1991年广东高考理科数学真题及答案

一、选择题：本大题共15小题；每小题3分，共45分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．把所选项前的字母填在题后括号内．

(1) 已知sin $\alpha=\frac{4}{5}$，并且 α 是第二象限的角，那么tg α 的值等于 (　　)

(A) $-\frac{4}{3}$　　(B) $-\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{4}{3}$

(2) 焦点在(－1，0)，顶点在(1，0)的抛物线方程是 (　　)

(A) $y^2=8(x+1)$　　(B) $y^2=-8(x+1)$

(C) $y^2=8(x-1)$　　(D) $y^2=-8(x-1)$

(3)函数$y=\cos^4x-\sin^4x$的最小正周期是 (　　)

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

(4)如果把两条异面直线看成“一对”，那么六棱锥的棱所在的12条直线中，异面直线共有 (　　)

(A) 12 对　　(B) 24 对　　(C) 36 对　　(D) 48 对

(5) 函数$y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$的图像的一条对称轴的方程是 (　　)

(A) $x=-\frac{\pi}{2}$　　(B) $x=-\frac{\pi}{4}$

(C) $x=\frac{\pi}{8}$　　(D) $x=\frac{5\pi}{4}$

(6) 如果三棱锥$S-ABC$的底面是不等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等，且顶点S在底面的射影O在△ABC内，那么O是△ABC的 (　　)

(A) 垂心　　(B) 重心　　(C) 外心　　(D) 内心

(7) 已知$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，那么a_3+a_5的值等于 (　　)

(A) 5　　(B) 10　　(C) 15　　(D) 20

(8) 如果圆锥曲线的极坐标方程为$\rho=\frac{16}{5-3\cos\theta}$，那么它的焦点的极坐标为 (　　)

(A) (0，0)，(6，π)　　(B) (－3，0)，(3，0)

(C) (0，0)，(3，0)　　(D) (0，0)，(6，0)

(9) 从4台甲型和5台乙型电视机中任意取出3台，其中至少要有甲型与乙型电视机各1台，则不同的取法共有 (　　)

(A) 140 种　　(B) 84 种　　(C) 70 种　　(D) 35 种

(10) 如果$AC<0$且$BC<0$，那么直线$Ax+By+C=0$不通过　　(　　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

(11) 设甲、乙、丙是三个命题．如果甲是乙的必要条件；丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件，那么　　(　　)

(A) 丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件

(B) 丙是甲的必要条件，但不是甲的充分条件

(C) 丙是甲的充要条件

(D) 丙不是甲的充分条件，也不是甲的必要条件

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})]\cdots(1-\frac{1}{n+2})]$的值等于　　(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(13) 如果奇函数$f(x)$在区间[3，7]上是增函数且最小值为5，那么$f(x)$在区间[－7，－3]上是　　(　　)

(A) 增函数且最小值为－5　　(B) 增函数且最大值为－5

(C) 减函数且最小值为－5　　(D) 减函数且最大值为－5

(14) 圆$x^2+2x+y^2+4y-3=0$上到直线$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$的点共有　　(　　)

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

(15) 设全集为R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，那么集合

$\{x|f(x)g(x)=0\}$等于　　(　　)

(A) $\overline{M}\cap\overline{N}$　　(B) $\overline{M}\cup N$　　(C) $M\cup\overline{N}$　　(D) $\overline{M}\cup\overline{N}$

二、填空题：本大题共5小题；每小题3分，共15分．把答案填在题中横线上．

(16) $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$的值是____________．

(17) 不等式$6^{x^2+x-2}<1$的解集是____________．

(18) 已知正三棱台上底面边长为2，下底面边长为4，且侧棱与底面所成的角是45°，那么这个正三棱台的体积等于_______．

(19) $(ax+1)^7$的展开式中，x^3的系数是x^2的系数与x^4的系数的等差中项．若实数$a>1$，那么$a=$________．

(20) 在球面上有四个点P、A、B、C，如果PA、PB、PC两两互相垂直，且$PA=PB=PC=a$．那么这个球面的面积是______．

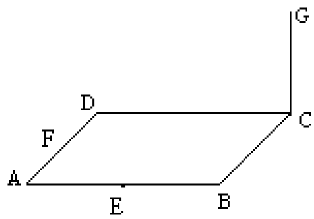
三、解答题：本大题共6小题；共60分．

(21)（本小题满分8分）

求函数$y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$的最小值，并写出使函数$y$取最小值的$x$的集合．

(22)（本小题满分8分）

已知复数$z=1+i$，求复数$\dfrac{z^2-3z+6}{z+1}$的模和辐角的主值．



(23)（本小题满分10分）

已知$ABCD$是边长为4的正方形，E、F分别是AB、AD的中点，GC垂直于$ABCD$所在的平面，且$GC=2$．求点B到平面EFG的距离．

(24)（本小题满分10分）

根据函数单调性的定义，证明函数$f(x)=-x^3+1$在$(-\infty，+\infty)$上是减函数．

(25)（本小题满分12分）

已知n为自然数，实数$a>1$，解关于x的不等式

$$\log_a x-\log_{a^2}x+12\log_{a^3}x+\cdots+n(n-2)^{n-1}\log_{a^n}x>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$$

(26)（本小题满分12分）

双曲线的中心在坐标原点O，焦点在x轴上，过双曲线右焦点且斜率为$\sqrt{\dfrac{3}{5}}$的直线交双曲线于P、Q两点．若$OP\perp OQ$，$|PQ|=4$，求双曲线的方程．

参考答案

说明：

一、本解答指出了每题所要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种较为常见的解法，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容参照评分标准制定相应评分细则.

二、每题都要评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅．当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分时，如果该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响的程度决定后面部分的给分，但不得超过后面部分应给分数的一半；如果这一步以后的解答有较严重的错误，就不给分.

三、为了阅卷方便，本试题解答中的推导步骤写得较为详细，允许考生在解题过程中合理省略非关键性的推导步骤.

四、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

五、只给整数分数.

一、选择题．本题考查基本知识和基本运算．每小题 3 分，满分 45 分.

(1)A (2)D (3)B (4)B (5)A (6) D (7)A (8)D

(9)C (10)C (11)A (12)C (13) B (14)C (15)D

二、填空题．本题考查基本知识和基本运算．每小题 3 分，满分 15 分.

（16） $\frac{\pi}{4}$ （17） $\{x|-2<x<1\}$ （18） $\frac{14}{3}$ （19） $1+\frac{\sqrt{10}}{5}$ （20） $3\pi a^2$

三、解答题

（21）本小题考查三角函数式的恒等变形及三角函数的性质．满分8分.

解：$y=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos x+2\cos^2 x$ ——1

分

$=1\sin 2x(1+\cos 2x)$ ——3

分

$=2+\sin 2x+\cos 2x$

$=2+\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$. ——5分

当$\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})=-1$时$y$取得最小值$2-\sqrt{2}$. ——6分

使y取最小值的x的集合为$\{x|x=k\pi-\dfrac{3}{8}\pi,\ k\in Z\}$. ——8分

(22) 本小题考查复数基本概念和运算能力. 满分8分.

解：$\dfrac{z^2-3z+6}{z+1}=\dfrac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1}$

$=\dfrac{3-i}{2+i}$ ——2分

$=1-i$. ——4分

$1-i$的模$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

因为$1-i$对应的点在第四象限且辐角的正切$\text{tg}\,\theta=-1$，所以辐角的主值

$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$. ——8分

(23) 本小题考查直线与直线，直线与平面，平面与平面的位置关系，以及逻辑推理和空间想象能力. 满分10分.

解: 如图，连结EG、FG、EF、BD、AC、EF、BD分别交AC于H、O. 因为$ABCD$是正方形，E、F分别为AB和AD的中点，故$EF/\!/BD$，H为AO的中点.

BD不在平面EFG上. 否则，平面EFG和平面$ABCD$重合，从而点G在平面的$ABCD$上，与题设矛盾.

由直线和平面平行的判定定理知$BD/\!/$平面EFG，所以BD和平面EFG的距离就是点B到平面EFG的距离. ——4分

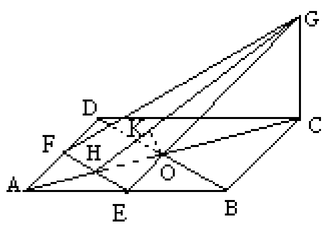
∵ $BD\perp AC$，

∴ $EF\perp HC$.

∵ $GC\perp$平面$ABCD$，

∴ $EF\perp GC$，

∴ $EF\perp$平面HCG.



∴ 平面$EFG\perp$平面HCG，HG是这两个垂直平面的交线. ——6分

作$OK\perp HG$交HG于点K，由两平面垂直的性质定理知$OK\perp$平面EFG，所以线段OK的长就

是点B到平面EFG的距离.　　——8分

∵ 正方形$ABCD$的边长为4，$GC=2$，

∴ $AC=4\sqrt{2}$，$HO=\sqrt{2}$，$HC=3\sqrt{2}$.

∴ 在Rt△HCG中，$HG=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$.

由于Rt△HKO和Rt△HCG有一个锐角是公共的，故Rt△HKO∽△HCG.

∴ $OK=\dfrac{HO\cdot GC}{HG}=\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{\sqrt{22}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

即点B到平面EFG的距离为$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.　　——10分

注：未证明“BD不在平面EFG上”不扣分.

(24) 本小题考查函数单调性的概念，不等式的证明，以及逻辑推理能力．满分10分.

证法一：在$(-\infty，+\infty)$上任取x_1，x_2且$x_1<x_2$　　——1分

则 $f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$　　——3分

∵ $x_1<x_2$，

∴ $x_1-x_2<0$.　　——4分

当$x_1x_2<0$时，有$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0$；　　——6分

当$x_1x_2\geqslant 0$时，有$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$；

∴ $f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$.　　——8分

即 $f(x_2)<f(x_1)$

所以，函数$f(x)=-x_3+1$在$(-\infty，+\infty)$上是减函数.　　——10分

证法二：在$(-\infty，+\infty)$上任取x_1，x_2，且$x_1<x_2$，　　——1分

则 $f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.　　——3分

∵ $x_1<x_2$，

∴ $x_1-x_2<0$.　　——4分

∵ x_1，x_2不同时为零，

∴ $x_1^2+x_2^2>0$.

又 ∵ $x_1^2+x_2^2>\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\geqslant|x_1x_2|\geqslant-x_1x_2$

∴ $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$，

∴ $f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$.　　——8分

即 $f(x_2)<f(x_1)$.

所以，函数$f(x)=-x^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.　　——10分

(25) 本小题考查对数、数列、解不等式等基本知识，以及分析问题的能力．满分12分.

解：利用对数换底公式，原不等式左端化为

$$\log_a x-4\cdot\frac{\log_a x}{\log_a a^2}+12\cdot\frac{\log_a x}{\log_a a^3}+\cdots+n(-2)^{n-1}\cdot\frac{\log_a x}{\log_a a^n}$$

$$=[1-2+4+\cdots+(-2)^{n-1}]\log_a x$$

$$=\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x$$

故原不等式可化为$\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$.　　①

当n为奇数时，$\frac{1-(-2)^n}{3}>0$，不等式①等价于

$\log_a x>\log_a(x^2-a)$.　　②

因为$a>1$，②式等价于

$$\begin{cases}x>0\\x^2-a>0\\x>x^2-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\|x|>\sqrt{a}\\x^2-x-a<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\sqrt{a}\\\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\end{cases}$$ ——6分

因为$\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$，　$\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>\dfrac{\sqrt{4a}}{2}=\sqrt{a}$，

所以，不等式②的解集为$\{x|\sqrt{a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$.　——8分

当n为偶数时，$\dfrac{1-(-2)^n}{3}<0$，不等式①等价于

$\log_a x>\log_a(x^2-a)$.　　③

因为$a>1$，③式等价于

$$\begin{cases}x>0\\x^2-a>0\\x<x^2-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\|x|>\sqrt{a}\\x^2-x-a>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\sqrt{a}\\x<\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x>\sqrt{a}\\x>\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\end{cases}$$ ——10分

因为$\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0,\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>\dfrac{\sqrt{4a}}{2}=\sqrt{a},$　——12分

所以，不等式③的解集为$\{x|x>\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$.

综合得：当n为奇数时，原不等式的解集是$\{x/\sqrt{a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$；

当n为偶数时，原不等式的解集是$\{x|x>\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$

(26) 本小题考查双曲线性质，两点距离公式，两直线垂直条件，代数二次方程等基本知识，以及综合分析能力．满分12分．

解法一：设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1．

依题意知，点P，Q的坐标满足方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 & ①\\ y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)\ \left(其中c=\sqrt{a^2+b^2}\right) & ②\end{cases}$$

将②式代入①式，整理得

$(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-(3a^2c^2+5a^2b^2)=0$．　③　——3分

设方程③的两个根为x_1，x_2，若$5b^2-3a^2=0$，则$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{5}}$，即直线②与双曲线①的两条渐近线中的一条平行，故与双曲线只能有一个交点同，与题设矛盾，所以$5b^2-3a^2\neq0$．

根据根与系数的关系，有

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6a^2c}{5b^2-3a^2} & ④\\ x_1x_2=-\frac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2} & ⑤\end{cases}$$　——6分

由于P、Q在直线$y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$上，可记为

$P\left(x_1,\ \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)\right)$，$Q\left(x_2,\ \sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)\right)$．

由$OP\perp OQ$得$\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)}{x_1}\cdot\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)}{x_2}=-1$，

整理得$3c(x_1+x_2)-8x_1x_2-3c^2=0$．　⑥

将④，⑤式及$c^2=a^2+b^2$代入⑥式，并整理得

$3a^4+8a^2b^2-3b^4=0$，

$(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0$．

因为 $a^2+3b^2\neq0$，解得$b^2=3a^2$，

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$. ——8分

由$|PQ|=4$，得$(x_2-x_1)^2=[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)-\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)]^2=4^2$.

整理得$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-10=0$. ⑦

将④，⑤式及$b^2=3a^2$，$c=2a$代入⑦式，解得$a^2=1$. ——10分

将$a^2=1$代入$b^2=3a^2$得 $b^2=3$.

故所求双曲线方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ——12分

解法二：④式以上同解法一. ——4分

解方程③得$x_1=\frac{-3a^2c+\sqrt{40}ab^2}{5b^2-3a^2}$，$x_2=\frac{-3a^2c-\sqrt{40}ab^2}{5b^2-3a^2}$ ④ ——6分

由于P、Q在直线$y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$上，可记为$P(x_1,\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c))$，$Q(x_2,\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c))$.

由$OP\perp OQ$，得$x_1x_2+\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)=0$. ⑤

将④式及$c^2=a^2b^2$代入⑤式并整理得 $3a^4+8a^2b^2-3b^4=0$，

即 $(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0$.

因$a^2+3b^2\neq0$，解得$b^2=3a^2$. ——8分

由$|PQ|=4$，得$(x_2-x_1)^2+[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)-\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)]^2=4^2$.

即 $(x^2-x^1)2=10$. ⑥

将④式代入⑥式并整理得

$(5b^2-3a^2)^2-16a^2b^4=0$. ——10分

将$b^2=3a^2$代入上式，得$a^2=1$，

将$a^2=1$代入$b^2=3a^2$得$b^2=3$.

故所求双曲线方程为

$x^2-\frac{y^2}{3}=1$． ——12 分