2008年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理工农医类）（北京卷）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至9页，共150分．考试时间120分钟．考试结束，将本试卷和答题卡一并交回．

第Ⅰ卷（选择题 共40分）

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．不能答在试卷上．

一、本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<-1或x>4\}$，那么集合$A\cap(\complement_U B)$等于（ ）

A．$\{x\mid -2\leqslant x<4\}$　　B．$\{x\mid x\leqslant 3或x\geqslant 4\}$

C．$\{x\mid -2\leqslant x<-1\}$　　D．$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

2．若$a=2^{0.5}$，$b=\log_{\pi}3$，$c=\log_2\sin\dfrac{2\pi}{5}$，则（ ）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

3．“函数$f(x)(x\in\mathbf{R})$存在反函数”是“函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数”的（ ）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．若点P到直线$x=-1$的距离比它到点$(2,0)$的距离小1，则点P的轨迹为（ ）

A．圆　　B．椭圆　　C．双曲线　　D．抛物线

5．若实数x，y满足$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\end{cases}$ 则$z=3^{x+2y}$的最小值是（ ）

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．9

6．已知数列$\{a_n\}$对任意的p，$q\in\mathbf{N}^*$满足$a_{p+q}=a_p+a_q$，且$a_2=-6$，那么a_{10}等于（

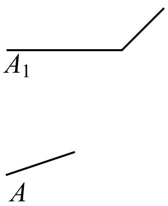
）

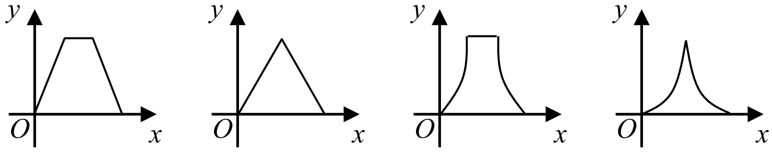
A．-165　　B．-33　　C．-30　　D．-21

7．过直线 $y=x$ 上的一点作圆 $(x-5)^2+(y-1)^2=2$ 的两条切线 l_1，l_2，当直线 l_1，l_2 关于 $y=x$ 对称时，它们之间的夹角为（　）

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

8．如图，动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上．过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线，与正方体表面相交于 M，N．设 $BP=x$，$MN=y$，则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是（　）





A．　　B．　　C．　　D．

2008年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理工农医类）（北京卷）

第II卷（共110分）

注意事项：

1．用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上．

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚．

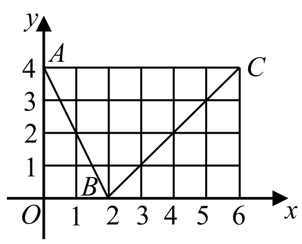
二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．把答案填在题中横线上．

9．已知 $(a-i)^2=2i$，其中 i 是虚数单位，那么实数 $a=$______．

10．已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=4$，那么 $\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的值为______．

11．若 $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ 展开式的各项系数之和为32，则 $n=$__________，其展开式中的常数项为．（用数字作答）

12．如图，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC，其中 A，B，C 的坐标分别为 $(0,4),(2,0),(6,4)$，则 $f(f(0))=$______；



$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$______．（用数字作答）

13．已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$，对于 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的任意 x_1，x_2，有如下条件：

① $x_1>x_2$； ② $x_1^2>x_2^2$； ③ $|x_1|>x_2$．

其中能使 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立的条件序号是______．

14．某校数学课外小组在坐标纸上，为学校的一块空地设计植树方案如下：第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k，y_k)$ 处，其中 $x_1=1$，$y_1=1$，当 $k\geqslant 2$ 时，

$$\begin{cases} x_k=x_{k-1}+1-5\left[T\left(\dfrac{k-1}{5}\right)-T\left(\dfrac{k-2}{5}\right)\right], \\ y_k=y_{k-1}+T\left(\dfrac{k-1}{5}\right)-T\left(\dfrac{k-2}{5}\right). \end{cases}$$

$T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分，例如 $T(2.6)=2$，$T(0.2)=0$．

按此方案，第6棵树种植点的坐标应为______；第2008棵树种植点的坐标应为____．

三、解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共13分）

已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right)$（$\omega>0$）的最小正周期为 π．

（Ⅰ）求 ω 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的取值范围．

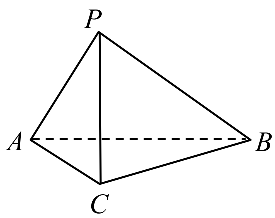
16．（本小题共14分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，$AP=BP=AB$，$PC\perp AC$．

（Ⅰ）求证：$PC\perp AB$；

（Ⅱ）求二面角 $B-AP-C$ 的大小；

（Ⅲ）求点 C 到平面 APB 的距离．



17．（本小题共13分）

甲、乙等五名奥运志愿者被随机地分到 A，B，C，D 四个不同的岗位服务，每个岗位至少有一名志愿者．

（Ⅰ）求甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率；

（Ⅱ）求甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率；

（Ⅲ）设随机变量 ξ 为这五名志愿者中参加 A 岗位服务的人数，求 ξ 的分布列．

18．（本小题共13分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-b}{(x-1)^2}$，求导函数 $f'(x)$，并确定 $f(x)$ 的单调区间．

19．（本小题共14分）

已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A，C 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，对角线 BD 所在直线的斜率为1．

（Ⅰ）当直线 BD 过点 $(0,1)$ 时，求直线 AC 的方程；

（Ⅱ）当 $\angle ABC=60^\circ$ 时，求菱形 $ABCD$ 面积的最大值．

20．（本小题共13分）

对于每项均是正整数的数列 A：a_1，$a_2,\cdots$，a_n，定义变换 T_1，T_1 将数列 A 变换成数列

$T_1(A)$：n，a_1-1，$a_2-1,\cdots$，a_n-1．

对于每项均是非负整数的数列 B：b_1，$b_2,\cdots$，b_m，定义变换 T_2，T_2 将数列 B 各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列 $T_2(B)$；

又定义 $S(B)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$．

设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列，令 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0,1,2,\cdots)$．

（Ⅰ）如果数列 A_0 为5，3，2，写出数列 A_1，A_2；

（Ⅱ）对于每项均是正整数的有穷数列 A，证明 $S(T_1(A))=S(A)$；

（Ⅲ）证明：对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0，存在正整数 K，当 $k\geqslant K$ 时，$S(A_{k+1})=S(A_k)$．

2008年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理工农医类）（北京卷）参考答案

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1．D　2．A　3．B　4．D　5．B　6．C　7．C　8．B

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

9．-1　10．0　11．5　10　12．2　-2

13．②　14．$(1,2)$　$(3,402)$

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

15．（共13分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\dfrac{1-\cos 2\omega x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x+\dfrac{1}{2}$

$=\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$.

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且 $\omega>0$，

所以 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$.

因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$，

所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

因此 $0\leqslant\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$，即 $f(x)$ 的取值范围为 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.

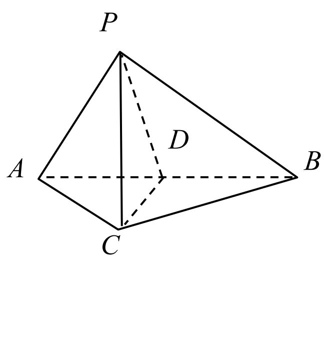
16．（共14分）

解法一：

（Ⅰ）取 AB 中点 D，连结 PD，CD.

$\because AP=BP$，

$\therefore PD\perp AB$.



$\because AC = BC$，

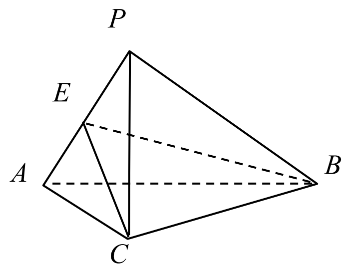
$\therefore CD \perp AB$.

$\because PD \cap CD = D$，

$\therefore AB \perp$ 平面 PCD.

$\because PC \subset$ 平面 PCD，

$\therefore PC \perp AB$.



（Ⅱ）$\because AC = BC$， $AP = BP$，

$\therefore \triangle APC \cong \triangle BPC$.

又 $PC \perp AC$，

$\therefore PC \perp BC$.

又 $\angle ACB = 90^\circ$，即 $AC \perp BC$，且 $AC \cap PC = C$，

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC.

取 AP 中点 E．连结 BE，CE.

$\because AB = BP$，$\therefore BE \perp AP$.

$\because EC$ 是 BE 在平面 PAC 内的射影，

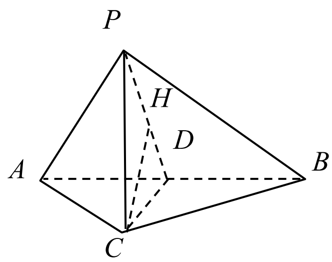
$\therefore CE \perp AP$.

$\therefore \angle BEC$ 是二面角 $B - AP - C$ 的平面角.

在 $\triangle BCE$ 中，$\angle BCE = 90^\circ$， $BC = 2$，$BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{6}$，

$\therefore \sin \angle BEC = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore$ 二面角 $B - AP - C$ 的大小为 $\arcsin \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $AB \perp$ 平面 PCD，

$\therefore$ 平面 $APB \perp$ 平面 PCD.

过 C 作 $CH \perp PD$，垂足为 H.

$\because$ 平面 $APB \cap$ 平面 $PCD = PD$，

$\therefore CH \perp$ 平面 APB.

$\therefore CH$ 的长即为点 C 到平面 APB 的距离.

由（Ⅰ）知 $PC \perp AB$，又 $PC \perp AC$，且 $AB \cap AC = A$，

$\therefore PC \perp$ 平面 ABC.

$\because CD \subset$ 平面 ABC，

$\therefore PC \perp CD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCD$ 中，$CD = \dfrac{1}{2} AB = \sqrt{2}$， $PD = \dfrac{\sqrt{3}}{2} PB = \sqrt{6}$，

$\therefore PC = \sqrt{PD^2 - CD^2} = 2$.

$\therefore CH = \dfrac{PC \bullet CD}{PD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 点 C 到平面 APB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

解法二：

（Ⅰ）$\because AC = BC$， $AP = BP$，

$\therefore \triangle APC \cong \triangle BPC$.

又 $PC \perp AC$，

$\therefore PC \perp BC$.

$\because AC \cap BC = C$，

$\therefore PC \perp$ 平面 ABC .

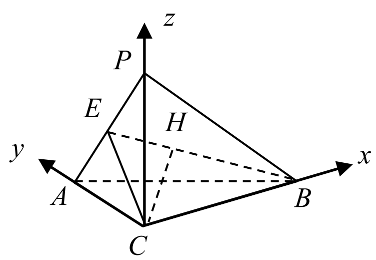
$\because AB \subset$ 平面 ABC，

$\therefore PC \perp AB$.

（Ⅱ）如图，以 C 为原点建立空间直角坐标系 $C-xyz$.

则 $C(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$B(2,0,0)$.

设 $P(0,0，t)$.



$\because |PB| = |AB| = 2\sqrt{2}$，

$\therefore t = 2$， $P(0,0,2)$.

取 AP 中点 E，连结 BE，CE .

$\because |AC| = |PC|$，$|AB| = |BP|$，

$\therefore CE \perp AP$， $BE \perp AP$.

$\therefore \angle BEC$ 是二面角 $B-AP-C$ 的平面角.

$\because E(0,1,1)$，$\overrightarrow{EC} = (0,-1,-1)$，$\overrightarrow{EB} = (2,-1,-1)$，

$$\therefore \cos\angle BEC = \frac{\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{EC}|\bullet|\overrightarrow{EB}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\bullet\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore$ 二面角 $B-AP-C$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）$\because AC = BC = PC$，

$\therefore C$ 在平面 APB 内的射影为正 $\triangle APB$ 的中心 H，且 CH 的长为点 C 到平面 APB 的距离 .

如（Ⅱ）建立空间直角坐标系 $C-xyz$.

$\because \overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{HE}$，

$\therefore$ 点 H 的坐标为 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

$\therefore \left|\overrightarrow{CH}\right| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 点 C 到平面 APB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

17. （共13分）

解：（Ⅰ）记甲、乙两人同时参加 A 岗位服务为事件 E_A，那么 $P(E_A) = \dfrac{A_3^3}{C_5^2 A_4^4} = \dfrac{1}{40}$，

即甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率是 $\dfrac{1}{40}$.

（Ⅱ）记甲、乙两人同时参加同一岗位服务为事件 E，那么 $P(E) = \dfrac{A_4^4}{C_5^2 A_4^4} = \dfrac{1}{10}$，

所以，甲、乙两人不在同一岗位服务的概率是 $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = \dfrac{9}{10}$.

（Ⅲ）随机变量 ξ 可能取的值为1，2．事件"$\xi = 2$"是指有两人同时参加 A 岗位服务，

则 $P(\xi = 2) = \dfrac{C_5^2 A_3^3}{C_5^3 A_4^4} = \dfrac{1}{4}$.

所以 $P(\xi = 1) = 1 - P(\xi = 2) = \dfrac{3}{4}$，$\xi$ 的分布列是

ξ	1	3
P	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

18. （共13分）

解：$f'(x) = \dfrac{2(x-1)^2 - (2x-b)\bullet 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$= \dfrac{-2x+2b-2}{(x-1)^3}$

$= -\dfrac{2[x-(b-1)]}{(x-1)^3}$.

令 $f'(x) = 0$，得 $x = b-1$.

当 $b-1<1$，即 $b<2$ 时，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty，b-1)$	$b-1$	$(b-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$

当$b-1>1$，即$b>2$时，$f'(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	$(1，b-1)$	$b-1$	$(b-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$

所以，当$b<2$时，函数$f(x)$在$(-\infty，b-1)$上单调递减，在$(b-1,1)$上单调递增，

在$(1,+\infty)$上单调递减.

当$b>2$时，函数$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1，b-1)$上单调递增，在$(b-1,+\infty)$上单调递减.

当$b-1=1$，即$b=2$时，$f(x)=\dfrac{2}{x-1}$，所以函数$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在

$(1,+\infty)$上单调递减.

19．（共14分）

解：（Ⅰ）由题意得直线BD的方程为$y=x+1$.

因为四边形$ABCD$为菱形，所以$AC\perp BD$.

于是可设直线AC的方程为$y=-x+n$.

由$\begin{cases}x^2+3y^2=4,\\ y=-x+n\end{cases}$得$4x^2-6nx+3n^2-4=0$.

因为$A，C$在椭圆上，

所以$\Delta=-12n^2+64>0$，解得$-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}<n<\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

设$A，C$两点坐标分别为$(x_1，y_1),(x_2，y_2)$，

则$x_1+x_2=\dfrac{3n}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{3n^2-4}{4}$，$y_1=-x_1+n$，$y_2=-x_2+n$.

所以$y_1+y_2=\dfrac{n}{2}$.

所以AC的中点坐标为$\left(\dfrac{3n}{4},\dfrac{n}{4}\right)$.

由四边形 $ABCD$ 为菱形可知，点 $\left(\frac{3n}{4},\frac{n}{4}\right)$ 在直线 $y=x+1$ 上，

所以 $\frac{n}{4}=\frac{3n}{4}+1$，解得 $n=-2$.

所以直线 AC 的方程为 $y=-x-2$，即 $x+y+2=0$.

（Ⅱ）因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC=60^\circ$，

所以 $|AB|=|BC|=|CA|$.

所以菱形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}|AC|^2$.

由（Ⅰ）可得 $|AC|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\frac{-3n^2+16}{2}$，

所以 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(-3n^2+16)\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}<n<\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

所以当 $n=0$ 时，菱形 $ABCD$ 的面积取得最大值 $4\sqrt{3}$.

20．（共13分）

（Ⅰ）解：A_0:5,3,2，

$T_1(A_0)$:3,4,2,1，

$A_1=T_2(T_1(A_0))$:4,3,2,1；

$T_1(A_1)$:4,3,2,1,0，

$A_2=T_2(T_1(A_1))$:4,3,2,1.

（Ⅱ）证明：设每项均是正整数的有穷数列 A 为 a_1，a_2,…，a_n，

则 $T_1(A)$ 为 n，a_1-1，a_2-1，…，a_n-1，

从而

$S(T_1(A))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\cdots+(n+1)(a_n-1)]$

$+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\cdots+(a_n-1)^2$.

又 $S(A)=2(a_1+2a_2+\cdots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，

所以$S(T_1(A))-S(A)$

$=2[n-2-3-\cdots-(n+1)]+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n$

$=-n(n+1)+n^2+n=0$，

故$S(T_1(A))=S(A)$.

（III）证明：设A是每项均为非负整数的数列a_1，$a_2,\cdots$，a_n.

当存在$1\leqslant i<j\leqslant n$，使得$a_i\leqslant a_j$时，交换数列$A$的第$i$项与第$j$项得到数列$B$，

则$S(B)-S(A)=2(ia_j+ja_i-ia_i-ja_j)=2(i-j)(a_j-a_i)\leqslant 0$.

当存在$1\leqslant m<n$，使得$a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0$时，若记数列$a_1$，$a_2,\cdots$，$a_m$为$C$，

则$S(C)=S(A)$.

所以$S(T_2(A))\leqslant S(A)$.

从而对于任意给定的数列A_0，由$A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0,1,2,\cdots)$

可知$S(A_{k+1})\leqslant S(T_1(A_k))$.

又由（II）可知$S(T_1(A_k))=S(A_k)$，所以$S(A_{k+1})\leqslant S(A_k)$.

即对于$k\in\mathbf{N}$，要么有$S(A_{k+1})=S(A_k)$，要么有$S(A_{k+1})\leqslant S(A_k)-1$.

因为$S(A_k)$是大于2的整数，所以经过有限步后，必有$S(A_k)=S(A_{k+1})=S(A_{k+2})=\cdots$.

即存在正整数K，当$k\geqslant K$时，$S(A_{k+1})=S(A_k)$.