2004年广西高考理科数学真题及答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）已知集合 $M=\{x|x^2<4\}$，$N=\{x|x^2-2x-3<0\}$，则集合 $M\cap N=$

（A）$\{x|x<-2\}$　　（B）$\{x|x>3\}$　　（C）$\{x|-1<x<2\}$　　（D）$\{x|2<x<3\}$

（2）$\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x-5}=$

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\dfrac{2}{5}$　　（D）$\dfrac{1}{4}$

（3）设复数 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $1+\omega=$

（A）$-\omega$　　（B）ω^2　　（C）$-\dfrac{1}{\omega}$　　（D）$\dfrac{1}{\omega^2}$

（4）已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称，则圆 C 的方程为

（A）$(x+1)^2+y^2=1$　　（B）$x^2+y^2=1$　　（C）$x^2+(y+1)^2=1$　　（D）$x^2+(y-1)^2=1$

（5）已知函数 $y=\tan(2x+\phi)$ 的图象过点 $(\dfrac{\pi}{12},0)$，则 ϕ 可以是

（A）$-\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{6}$　　（C）$-\dfrac{\pi}{12}$　　（D）$\dfrac{\pi}{12}$

（6）函数 $y=-e^x$ 的图象

（A）与 $y=e^x$ 的图象关于 y 轴对称　　（B）与 $y=e^x$ 的图象关于坐标原点对称

（C）与 $y=e^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称　　（D）与 $y=e^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称

（7）已知球 O 的半径为1，A、B、C 三点都在球面上，且每两点间的球面距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，则球心 O 到平面 ABC 的距离为

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（8）在坐标平面内，与点 $A(1，2)$ 距离为1，且与点 $B(3，1)$ 距离为2的直线共有

（A）1条　　（B）2条　　（C）3条　　（D）4条

（9）已知平面上直线 l 的方向向量 $\vec{e}=(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})$，点 $O(0,0)$ 和 $A(1,-2)$ 在 l 上的射影分别是 O_1 和 A_1，则 $\overrightarrow{O_1A_1}=\lambda\vec{e}$，其中 $\lambda=$

（A）$\dfrac{11}{5}$　　（B）$-\dfrac{11}{5}$　　（C）2　　（D）-2

（10）函数 $y=x\cos x-\sin x$ 在下面哪个区间内是增函数

（A）$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$　　（B）$(\pi，2\pi)$　　（C）$(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2})$　　（D）$(2\pi，3\pi)$

（11）函数 $y=\sin^4x+\cos^2x$ 的最小正周期为

（A）$\dfrac{\pi}{4}$　　　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$　　　　（C）π　　　　（D）2π

（12）在由数字 1，2，3，4，5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中，大于 23145 且小于 43521 的数共有

（A）56 个　　（B）57 个　　（C）58 个　　（D）60 个

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

（13）从装有 3 个红球，2 个白球的袋中随机取出 2 个球，设其中有 ξ 个红球，则随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	0	1	2
P			

（14）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge y, \\ 2x - y \le 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值是____________________ ．

（15）设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2-2y^2=1$ 有公共的焦点，且它们的离心率互为倒数，则该椭圆的方程是_________________________ ．

（16）下面是关于四棱柱的四个命题：①若有两个侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；②若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；③若四个侧面两两全等，则该四棱柱为直四棱柱；④若四棱柱的四条对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱，其中，真命题的编号是___________(写出所有真命题的编号)．

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（17）（本小题满分 12 分）已知锐角三角形 ABC 中，$\sin(A+B)=\dfrac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$．

(Ⅰ)求证：$\tan A=2\tan B$；

(Ⅱ)设 $AB=3$，求 AB 边上的高．

（18）(本小题满分 12 分)

已知 8 个球队中有 3 个弱队，以抽签方式将这 8 个球队分为 A、B 两组，每组 4 个．求

(Ⅰ)A、B 两组中有一组恰有两个弱队的概率；

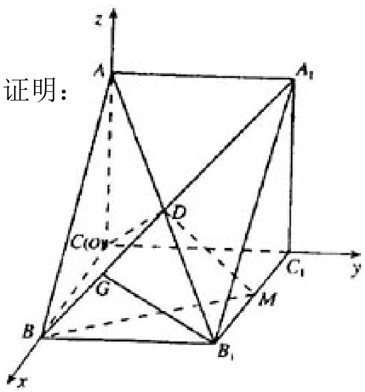
(Ⅱ)A 组中至少有两个弱队的概率．

（19）(本小题满分 12 分)

数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$（$n=1$，2，3，…）．证明：

(Ⅰ)数列$\{\dfrac{S_n}{n}\}$是等比数列；

(Ⅱ)$S_{n+1}=4a_n$．



（20）(本小题满分 12 分)．

如图，直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=1$，$CB=\sqrt{2}$，侧棱 $AA_1=1$，侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D，B_1C_1 的中点为 M．

(Ⅰ)求证：$CD\perp$平面 BDM；

(Ⅱ)求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小．

（21）(本小题满分 12 分) 给定抛物线 C：$y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点．

(Ⅰ)设 l 的斜率为 1，求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小；

(Ⅱ)设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，若 $\lambda\in[4，9]$，求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

(22)(本小题满分 14 分)已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=x\ln x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最大值；

(2)设 $0<a<b$，证明：$0<g(a)+g(b)-2g(\dfrac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$.

2004 年高考试题全国卷 2 理科数学（必修＋选修Ⅱ）答案：

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

（1）C	（2）A	（3）C	（4）C	（5）A	（6）D
（7）B	（8）B	（9）D	（10）B	（11）B	（12）C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

（13）0.1，0.6，0.3　（14）5　（15）$\dfrac{1}{2}x^2+y^2=1$　（16）②④

17. (I)证明：$\because \sin(A+B)=\dfrac{3}{5}, \sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$

$$\therefore \begin{cases}\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3}{5}\\ \sin A\cos B-\cos A\sin B=\dfrac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin A\cos B=\dfrac{2}{5}\\ \cos A\sin B=\dfrac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{\tan A}{\tan B}=2，\therefore \tan A=2\tan B.$$

(II)解：$\because \dfrac{\pi}{2}<A+B<\pi$，$\sin(A+B)=\dfrac{3}{5}$，$\therefore \cos(A+B)=-\dfrac{4}{5}$，$\tan(A+B)=-\dfrac{3}{4}$

即 $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{3}{4}$，将 $\tan A=2\tan B$ 代入上式并整理得 $2\tan^2 B-4\tan B-1=0$

解得 $\tan B=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$，因为 B 为锐角，所以 $\tan B=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$，$\therefore \tan A=2\tan B$ $=2+\sqrt{6}$

设 AB 上的高为 CD，则 AB=AD+DB=$\dfrac{CD}{\tan A}+\dfrac{CD}{\tan B}=\dfrac{3CD}{2+\sqrt{6}}$，由 AB=3 得 CD=$2+\sqrt{6}$

故 AB 边上的高为 $2+\sqrt{6}$

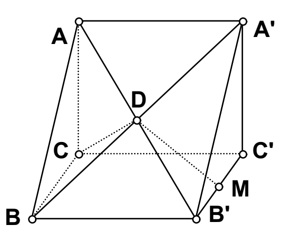
18. **(I) 解：**有一组恰有两支弱队的概率 $2\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{6}{7}$

(II)**解：**A 组中至少有两支弱队的概率 $\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}+\dfrac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}=\dfrac{1}{2}$

19. **(I) 证：** 由 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$ (n=1, 2, 3，…)，

知 $a_2=\dfrac{2+1}{1}S_1=3a_1$, $\dfrac{S_2}{2}=\dfrac{4a_1}{2}=2$，$\dfrac{S_1}{1}=1$，$\therefore \dfrac{\frac{S_2}{2}}{\frac{S_1}{1}}=2$

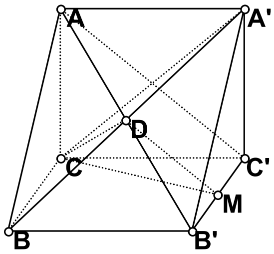
又 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ (n=1, 2, 3，…)，则 $S_{n+1}-S_n=\dfrac{n+2}{n}S_n$ (n=1, 2, 3，…)，$\therefore$ $nS_{n+1}=2(n+1)S_n$,



$\dfrac{\frac{S_{n+1}}{n+1}}{\frac{S_n}{n}}=2$ (n=1,2,3，…). 故数列{$\dfrac{S_n}{n}$}是首项为 1，公比为 2 的等比数列

(II) 解：由（I）知，$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=4\bullet\dfrac{S_{n-1}}{n-1}(n\ge 2)$，于是 $S_{n+1}=4(n+1)\bullet\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=4a_n(n\ge 2)$

又 $a_2=3S_1=3$, 则 $S_2=a_1+a_2=4=4a_1$, 因此对于任意正整数 n≥1 都有 $S_{n+1}=4a_n$.



20. **解法一**：(I)如图，连结 CA_1、AC_1、CM，则 $CA_1=\sqrt{2}$，

∵$CB=CA_1=\sqrt{2}$，∴△CBA_1为等腰三角形，

又知 D 为其底边 A_1B 的中点，∴$CD\perp A_1B$，

∵$A_1C_1=1$，$C_1B_1=\sqrt{2}$，∴$A_1B_1=\sqrt{3}$，

又 $BB_1=1$，∴$A_1B=2$，

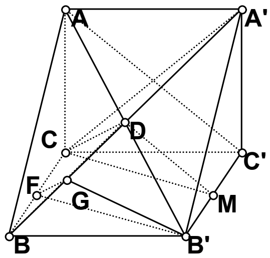
∵△A_1CB 为直角三角形，D 为 A_1B 的中点，$CD=\frac{1}{2}A_1B=1$，$CD=CC_1$

又 $DM=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$DM=C_1M$，∴△CDN≌△$CC_1M$，∠CDM=∠$CC_1M$=90°，即 CD⊥DM，

因为 A_1B、DM 为平面 BDM 内两条相交直线，所以 CD⊥平面 BDM

(II)设 F、G 分别为 BC、BD 的中点，连结 B_1G、FG、B_1F，

则 FG∥CD，$FG=\frac{1}{2}CD$∴$FG=\frac{1}{2}$，FG⊥BD.



由侧面矩形 BB_1A_1A 的对角线的交点为 D, 知 $BD=B_1D=\frac{1}{2}A_1B=1$，

所以△BB_1D 是边长为 1 的正三角形，于是 $B_1G\perp BD$，$B_1G=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

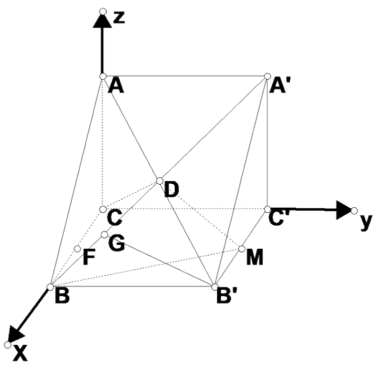
∴∠B_1GF 是所求二面角的平面角

又 $B_1F^2=B_1B^2+BF^2=1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{3}{2}$.

$$\therefore \cos\angle B_1GF=\frac{B_1G^2+FG^2-B_1F^2}{2B_1G\bullet FG}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}}{2\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}\bullet\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

即所求二面角的大小为 $\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

解法二：如图以 C 为原点建立坐标系



(I):$B(\sqrt{2},0,0)$, $B_1(\sqrt{2},1,0)$, $A_1(0,1,1)$, $D(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

$M(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$, $\overrightarrow{CD}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{2},-1,-1)$,

$\overrightarrow{DM}=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{A_1B}=0,\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{DM}=0$,

∴$CD\perp A_1B$, CD⊥DM.

因为 A_1B、DM 为平面 BDM 内两条相交直线，

所以 CD⊥平面 BDM

(II):设 BD 中点为 G，连结 B_1G，则 $G(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, $\overrightarrow{BD}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

$\overrightarrow{B_1G}=(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{4})$, ∴ $\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{B_1G}=0$，∴$BD\perp B_1G$，又 CD⊥BD，∴ $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{B_1G}$ 的夹角 θ 等于所求二面角的平面角，

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{B_1G}}{|\overrightarrow{CD}|\bullet|\overrightarrow{B_1G}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以所求二面角的大小为$\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

21．解：（I）C 的焦点为 F(1,0)，直线 l 的斜率为 1，所以 l 的方程为 $y=x-1$.

将 $y=x-1$ 代入方程 $y^2=4x$，并整理得 $x^2-6x+1=0$.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，则有 $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=1$，

$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=-3$.

$|\overrightarrow{OA}|\bullet|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\bullet\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_1x_2[x_1x_2+4(x_1+x_2)+16]}=\sqrt{41}$

$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\bullet|\overrightarrow{OB}|}=-\frac{3\sqrt{41}}{41}$.

所以$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$夹角的大小为$\pi-\arccos\frac{3\sqrt{41}}{41}$.

解：(II)由题设知$\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$ 得：$(x_2-1,y_2)=\lambda(1-x_1,-y_1)$，即$\begin{cases}x_2-1=\lambda(1-x_1)\cdots\cdots\cdots(1)\\ y_2=-\lambda y_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

由 (2)得 $y_2^2=\lambda^2y_1^2$，∵$y_1^2=4x_1$, $y_2^2=4x_2$, ∴$x_2=\lambda^2x_1$……………………………………(3)

联立(1)(3)解得 $x_2=\lambda$. 依题意有 $\lambda>0$.

∴$B(\lambda,2\sqrt{\lambda})$或$B(\lambda,-2\sqrt{\lambda})$，又 F(1,0)，

得直线 l 的方程为$(\lambda-1)y=2\sqrt{\lambda}(x-1)$或$(\lambda-1)y=-2\sqrt{\lambda}(x-1)$

当$\lambda\in[4,9]$时，l 在 y 轴上的截距为$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$或$-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$

由$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}=\frac{2}{\sqrt{\lambda}+1}+\frac{2}{\lambda-1}$，可知$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$在[4，9]上是递减的，

∴$\frac{3}{4}\le\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\le\frac{4}{3}$，$-\frac{4}{3}\le-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\le-\frac{3}{4}$

直线 l 在 y 轴上截距的变化范围是$[-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$

22．**(I)解**：函数 f(x)的定义域是$(-1,\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1$. 令$f'(x)=0$，解得 $x=0$，当$-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，又 $f(0)=0$，故当且仅当 $x=0$ 时，f(x)取得最大值，最大值是 0

(II)证法一：$g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})=a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2}=a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}$.

由 (I) 的结论知 $\ln(1+x)-x<0(x>-1$, 且 $x\neq0)$，由题设 $0<a<b$，得 $\frac{b-a}{2a}>0,-1<\frac{a-b}{2b}<0$，因此 $\ln\frac{2a}{a+b}=-\ln(1+\frac{b-a}{2a})>-\frac{b-a}{2a}$，$\ln\frac{2b}{a+b}=-\ln(1+\frac{a-b}{2b})>-\frac{a-b}{2b}$.

所以 $a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}>-\frac{b-a}{2}-\frac{a-b}{2}=0$.

又 $\frac{2a}{a+b}<\frac{a+b}{2b}$，$a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}<a\ln\frac{a+b}{2b}+b\ln\frac{2b}{a+b}=(b-a)\ln\frac{2b}{a+b}<(b-a)\ln2$.

综上 $0<g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln2$.

(II)证法二：$g(x)=x\ln x$, $g'(x)=\ln x+1$，设 $F(x)=g(a)+g(x)-2g(\frac{a+x}{2})$，

则 $F'(x)=g'(x)-2[g(\frac{a+x}{2})]'=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}$. 当 $0<x<a$ 时 $F'(x)<0$, 因此 F(x)在(0,a)内为减函数当 $x>a$ 时 $F'(x)>0$, 因此 F(x)在$(a,+\infty)$上为增函数从而，当 $x=a$ 时，F(x)有极小值 F(a)因为 $F(a)=0$, $b>a$, 所以 $F(b)>0$, 即 $0<g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})$.

设 $G(x)=F(x)-(x-a)\ln2$, 则 $G'(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}-\ln2=\ln x-\ln(a+x)$. 当 $x>0$ 时，$G'(x)<0$，因此 G(x)在$(0,+\infty)$上为减函数，因为 $G(a)=0$, $b>a$, 所以 $G(b)<0$. 即 $g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln2$.