Q，那么所有这样的点Q组成的集合是劣弧（　D　）

A．$\overset{\frown}{AB}$　　　B．$\overset{\frown}{BC}$　　　C．$\overset{\frown}{CD}$　　　D．$\overset{\frown}{DA}$

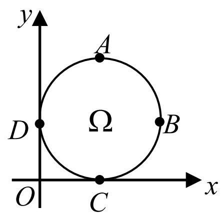
【答案】D

【解析】由题意知，若P优于 P' ,则P在 P' 的左上方,

$\therefore$ 当Q在 $\overset{\frown}{DA}$ 上时, 左上的点不在圆上,

$\therefore$ 不存在其它优于Q的点,

$\therefore Q$组成的集合是劣弧 $\overset{\frown}{DA}$.



三、解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

16．(本题满分12分)

如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E是BC_1的中点．求直线DE与平面$ABCD$所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.

16.【解】过E作$EF\perp BC$，交BC于F，连接DF.

$\because EF\perp$平面$ABCD$，

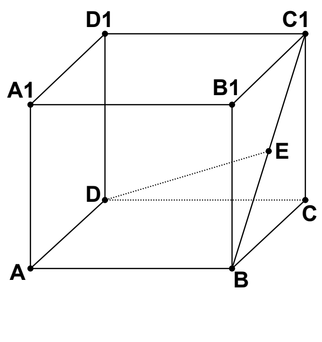
$\therefore \angle EDF$是直线DE与平面$ABCD$所成的角. ……………4分

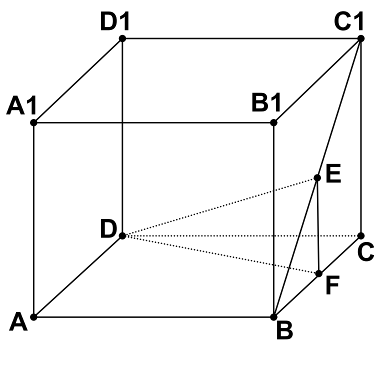
由题意，得$EF=\dfrac{1}{2}CC_1=1$.

$\because CF=\dfrac{1}{2}CB=1, \therefore DF=\sqrt{5}$. …………………………..8分

$\because EF\perp DF$， $\therefore \tan\angle EDF=\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$……………..10分

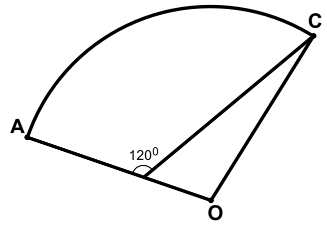
故直线DE与平面$ABCD$所成角的大小是 $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ….12分





17．（本题满分13分）

如图，某住宅小区的平面图呈扇形AOC．小区的两个出入口设置在点A及点C处，小区里有两条笔直的小路 AD，DC ，且拐弯处的转角为120°．已知某人从C沿CD走到D用了10分钟，从D沿DA走到A用了6分钟．若此人步行的速度为每分钟50米，求该扇形的半径OA的长（精确到1米）.



17.【解法一】设该扇形的半径为r米. 由题意，得

CD=500（米），DA=300（米），$\angle$CDO=60^0 ……………………………4分

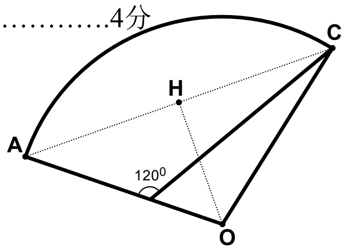
在ΔCDO中，$CD^2+OD^2-2\cdot CD\cdot OD\cdot\cos 60^0=OC^2$, ……………6分

即$500^2+\left(r-300\right)^2-2\times 500\times\left(r-300\right)\times\dfrac{1}{2}=r^2$, ……………………9分

解得$r=\dfrac{4900}{11}\approx 445$（米）. ………………………………………………13分

【解法二】连接AC，作$OH\perp AC$，交AC于H…………………..2分

由题意，得CD=500（米），AD=300（米），$\angle CDA=120^0$ …………4分



$$\text{在}\Delta ACD\text{中},AC^2=CD^2+AD^2-2\cdot CD\cdot AD\cdot\cos 120^0$$

$$=500^2+300^2+2\times 500\times 300\times\frac{1}{2}=700^2,$$

$\therefore$ AC=700（米） …………………………..6分

$\cos\angle CAD=\dfrac{AC^2+AD^2-CD^2}{2\cdot AC\cdot AD}=\dfrac{11}{14}$. ……………..……9分

在直角ΔHAO中, $AH=350$(米),$\cos\angle HA0=\dfrac{11}{14}$,

$\therefore$ $OA=\dfrac{AH}{\cos\angle HAO}=\dfrac{4900}{11}\approx 445$（米）. ………………………13分

18. （本题满分15分）本题共有2个小题，第1个题满分5分，第2小题满分10分.

已知函数$f(x)$=sin2x，$g(x)$=$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，直线$x=t(t\in\mathbf{R})$

与函数$f(x)$，$g(x)$的图象分别交于M、N两点.

（1）当$t=\dfrac{\pi}{4}$时，求 | MN | 的值；

（2）求 | MN | 在$t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时的最大值.

18、【解】（1）$\left|MN\right|=\left|\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ ……………2分

$=\left|1-\cos\dfrac{2\pi}{3}\right|=\dfrac{3}{2}$ ………………………………5分

（2）$\left|MN\right|=\left|\sin 2t-\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{2}\sin 2t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\right|$……...8分

$=\sqrt{3}\left|\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\right|$……………………………11分

$\because\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ 2t-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi-\frac{\pi}{6}\right],$ …………13分

$\therefore$ ｜MN｜的最大值为$\sqrt{3}$．　　……………15分

19．（本题满分16分）本题共有2个小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分．

已知函数 $f(x)=2^x-\frac{1}{2^{|x|}}$ ．

（1）若 $f(x)=2$ ，求 x 的值；

（2）若 $2^t f(2t)+mf(t)\geq 0$ 对于 $t\in[1,2]$ 恒成立，求实数m的取值范围．

19、【解】（1）当$x<0$时，$f\left(x\right)=0;$当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=2^x-\frac{1}{2^x}$．　……………．2分

由条件可知，$2^x-\frac{1}{2^x}=2,$即$2^{2x}-2\cdot 2^x-1=0,$解得 $2^x=1\pm\sqrt{2}$.…………6分

$\because\ 2^x>0,\therefore x=\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$　　…………..8分

（2）当$t\in[1,2]$时$,2^t\left(2^{2t}-\frac{1}{2^{2t}}\right)+m\left(2^t-\frac{1}{2^t}\right)\geq 0,$　……………10分

即 $m\left(2^{2t}-1\right)\geq-\left(2^{4t}-1\right).$

$\because 2^{2t}-1>0,\therefore m\geq\left(2^{2t}+1\right).$　………………13分

$\because t\in[1,2],\therefore-\left(1+2^{2t}\right)\in[-17,-5],$

故m的取值范围是$[-5,+\infty)$　……………．16分

20．（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分7分．

已知双曲线C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$．

（1）求双曲线C的渐近线方程；

（2）已知点M的坐标为$(0,1)$．设P是双曲线C上的点，Q是点P关于原点的对称点．

记$\lambda=\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MQ}$．求$\lambda$的取值范围；

（3）已知点D，E，M的坐标分别为$(-2,-1),(2,-1),(0,1)$，P为双曲线C上在第一象限内的点．记l为经过原点与点P的直线，s为$\triangle DEM$截直线l所得线段的长．试将s表示为直线l的斜率k的函数．

20、【解】（1）所求渐近线方程为$y-\frac{\sqrt{2}}{2}x=0,\ y+\frac{\sqrt{2}}{2}x=0$ ……………...3分

（2）设P的坐标为$\left(x_0,y_0\right)$，则Q的坐标为$\left(-x_0,-y_0\right)$， …………….4分

$$\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left(x_0,y_0-1\right)\cdot\left(-x_0,-y_o-1\right)$$

$$=-x_0^2-y_0^2+1=-\frac{3}{2}x_0^2+2.$$ ……………7分

$\because\left|x_0\right|\geq\sqrt{2}$

$\therefore\lambda$的取值范围是$(-\infty,-1]$. ……………9分

（3）若P为双曲线C上第一象限内的点，

则直线l的斜率$k\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ……………11分

由计算可得，当$k\in(0,\frac{1}{2}]$时,$s\left(k\right)=\frac{2}{1-k^2}\sqrt{1+k^2}$;

当$k\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时,$s\left(k\right)=\frac{2k+1}{k+k^2}\sqrt{1+k^2}$. ……………15分

$\therefore$ s表示为直线l的斜率k的函数是

$$s\left(k\right)=\begin{cases}\frac{2}{1-k^2}\sqrt{1+k^2},\ k\in(0,\frac{1}{2}],\\ \frac{2k+1}{k+k^2}\sqrt{1+k^2},k\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{cases}$$ ….16分

21．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分 4 分，第2小题满分 6 分，第3小题满分8分．

已知数列$\left\{a_n\right\}$：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=r$，$a_{n+3}=a_n+2$（n是正整数），与数列

$\{b_n\}$：$b_1=1$，$b_2=0$，$b_3=-1$，$b_4=0$，$b_{n+4}=b_n$（n是正整数）.

记$T_n=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+\cdots+b_na_n$.

（1）若$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=64$，求$r$的值；

（2）求证：当n是正整数时，$T_{12n}=-4n$；

（3）已知$r>0$，且存在正整数m，使得在T_{12m+1}，T_{12m+2}，$\cdots$，T_{12m+12}中有4项为100.

求r的值，并指出哪4项为100.

21、【解】（1） $a_1+a_2+a_3+...+a_{12}$

$=1+2+r+3+4+(r+2)+5+6+(r+4)+7+8+(r+6)$

$=48+4r.$ ………………..2分

$\because$ $48+4r=64, \therefore r=4.$ ………………..4分

【证明】（2）用数学归纳法证明：当$n\in Z^{+}$时,$T_{12n}=-4n.$

① 当n=1时，$T_{12}=a_1-a_3+a_5-a_7+a_9-a_{11}=-4,$ 等式成立….6分

② 假设n=k时等式成立，即$T_{12k}=-4k,$

那么当$n=k+1$时，

$T_{12(k+1)}=T_{12k}+a_{12k+1}-a_{12k+3}+a_{12k+5}-a_{12k+7}+a_{12k+9}-a_{12k+11}$………8分

$=-4k+(8k+1)-(8k+r)+(8k+4)-(8k+5)+(8k+r+4)-(8k+8)$

$=-4k-4=-4(k+1),$ 等式也成立.

根据①和②可以断定：当$n\in Z^{+}$时,$T_{12n}=-4n.$…………………...10分

【解】（3）

$T_{12m}=-4m\left(m\geq 1\right)$.

当$n=12m+1$, $12m+2$时，$T_n=4m+1$;

当$n=12m+3$, $12m+4$时，$T_n=-4m+1-r$;

当$n=12m+5$, $12m+6$时，$T_n=4m+5-r$;

当$n=12m+7$, $12m+8$时，$T_n=-4m-r$;

当$n=12m+9$, $12m+10$时，$T_n=4m+4$;

当$n=12m+11$, $12m+12$时,$T_n=-4m-4$. ………………………..13分

$\because$ 4m+1是奇数，$-4m+1-r,-4m-r,-4m-4$ 均为负数，

$\therefore$ 这些项均不可能取到100. ………………………..15分

此时，T_{293}，T_{294}，T_{297},T_{298} 为100. …………………………18分