2007年河南高考文科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至4页．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第Ⅰ卷

注意事项：

1．答题前，考生在答题卡上务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，并贴好条形码．请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目．

2．每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，在试题卷上作答无效．

3．本卷共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A，B 相互独立，那么

$P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(n=0,1,2,\cdots,n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

（1）设 $S=\left\{x\left|2x+1>0\right.\right\}$，$T=\left\{x\left|3x-5<0\right.\right\}$，则 $S\bigcap T=$（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\left\{x\left|x<-\frac{1}{2}\right.\right\}$　　C．$\left\{x\left|x>\frac{5}{3}\right.\right\}$　　D．$\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\right.\right\}$

（2）α 是第四象限角，$\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{5}{13}$　　B．$-\frac{5}{13}$　　C．$\frac{5}{12}$　　D．$-\frac{5}{12}$

（3）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$，$\boldsymbol{b}=(6,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$（　　）

A．垂直　　B．不垂直也不平行　　C．平行且同向　　D．平行且反向

（4）已知双曲线的离心率为 2，焦点是 $(-4,0)$，$(4,0)$，则双曲线方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　C．$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$　　D．$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$

（5）甲、乙、丙 3 位同学选修课程，从 4 门课程中，甲选修 2 门，乙、丙各选修 3 门，则

不同的选修方案共有（　　）

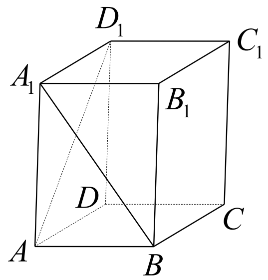
A．36 种　　B．48 种　　C．96 种　　D．192 种

（6）下面给出四个点中，位于$\begin{cases} x+y-1<0, \\ x-y+1>0 \end{cases}$表示的平面区域内的点是（　　）

A．$(0,2)$　　B．$(-2,0)$　　C．$(0,-2)$　　D．$(2,0)$

（7）如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$



（8）设 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

（9）$f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$h(x)=f(x)+g(x)$，则“$f(x)$，$g(x)$ 均为偶函数”是“$h(x)$ 为偶函数”的（　　）

A．充要条件　　B．充分而不必要的条件

C．必要而不充分的条件　　D．既不充分也不必要的条件

（10）函数 $y=2\cos^2 x$ 的一个单调增区间是（　　）

A．$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$　　B．$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$　　D．$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$

（11）曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+x$ 在点 $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 处的切线与坐标轴围成的三角形面积为（　　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

（12）抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A，$AK\perp l$，垂足为 K，则 $\triangle AKF$ 的面积是（　　）

A．4　　B．$3\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．8

第Ⅱ卷

注意事项：

1．答题前，考生先在答题卡上用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，然后贴好条形码．请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目．

2．第Ⅱ卷共2页，请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，在试题卷上作答无效．

3．本卷共10题，共90分．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在横线上．

（13）从某自动包装机包装的食盐中，随机抽取20袋，测得各袋的质量分别为（单位：g）：

492	496	494	495	498	497	501	502	504	496
497	503	506	508	507	492	496	500	501	499

根据频率分布估计总体分布的原理，该自动包装机包装的袋装食盐质量在497.5g～501.5g之间的概率约为_____．

（14）函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_3 x\quad (x>0)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x)=$___________．

（15）正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长和各侧棱长都为 $\sqrt{2}$，点 S，A，B，C，D 都在同一个球面上，则该球的体积为_________．

（16）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 S_1，$2S_2$，$3S_3$ 成等差数列，则 $\{a_n\}$ 的公比为______．

三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（17）（本小题满分10分）

设锐角三角形 ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$a=2b\sin A$．

（Ⅰ）求 B 的大小；

（Ⅱ）若 $a=3\sqrt{3}$，$c=5$，求 b．

（18）（本小题满分12分）

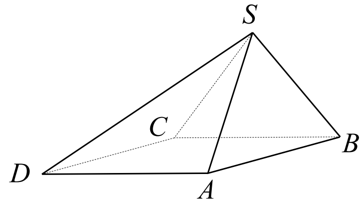
某商场经销某商品，顾客可采用一次性付款或分期付款购买．根据以往资料统计，顾客采用一次性付款的概率是0.6，经销一件该商品，若顾客采用一次性付款，商场获得利润200元；若顾客采用分期付款，商场获得利润250元．

（Ⅰ）求3位购买该商品的顾客中至少有1位采用一次性付款的概率；

（Ⅱ）求3位顾客每人购买1件该商品，商场获得利润不超过650元的概率．

（19）（本小题满分12分）

四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，已知 $\angle ABC=45^\circ$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$SA=SB=\sqrt{3}$．



（Ⅰ）证明：$SA\perp BC$；

（Ⅱ）求直线 SD 与平面 SBC 所成角的大小．

（20）（本小题满分12分）

设函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+3bx+8c$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 时取得极值.

（Ⅰ）求 a、b 的值；

（Ⅱ）若对于任意的 $x\in[0,3]$，都有 $f(x)<c^2$ 成立，求 c 的取值范围.

（21）（本小题满分 12 分）

设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列，且 $a_1=b_1=1$，$a_3+b_5=21$，$a_5+b_3=13$

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

（22）（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线交椭圆于 B，D 两点，过 F_2 的直线交椭圆于 A，C 两点，且 $AC\perp BD$，垂足为 P.

（Ⅰ）设 P 点的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，证明：$\dfrac{{x_0}^2}{3}+\dfrac{{y_0}^2}{2}<1$；

（Ⅱ）求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值.

参考答案

一、选择题

1．D　2．B　3．A　4．A　5．C　6．C　7．D　8．D　9．B

10．D　11．A　12．C

二、填空题

13．0.25　14．$3^x(x\in\mathbf{R})$　15．$\dfrac{4\pi}{3}$　16．$\dfrac{1}{3}$

三、解答题

17．解：

（Ⅰ）由 $a=2b\sin A$，根据正弦定理得 $\sin A=2\sin B\sin A$，所以 $\sin B=\dfrac{1}{2}$，

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅱ）根据余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=27+25-45=7$.

所以，$b=\sqrt{7}$.

18．解：

（Ⅰ）记 A 表示事件："3位顾客中至少1位采用一次性付款"，则 $\overline{A}$ 表示事件："3位顾客中无人采用一次性付款".

$P(\overline{A})=(1-0.6)^2=0.064$，

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.064=0.936$.

（Ⅱ）记 B 表示事件："3位顾客每人购买1件该商品，商场获得利润不超过650元".

B_0 表示事件："购买该商品的3位顾客中无人采用分期付款".

B_1 表示事件："购买该商品的3位顾客中恰有1位采用分期付款".

则 $B=B_0+B_1$.

$P(B_0)=0.6^3=0.216$，$P(B_1)=C_3^1\times0.6^2\times0.4=0.432$.

$P(B)=P(B_0+B_1)$

$=P(B_0)+P(B_1)$

$=0.216+0.432$

$=0.648$.

19．解法一：

（1）作 $SO\perp BC$，垂足为 O，连结 AO，由侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，得 $SO\perp$ 底面 $ABCD$.

因为 $SA=SB$，所以 $AO=BO$，

又 $\angle ABC=45^\circ$，故 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，$AO\perp BO$，

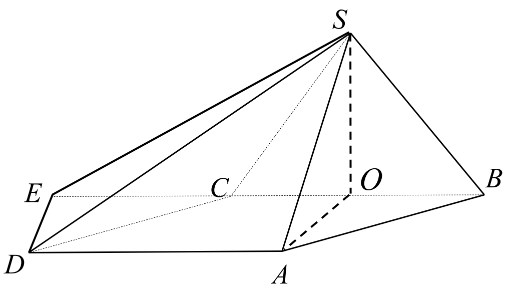
由三垂线定理，得 $SA\perp BC$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $SA\perp BC$，

依题设 $AD\parallel BC$，

故 $SA\perp AD$，由 $AD=BC=2\sqrt{2}$，

$SA=\sqrt{3}$，



$SD=\sqrt{AD^2+SA^2}=\sqrt{11}$.

又 $AO=AB\sin45^\circ=\sqrt{2}$，作 $DE\perp BC$，垂足为 E，

则 $DE\perp$ 平面 SBC，连结 SE．$\angle ESD$ 为直线 SD 与平面 SBC 所成的角.

$$\sin\angle ESD=\frac{ED}{SD}=\frac{AO}{SD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$$

所以，直线 SD 与平面 SBC 所成的角为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

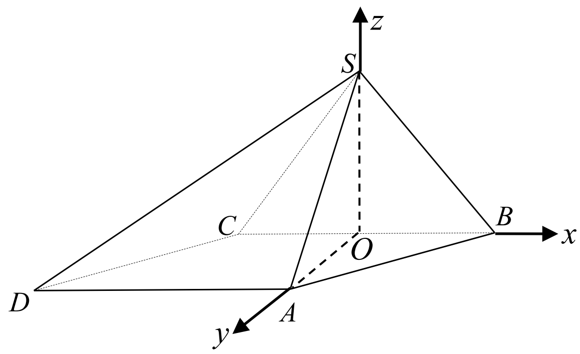
解法二：

（Ⅰ）作 $SO\perp BC$，垂足为 O，连结 AO，由侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，得 $SO\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $SA=SB$，所以 $AO=BO$.

又 $\angle ABC=45^{\circ}$，$\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，$AO\perp OB$.

如图，以 O 为坐标原点，OA 为 x 轴正向，建立直角坐标系 $O-xyz$，



因为 $AO=BO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$，

$SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=1$，

又 $BC=2\sqrt{2}$，所以 $A(\sqrt{2},0,0)$，

$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(0,-\sqrt{2},0)$.

$S(0,0,1)$，$\overrightarrow{SA}=(\sqrt{2},0,-1)$，

$\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{SA}\bullet\overrightarrow{CB}=0$，所以 $SA\perp BC$.

（Ⅱ）$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},-2\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{OA}=(\sqrt{2},0,0)$.

$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{SD}$ 的夹角记为 α，SD 与平面 ABC 所成的角记为 β，因为 $\overrightarrow{OA}$ 为平面 SBC 的法向量，所以 α 与 β 互余.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{SD}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\bullet\left|\overrightarrow{SD}\right|}=\frac{\sqrt{22}}{11}，\ \sin\beta=\frac{\sqrt{22}}{11}，$$

所以，直线 SD 与平面 SBC 所成的角为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

20．解：

（Ⅰ）$f'(x)=6x^2+6ax+3b$，

因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 取得极值，则有 $f'(1)=0$，$f'(2)=0$.

即 $\begin{cases}6+6a+3b=0,\\24+12a+3b=0.\end{cases}$

解得 $a=-3$，$b=4$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+8c$，

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$．

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(2,3)$ 时，$f'(x)>0$．

所以，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(1)=5+8c$，又 $f(0)=8c$，$f(3)=9+8c$．

则当 $x\in\left[0,3\right]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(3)=9+8c$．

因为对于任意的 $x\in\left[0,3\right]$，有 $f(x)<c^2$ 恒成立，

所以 $9+8c<c^2$，

解得 $c<-1$ 或 $c>9$，

因此 c 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$．

21．解：

（Ⅰ）设 $\left\{a_n\right\}$ 的公差为 d，$\left\{b_n\right\}$ 的公比为 q，则依题意有 $q>0$ 且 $\begin{cases}1+2d+q^4=21,\\1+4d+q^2=13,\end{cases}$

解得 $d=2$，$q=2$．

所以 $a_n=1+(n-1)d=2n-1$，

$b_n=q^{n-1}=2^{n-1}$．

（Ⅱ）$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$．

$S_n=1+\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-2}}+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，①

$2S_n=2+3+\dfrac{5}{2}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-3}}+\dfrac{2n-1}{2^{n-2}}$，②

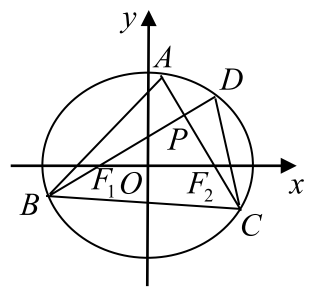
②－①得 $S_n=2+2+\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{2}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，

$=2+2\times\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)-\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$

$$=2+2\times\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}.$$

22．证明



（Ⅰ）椭圆的半焦距$c=\sqrt{3-2}=1$，

由$AC\perp BD$知点P在以线段F_1F_2为直径的圆上，

故$x_0^2+y_0^2=1$，

所以，$\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}\leqslant\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}=\frac{1}{2}<1$.

（Ⅱ）（ⅰ）当BD的斜率k存在且$k\neq 0$时，BD的方程为$y=k(x+1)$，代入椭圆方程

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，并化简得$(3k^2+2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$.

设$B(x_1,\ y_1)$，$D(x_2,\ y_2)$，则

$$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+2},\quad x_1x_2=\frac{3k^2-6}{3k^2+2},$$

$$|BD|=\sqrt{1+k^2}\bullet|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\bullet\left[(x_2+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+2};$$

因为AC与BC相交于点p，且AC的斜率为$-\frac{1}{k}$.

所以，$|AC|=\frac{4\sqrt{3}\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}{3\times\frac{1}{k^2}+2}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2k^2+3}$.

四边形$ABCD$的面积

$$S=\frac{1}{2}\bullet|BD|\bullet|AC|=\frac{24(k^2+1)^2}{(3k^2+2)(2k^2+3)}\geqslant\frac{24(k^2+1)^2}{\left[\frac{(3k^2+2)+(2k^2+3)}{2}\right]^2}=\frac{96}{25}.$$

当$k^2=1$时，上式取等号.

（ⅱ）当BD的斜率$k=0$或斜率不存在时，四边形$ABCD$的面积$S=4$.

综上，四边形$ABCD$的面积的最小值为$\frac{96}{25}$.