

# 2016年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出四个选项，只有一个选项符合题目要求.

1. (5分) 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{x|x^2<9\}$ , 则 $A\cap B=(\quad)$
- A.  $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$                       B.  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$   
C.  $\{1, 2, 3\}$                                       D.  $\{1, 2\}$

【考点】1E: 交集及其运算.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 40: 定义法; 5J: 集合.

【分析】先求出集合A和B, 由此利用交集的定义能求出 $A\cap B$ 的值.

【解答】解:  $\because$ 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{x|x^2<9\}=\{x|-3<x<3\}$ ,  
 $\therefore A\cap B=\{1, 2\}$ .

故选: D.

【点评】本题考查交集的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意交集定义的合理运用.

2. (5分) 设复数 $z$ 满足 $z+i=3-i$ , 则 $\bar{z}=(\quad)$
- A.  $-1+2i$                       B.  $1-2i$                       C.  $3+2i$                       D.  $3-2i$

【考点】A5: 复数的运算.

【专题】11: 计算题; 40: 定义法; 5N: 数系的扩充和复数.

【分析】根据已知求出复数 $z$ , 结合共轭复数的定义, 可得答案.

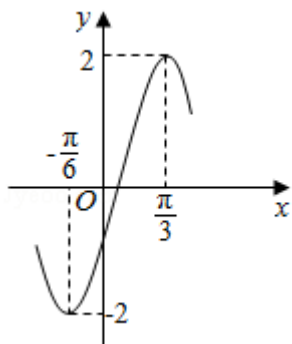
【解答】解:  $\because$ 复数 $z$ 满足 $z+i=3-i$ ,  
 $\therefore z=3-2i$ ,  
 $\therefore \bar{z}=3+2i$ ,

故选: C.

【点评】本题考查的知识点是复数代数形式的加减运算, 共轭复数的定义, 难

度不大，属于基础题.

3. (5分) 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象如图所示，则 ( )



A.  $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

B.  $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C.  $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

D.  $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

**【考点】**HK: 由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式.

**【专题】**35: 转化思想; 4R: 转化法; 57: 三角函数的图像与性质.

**【分析】**根据已知中的函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象，求出满足条件的A， $\omega$ ， $\phi$ 值，可得答案.

**【解答】**解：由图可得：函数的最大值为2，最小值为-2，故 $A=2$ ，

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } T = \pi, \omega = 2,$$

$$\text{故 } y = 2\sin(2x + \phi),$$

$$\text{将 } \left(\frac{\pi}{3}, 2\right) \text{ 代入可得: } 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \phi\right) = 2,$$

$$\text{则 } \phi = -\frac{\pi}{6} \text{ 满足要求,}$$

$$\text{故 } y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

故选：A.

**【点评】**本题考查的知识点是由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式，确定各个参数的值是解答的关键.

4. (5分) 体积为8的正方体的顶点都在同一球面上，则该球面的表面积为 ( )

)

- A.  $12\pi$                       B.  $\frac{32}{3}\pi$                       C.  $8\pi$                       D.  $4\pi$

**【考点】** LG: 球的体积和表面积.

**【专题】** 11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 5U: 球.

**【分析】** 先通过正方体的体积, 求出正方体的棱长, 然后求出球的半径, 即可求出球的表面积.

**【解答】** 解: 正方体体积为8, 可知其边长为2,

正方体的体对角线为 $\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$ ,

即为球的直径, 所以半径为 $\sqrt{3}$ ,

所以球的表面积为 $4\pi \cdot (\sqrt{3})^2=12\pi$ .

故选: A.

**【点评】** 本题考查学生的空间想象能力, 体积与面积的计算能力, 是基础题.

5. (5分) 设F为抛物线C:  $y^2=4x$ 的焦点, 曲线 $y=\frac{k}{x}$  ( $k>0$ ) 与C交于点P,  $PF \perp x$

轴, 则 $k=$  (     )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B. 1                      C.  $\frac{3}{2}$                       D. 2

**【考点】** K8: 抛物线的性质.

**【专题】** 35: 转化思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** 根据已知, 结合抛物线的性质, 求出P点坐标, 再由反比例函数的性质, 可得k值.

**【解答】** 解: 抛物线C:  $y^2=4x$ 的焦点F为(1, 0),

曲线 $y=\frac{k}{x}$  ( $k>0$ ) 与C交于点P在第一象限,

由 $PF \perp x$ 轴得: P点横坐标为1,

代入C得: P点纵坐标为2,

故 $k=2$ ,

故选: D.

**【点评】** 本题考查的知识点是抛物线的简单性质，反比例函数的性质，难度中档.

6. (5分) 圆 $x^2+y^2 - 2x - 8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y - 1=0$ 的距离为1, 则 $a=$  ( )

- A.  $-\frac{4}{3}$                       B.  $-\frac{3}{4}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 2

**【考点】** IT: 点到直线的距离公式; J9: 直线与圆的位置关系.

**【专题】** 35: 转化思想; 4R: 转化法; 5B: 直线与圆.

**【分析】** 求出圆心坐标, 代入点到直线距离方程, 解得答案.

**【解答】** 解: 圆 $x^2+y^2 - 2x - 8y+13=0$ 的圆心坐标为: (1, 4),

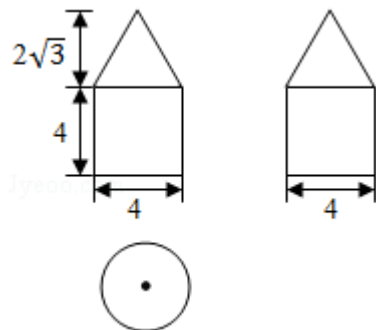
故圆心到直线 $ax+y - 1=0$ 的距离 $d=\frac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1,$

解得:  $a=-\frac{4}{3},$

故选: A.

**【点评】** 本题考查的知识点是圆的一般方程, 点到直线的距离公式, 难度中档.

7. (5分) 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 ( )



- A.  $20\pi$                       B.  $24\pi$                       C.  $28\pi$                       D.  $32\pi$

**【考点】** L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离

【分析】空间几何体是一个组合体，上面是一个圆锥，圆锥的底面直径是4，圆锥的高是 $2\sqrt{3}$ ，在轴截面中圆锥的母线长使用勾股定理做出的，写出表面积，下面是一个圆柱，圆柱的底面直径是4，圆柱的高是4，做出圆柱的表面积，注意不包括重合的平面.

【解答】解：由三视图知，空间几何体是一个组合体，上面是一个圆锥，圆锥的底面直径是4，圆锥的高是 $2\sqrt{3}$ ，  
∴在轴截面中圆锥的母线长是 $\sqrt{12+4}=4$ ，  
∴圆锥的侧面积是 $\pi \times 2 \times 4 = 8\pi$ ，  
下面是一个圆柱，圆柱的底面直径是4，圆柱的高是4，  
∴圆柱表现出来的表面积是 $\pi \times 2^2 + 2\pi \times 2 \times 4 = 20\pi$   
∴空间组合体的表面积是 $28\pi$ ，  
故选：C.

【点评】本题考查由三视图求表面积，本题的图形结构比较简单，易错点可能是两个几何体重叠的部分忘记去掉，求表面积就有这样的弊端.

8. (5分) 某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现，红灯持续时间为40秒. 若一名行人来到该路口遇到红灯，则至少需要等待15秒才出现绿灯的概率为 ( )
- A.  $\frac{7}{10}$                       B.  $\frac{5}{8}$                       C.  $\frac{3}{8}$                       D.  $\frac{3}{10}$

【考点】CF：几何概型.

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；5I：概率与统计.

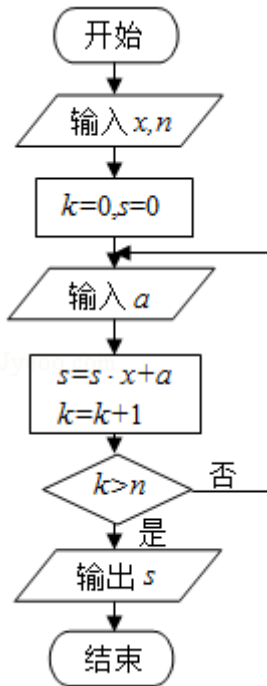
【分析】求出一名行人前25秒来到该路口遇到红灯，即可求出至少需要等待15秒才出现绿灯的概率.

【解答】解：∵红灯持续时间为40秒，至少需要等待15秒才出现绿灯，  
∴一名行人前25秒来到该路口遇到红灯，  
∴至少需要等待15秒才出现绿灯的概率为 $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ .

故选：B.

**【点评】** 本题考查概率的计算，考查几何概型，考查学生的计算能力，比较基础.

9. (5分) 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法，如图是实现该算法的程序框图. 执行该程序框图，若输入的 $x=2$ ， $n=2$ ，依次输入的 $a$ 为2，2，5，则输出的 $s=$  ( )



A. 7

B. 12

C. 17

D. 34

**【考点】** EF: 程序框图.

**【专题】** 11: 计算题; 28: 操作型; 5K: 算法和程序框图.

**【分析】** 根据已知的程序框图可得，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 $s$ 的值，模拟程序的运行过程，可得答案.

**【解答】** 解：∵输入的 $x=2$ ， $n=2$ ，

当输入的 $a$ 为2时， $S=2$ ， $k=1$ ，不满足退出循环的条件；

当再次输入的 $a$ 为2时， $S=6$ ， $k=2$ ，不满足退出循环的条件；

当输入的 $a$ 为5时， $S=17$ ， $k=3$ ，满足退出循环的条件；

故输出的 $S$ 值为17，

故选：C.

**【点评】** 本题考查的知识点是程序框图，当循环次数不多，或有规律可循时，可采用模拟程序法进行解答.

10. (5分) 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ( )

- A.  $y=x$                       B.  $y=\lg x$                       C.  $y=2^x$                       D.  $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

**【考点】** 4K: 对数函数的定义域; 4L: 对数函数的值域与最值.

**【专题】** 11: 计算题; 40: 定义法; 51: 函数的性质及应用.

**【分析】** 分别求出各个函数的定义域和值域，比较后可得答案.

**【解答】** 解：函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域均为 $(0, +\infty)$ ，  
函数 $y=x$ 的定义域和值域均为 $\mathbb{R}$ ，不满足要求；

函数 $y=\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，值域为 $\mathbb{R}$ ，不满足要求；

函数 $y=2^x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，值域为 $(0, +\infty)$ ，不满足要求；

函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域和值域均为 $(0, +\infty)$ ，满足要求；

故选：D.

**【点评】** 本题考查的知识点是函数的定义域和值域，熟练掌握各种基本初等函数的定义域和值域，是解答的关键.

11. (5分) 函数 $f(x) = \cos 2x + 6\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 的最大值为 ( )

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7

**【考点】** HW: 三角函数的最值.

**【专题】** 33: 函数思想; 4J: 换元法; 56: 三角函数的求值; 57: 三角函数的图像与性质.

**【分析】** 运用二倍角的余弦公式和诱导公式，可得 $y=1-2\sin^2x+6\sin x$ ，令 $t=\sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ )，可得函数 $y=-2t^2+6t+1$ ，配方，结合二次函数的最值的求法，

以及正弦函数的值域即可得到所求最大值.

**【解答】**解: 函数  $f(x) = \cos 2x + 6\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$= 1 - 2\sin^2 x + 6\sin x,$$

$$\text{令 } t = \sin x \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

$$\text{可得函数 } y = -2t^2 + 6t + 1$$

$$= -2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2},$$

由  $\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$ , 可得函数在  $[-1, 1]$  递增,

即有  $t=1$  即  $x=2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  时, 函数取得最大值 5.

故选: B.

**【点评】** 本题考查三角函数的最值的求法, 注意运用二倍角公式和诱导公式, 同时考查可化为二次函数的最值的求法, 属于中档题.

12. (5分) 已知函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 满足  $f(x) = f(2-x)$ , 若函数  $y = |x^2 - 2x - 3|$  与  $y = f(x)$

图象的交点为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ , 则  $\sum_{i=1}^m x_i =$  ( )

- A. 0                      B. m                      C. 2m                      D. 4m

**【考点】** &2: 带绝对值的函数; &T: 函数迭代; 3V: 二次函数的性质与图象.

**【专题】** 35: 转化思想; 4R: 转化法; 51: 函数的性质及应用.

**【分析】** 根据已知中函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 满足  $f(x) = f(2-x)$ , 分析函数的对称性, 可得函数  $y = |x^2 - 2x - 3|$  与  $y = f(x)$  图象的交点关于直线  $x=1$  对称, 进而得到答案.

**【解答】**解:  $\because$  函数  $f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 满足  $f(x) = f(2-x)$ ,  
故函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称,  
函数  $y = |x^2 - 2x - 3|$  的图象也关于直线  $x=1$  对称,  
故函数  $y = |x^2 - 2x - 3|$  与  $y = f(x)$  图象的交点也关于直线  $x=1$  对称,

$$\text{故} \sum_{i=1}^m x_i = \frac{m}{2} \times 2 = m,$$

故选：B.

**【点评】** 本题考查的知识点是二次函数的图象和性质，函数的对称性质，难度中档.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分.

13. (5分) 已知向量  $\vec{a} = (m, 4)$ ， $\vec{b} = (3, -2)$ ，且  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则  $m = \underline{-6}$ .

**【考点】** 9K：平面向量共线（平行）的坐标表示.

**【专题】** 11：计算题；29：规律型；5A：平面向量及应用.

**【分析】** 直接利用向量共线的充要条件列出方程求解即可.

**【解答】** 解：向量  $\vec{a} = (m, 4)$ ， $\vec{b} = (3, -2)$ ，且  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，

可得  $12 = -2m$ ，解得  $m = -6$ .

故答案为：-6.

**【点评】** 本题考查向量共线的充要条件的应用，考查计算能力.

14. (5分) 若  $x, y$  满足约束条件 
$$\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases}$$
，则  $z = x - 2y$  的最小值为  $\underline{-5}$ .

**【考点】** 7C：简单线性规划.

**【专题】** 11：计算题；29：规律型；31：数形结合；59：不等式的解法及应用；5T：不等式.

**【分析】** 由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，联立方程组求得最优解的坐标，把最优解的坐标代入目标函数得答案.

**【解答】** 解：由约束条件 
$$\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases}$$
 作出可行域如图，

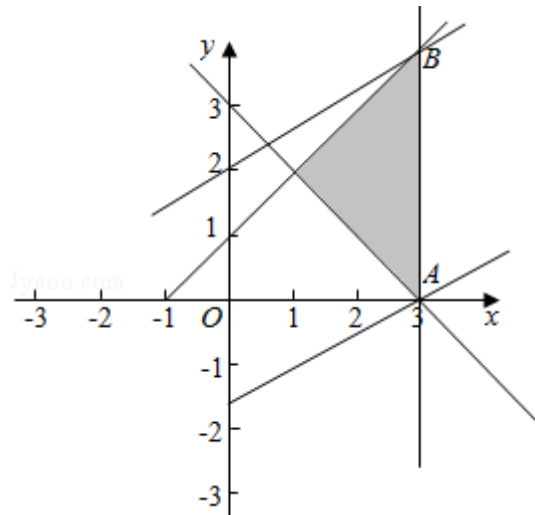
联立  $\begin{cases} x=3 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ , 解得  $B(3, 4)$ .

化目标函数  $z=x-2y$  为  $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$ ,

由图可知, 当直线  $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$  过  $B(3, 4)$  时, 直线在  $y$  轴上的截距最大,  $z$  有最

小值为:  $3-2\times 4=-5$ .

故答案为:  $-5$ .



**【点评】** 本题考查简单的线性规划, 考查了数形结合的解题思想方法, 是中档题.

15. (5分)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\cos A = \frac{4}{5}$ ,  $\cos C = \frac{5}{13}$ ,  $a=1$ , 则  $b = \frac{21}{13}$ .

**【考点】** HU: 解三角形.

**【专题】** 34: 方程思想; 48: 分析法; 56: 三角函数的求值; 58: 解三角形.

**【分析】** 运用同角的平方关系可得  $\sin A, \sin C$ , 再由诱导公式和两角和的正弦公式, 可得  $\sin B$ , 运用正弦定理可得  $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ , 代入计算即可得到所求值.

**【解答】** 解: 由  $\cos A = \frac{4}{5}$ ,  $\cos C = \frac{5}{13}$ , 可得

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13},$$

$$\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{63}{65},$$

由正弦定理可得  $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$

$$= \frac{1 \times \frac{63}{65}}{\frac{3}{5}} = \frac{21}{13}.$$

故答案为:  $\frac{21}{13}$ .

**【点评】** 本题考查正弦定理的运用, 同时考查两角和的正弦公式和诱导公式, 以及同角的平方关系的运用, 考查运算能力, 属于中档题.

16. (5分) 有三张卡片, 分别写有1和2, 1和3, 2和3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是5”, 则甲的卡片上的数字是 1和3.

**【考点】** F4: 进行简单的合情推理.

**【专题】** 2A: 探究型; 49: 综合法; 5L: 简易逻辑.

**【分析】** 可先根据丙的说法推出丙的卡片上写着1和2, 或1和3, 分别讨论这两种情况, 根据甲和乙的说法可分别推出甲和乙卡片上的数字, 这样便可判断出甲卡片上的数字是多少.

**【解答】** 解: 根据丙的说法知, 丙的卡片上写着1和2, 或1和3;

(1) 若丙的卡片上写着1和2, 根据乙的说法知, 乙的卡片上写着2和3;

∴根据甲的说法知, 甲的卡片上写着1和3;

(2) 若丙的卡片上写着1和3, 根据乙的说法知, 乙的卡片上写着2和3;

又甲说, “我与乙的卡片上相同的数字不是2”;

∴甲的卡片上写的数字不是1和2, 这与已知矛盾;

∴甲的卡片上的数字是1和3.

故答案为: 1和3.

**【点评】** 考查进行简单的合情推理的能力, 以及分类讨论得到解题思想, 做这类题注意找出解题的突破口.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12分) 等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3+a_4=4$ ,  $a_5+a_7=6$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n=[a_n]$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前10项和, 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 如  $[0.9]=0$ ,  $[2.6]=2$ .

**【考点】** 83: 等差数列的性质; 84: 等差数列的通项公式.

**【专题】** 11: 计算题; 35: 转化思想; 4R: 转化法; 54: 等差数列与等比数列

**【分析】** (I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 根据已知构造关于首项和公差方程组, 解得答案;

(II) 根据  $b_n=[a_n]$ , 列出数列  $\{b_n\}$  的前10项, 相加可得答案.

**【解答】** 解: (I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,

$$\because a_3+a_4=4, a_5+a_7=6.$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1+5d=4 \\ 2a_1+10d=6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a_1=1 \\ d=\frac{2}{5} \end{cases},$$

$$\therefore a_n=\frac{2}{5}n+\frac{3}{5};$$

$$(II) \because b_n=[a_n],$$

$$\therefore b_1=b_2=b_3=1,$$

$$b_4=b_5=2,$$

$$b_6=b_7=b_8=3,$$

$$b_9=b_{10}=4.$$

故数列  $\{b_n\}$  的前10项和  $S_{10}=3 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 = 24$ .

**【点评】** 本题考查的知识点是等差数列的通项公式, 等差数列的性质, 难度中档.

18. (12分) 某险种的基本保费为 $a$  (单位: 元), 继续购买该险种的投保人称为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geq 5$
保费	$0.85a$	$a$	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的200名续保人在一年内的出险情况, 得到如下统计表:

出险次数	0	1	2	3	4	$\geq 5$
频数	60	50	30	30	20	10

- (I) 记A为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费”. 求 $P(A)$ 的估计值;
- (II) 记B为事件: “一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的160%”. 求 $P(B)$ 的估计值;
- (III) 求续保人本年度的平均保费估计值.

**【考点】** B2: 简单随机抽样.

**【专题】** 11: 计算题; 29: 规律型; 5I: 概率与统计.

**【分析】** (I) 求出A为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费”的人数. 总事件人数, 即可求 $P(A)$ 的估计值;

(II) 求出B为事件: “一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的160%”的人数. 然后求 $P(B)$ 的估计值;

(III) 利用人数与保费乘积的和除以总续保人数, 可得本年度的平均保费估计值.

**【解答】** 解: (I) 记A为事件: “一续保人本年度的保费不高于基本保费”. 事件A的人数为:  $60+50=110$ , 该险种的200名续保,

$$P(A) \text{ 的估计值为: } \frac{110}{200} = \frac{11}{20};$$

(II) 记B为事件: “一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的160%”. 事件B的人数为:  $30+30=60$ ,  $P(B)$ 的估计值为:  $\frac{60}{200} = \frac{3}{10}$ ;

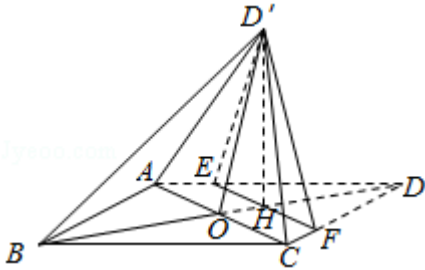
(III) 续保人本年度的平均保费估计值为  $\bar{x} = \frac{0.85a \times 60 + a \times 50 + 1.25a \times 30 + 1.5a \times 30 + 1.75a \times 20 + 2a \times 10}{200} = 1.1925a$ .

**【点评】** 本题考查样本估计总体的实际应用，考查计算能力.

19. (12分) 如图，菱形ABCD的对角线AC与BD交于点O，点E、F分别在AD，CD上，AE=CF，EF交BD于点H，将 $\triangle DEF$ 沿EF折到 $\triangle D'EF$ 的位置.

(I) 证明： $AC \perp HD'$ ；

(II) 若 $AB=5$ ， $AC=6$ ， $AE=\frac{5}{4}$ ， $OD'=2\sqrt{2}$ ，求五棱锥 $D'-ABCFE$ 体积.



**【考点】** LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积；LO: 空间中直线与直线之间的位置关系.

**【专题】** 31: 数形结合；35: 转化思想；5F: 空间位置关系与距离；5Q: 立体几何.

**【分析】** (1) 根据直线平行的性质以菱形对角线垂直的性质进行证明即可.

(2) 根据条件求出底面五边形的面积，结合平行线段的性质证明 $OD'$ 是五棱锥 $D'-ABCFE$ 的高，即可得到结论.

**【解答】** (I) 证明： $\because$ 菱形ABCD的对角线AC与BD交于点O，点E、F分别在AD，CD上， $AE=CF$ ，

$\therefore EF \parallel AC$ ，且 $EF \perp BD$

将 $\triangle DEF$ 沿EF折到 $\triangle D'EF$ 的位置，

则 $D'H \perp EF$ ，

$\therefore EF \parallel AC$ ，

$\therefore AC \perp HD'$ ；

(II) 若 $AB=5$ ， $AC=6$ ，则 $AO=3$ ， $BO=OD=4$ ，

$\therefore AE=\frac{5}{4}$ ， $AD=AB=5$ ，

$\therefore DE=5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$ ，

∵EF∥AC,

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{EH}{AO} = \frac{DH}{OD} = \frac{\frac{15}{4}}{5} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EH = \frac{9}{4}, EF = 2EH = \frac{9}{2}, DH = 3, OH = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore HD' = DH = 3, OD' = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{满足 } HD'^2 = OD'^2 + OH^2,$$

则△OHD'为直角三角形, 且OD'⊥OH,

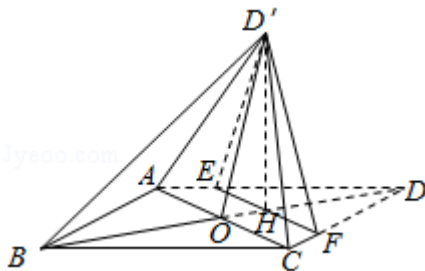
又OD'⊥AC, AC∩OH=O,

即OD'⊥底面ABCD,

即OD'是五棱锥D' - ABCFE的高.

$$\text{底面五边形的面积 } S = \frac{1}{2} \times AC \cdot OB + \frac{(EF+AC) \cdot OH}{2} - \frac{1}{2} \times 6 \times 4 + \frac{(\frac{9}{2}+6) \times 1}{2} = 12 + \frac{21}{4} - \frac{69}{4}$$

$$\text{则五棱锥 } D' - ABCFE \text{ 体积 } V = \frac{1}{3} S \cdot OD' = \frac{1}{3} \times \frac{69}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{23\sqrt{2}}{2}.$$



**【点评】** 本题主要考查空间直线和平面的位置关系的判断, 以及空间几何体的体积, 根据线面垂直的判定定理以及五棱锥的体积公式是解决本题的关键. 本题的难点在于证明OD'是五棱锥D' - ABCFE的高. 考查学生的运算和推理能力.

20. (12分) 已知函数  $f(x) = (x+1) \ln x - a(x-1)$ .

(I) 当  $a=4$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 若当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) > 0$ , 求  $a$  的取值范围.

**【考点】** 66: 简单复合函数的导数.

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；52：导数的概念及应用.

【分析】(I) 当 $a=4$ 时，求出曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率，

即可求出切线方程；

(II) 先求出 $f'(x) > f'(1) = 2 - a$ ，再结合条件，分类讨论，即可求 $a$ 的取值范围.

【解答】解：(I) 当 $a=4$ 时， $f(x) = (x+1)\ln x - 4(x-1)$ .

$f(1) = 0$ ，即点为 $(1, 0)$ ，

函数的导数 $f'(x) = \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} - 4$ ，

则 $f'(1) = \ln 1 + 2 - 4 = 2 - 4 = -2$ ，

即函数的切线斜率 $k = f'(1) = -2$ ，

则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y = -2(x-1) = -2x+2$ ；

(II)  $\because f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$ ，

$\therefore f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x - a$ ，

$\therefore f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$ ，

$\because x > 1$ ， $\therefore f''(x) > 0$ ，

$\therefore f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f'(x) > f'(1) = 2 - a$ .

①  $a \leq 2$ ， $f'(x) > f'(1) \geq 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x) > f(1) = 0$ ，满足题意；

②  $a > 2$ ，存在 $x_0 \in (1, +\infty)$ ， $f'(x_0) = 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增，

由 $f(1) = 0$ ，可得存在 $x_0 \in (1, +\infty)$ ， $f(x_0) < 0$ ，不合题意.

综上所述， $a \leq 2$ .

另解：若当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f(x) > 0$ ，

可得 $(x+1)\ln x - a(x-1) > 0$ ，

即为 $a < \frac{(x+1)\ln x}{x-1}$ ，

由  $y = \frac{(x+1)\ln x}{x-1}$  的导数为  $y' = \frac{x - \frac{1}{x} - 2\ln x}{(x-1)^2}$ ,

由  $y = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$  的导数为  $y' = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$ ,

函数  $y$  在  $x > 1$  递增, 可得  $\frac{x - \frac{1}{x} - 2\ln x}{(x-1)^2} > 0$ ,

则函数  $y = \frac{(x+1)\ln x}{x-1}$  在  $x > 1$  递增,

则  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 + \frac{1}{x}}{1} = 2$ ,

可得  $\frac{(x+1)\ln x}{x-1} > 2$  恒成立,

即有  $a \leq 2$ .

**【点评】** 本题主要考查了导数的应用, 函数的导数与函数的单调性的关系的应用, 导数的几何意义, 考查参数范围的求解, 考查学生分析解决问题的能力, 有难度.

21. (12分) 已知  $A$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左顶点, 斜率为  $k$  ( $k > 0$ ) 的直线交  $E$

于  $A, M$  两点, 点  $N$  在  $E$  上,  $MA \perp NA$ .

(I) 当  $|AM| = |AN|$  时, 求  $\triangle AMN$  的面积

(II) 当  $2|AM| = |AN|$  时, 证明:  $\sqrt{3} < k < 2$ .

**【考点】** KH: 直线与圆锥曲线的综合.

**【专题】** 33: 函数思想; 49: 综合法; 4M: 构造法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** (I) 依题意知椭圆  $E$  的左顶点  $A(-2, 0)$ , 由  $|AM| = |AN|$ , 且  $MA \perp NA$ , 可知  $\triangle AMN$  为等腰直角三角形, 设  $M(a-2, a)$ , 利用点  $M$  在  $E$  上, 可得  $3(a-2)^2 + 4a^2 = 12$ , 解得:  $a = \frac{12}{7}$ , 从而可求  $\triangle AMN$  的面积;

(II) 设直线  $l_{AM}$  的方程为:  $y = k(x+2)$ , 直线  $l_{AN}$  的方程为:  $y = -\frac{1}{k}(x+2)$ , 联

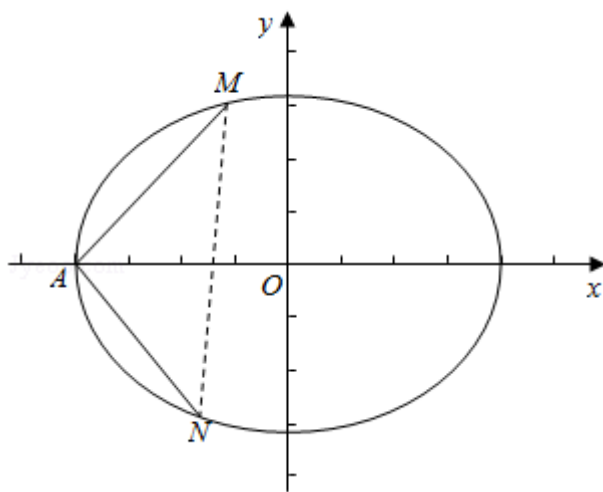
$$\text{立} \begin{cases} y=k(x+2) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \text{ 消去} y, \text{ 得 } (3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0, \text{ 利用韦达定理及}$$

$$\text{弦长公式可分别求得 } |AM|=\sqrt{1+k^2}|x_M-(-2)|=\frac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}, \quad |AN|=\frac{12\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}}{3+4(\frac{1}{k})^2}=\frac{12k\sqrt{1+k^2}}{3k^2+4},$$

结合  $2|AM|=|AN|$ , 可得  $\frac{2}{3+4k^2}=\frac{k}{3k^2+4}$ , 整理后, 构造函数  $f(k)=4k^3-6k^2+3k-8$ , 利用导数法可判断其单调性, 再结合零点存在定理即可证得结论成立.

**【解答】** 解: (I) 由椭圆 E 的方程:  $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$  知, 其左顶点 A (-2, 0),

$\because |AM|=|AN|$ , 且  $MA \perp NA$ ,  $\therefore \triangle AMN$  为等腰直角三角形,



$\therefore MN \perp x$  轴, 设 M 的纵坐标为 a, 则 M (a - 2, a),

$\because$  点 M 在 E 上,  $\therefore 3(a-2)^2+4a^2=12$ , 整理得:  $7a^2-12a=0$ ,  $\therefore a=\frac{12}{7}$  或  $a=0$  (舍)

$$\therefore S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}a \times 2a=a^2=\frac{144}{49};$$

(II) 设直线  $l_{AM}$  的方程为:  $y=k(x+2)$ , 直线  $l_{AN}$  的方程为:  $y=-\frac{1}{k}(x+2)$ , 由

$$\begin{cases} y=k(x+2) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \text{ 消去} y \text{ 得: } (3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0, \therefore x_M-2=-\frac{16k^2}{3+4k^2}$$

$$\therefore x_M = 2 - \frac{16k^2}{3+4k^2} = \frac{6-8k^2}{3+4k^2},$$

$$\therefore |AM| = \sqrt{1+k^2} |x_M - (-2)| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{6-8k^2+6+8k^2}{3+4k^2} = \frac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$$

$\therefore k > 0$ ,

$$\therefore |AN| = \frac{12\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}}{3+4(\frac{1}{k})^2} = \frac{12k\sqrt{1+k^2}}{3k^2+4},$$

$$\text{又} \because |AM| = |AN|, \therefore \frac{2}{3+4k^2} = \frac{k}{3k^2+4},$$

整理得:  $4k^3 - 6k^2 + 3k - 8 = 0$ ,

设  $f(k) = 4k^3 - 6k^2 + 3k - 8$ ,

则  $f'(k) = 12k^2 - 12k + 3 = 3(2k - 1)^2 \geq 0$ ,

$\therefore f(k) = 4k^3 - 6k^2 + 3k - 8$  为  $(0, +\infty)$  的增函数,

又  $f(\sqrt{3}) = 4 \times 3\sqrt{3} - 6 \times 3 + 3\sqrt{3} - 8 = 15\sqrt{3} - 26 = \sqrt{675} - \sqrt{676} < 0$ ,  $f(2) = 4 \times 8 - 6 \times 4 + 3 \times 2 - 8 = 6 > 0$ ,

$\therefore \sqrt{3} < k < 2$ .

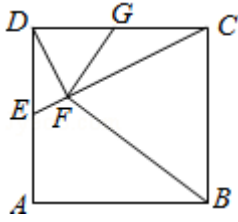
**【点评】** 本题考查直线与圆锥曲线的综合问题, 常用的方法就是联立方程求出交点的横坐标或者纵坐标的关系, 通过这两个关系的变形去求解, 考查构造函数思想与导数法判断函数单调性, 再结合零点存在定理确定参数范围, 是难题.

请考生在第22~24题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.[选修4-1: 几何证明选讲]

22. (10分) 如图, 在正方形ABCD中, E, G分别在边DA, DC上(不与端点重合), 且DE=DG, 过D点作DF⊥CE, 垂足为F.

(I) 证明: B, C, G, F四点共圆;

(II) 若AB=1, E为DA的中点, 求四边形BCGF的面积.



**【考点】** N8: 圆内接多边形的性质与判定.

**【专题】** 14: 证明题.

**【分析】** (I) 证明B, C, G, F四点共圆可证明四边形BCGF对角互补, 由已知条件可知 $\angle BCD=90^\circ$ , 因此问题可转化为证明 $\angle GFB=90^\circ$ ;

(II) 在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中,  $GF=\frac{1}{2}CD=GC$ , 因此可得 $\triangle GFB\cong\triangle GCB$ , 则 $S_{\text{四边形BCGF}}=2S_{\triangle BCG}$ , 据此解答.

**【解答】** (I) 证明:  $\because DF\perp CE$ ,

$$\therefore \text{Rt}\triangle DFC\sim\text{Rt}\triangle EDC,$$

$$\therefore \frac{DF}{ED}=\frac{CF}{CD},$$

$$\because DE=DG, CD=BC,$$

$$\therefore \frac{DF}{DG}=\frac{CF}{BC},$$

$$\text{又}\because\angle GDF=\angle DEF=\angle BCF,$$

$$\therefore\triangle GDF\sim\triangle BCF,$$

$$\therefore\angle CFB=\angle DFG,$$

$$\therefore\angle GFB=\angle GFC+\angle CFB=\angle GFC+\angle DFG=\angle DFC=90^\circ,$$

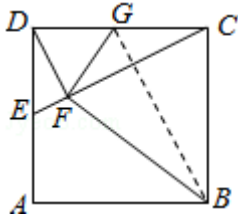
$$\therefore\angle GFB+\angle GCB=180^\circ,$$

$\therefore$ B, C, G, F四点共圆.

$$(II) \because E\text{为}AD\text{中点}, AB=1, \therefore DG=CG=DE=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\text{在}\text{Rt}\triangle DFC\text{中}, GF=\frac{1}{2}CD=GC, \text{连接}GB, \text{Rt}\triangle BCG\cong\text{Rt}\triangle BFG,$$

$$\therefore S_{\text{四边形BCGF}}=2S_{\triangle BCG}=2\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$



**【点评】** 本题考查四点共圆的判断，主要根据对角互补进行判断，注意三角形相似和全等性质的应用。

**[选项4-4: 坐标系与参数方程]**

23. 在直角坐标系 $xOy$ 中，圆 $C$ 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$ .

(I) 以坐标原点为极点， $x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 $C$ 的极坐标方程；

(II) 直线 $l$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$  ( $t$ 为参数)， $l$ 与 $C$ 交于 $A, B$ 两点， $|AB|=\sqrt{10}$ ，求 $l$ 的斜率.

**【考点】** J1: 圆的标准方程；J8: 直线与圆相交的性质.

**【专题】** 11: 计算题；35: 转化思想；49: 综合法；5B: 直线与圆.

**【分析】** (I) 把圆 $C$ 的标准方程化为一般方程，由此利用 $\rho^2=x^2+y^2$ ， $x=\rho\cos\alpha$ ， $y=\rho\sin\alpha$ ，能求出圆 $C$ 的极坐标方程.

(II) 由直线 $l$ 的参数方程求出直线 $l$ 的一般方程，再求出圆心到直线距离，由此能求出直线 $l$ 的斜率.

**【解答】** 解：(I)  $\because$ 圆 $C$ 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$ ,

$$\therefore x^2+y^2+12x+11=0,$$

$$\because \rho^2=x^2+y^2, x=\rho\cos\alpha, y=\rho\sin\alpha,$$

$$\therefore C \text{的极坐标方程为 } \rho^2+12\rho\cos\alpha+11=0.$$

(II)  $\because$ 直线 $l$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$  ( $t$ 为参数),

$$\therefore t=\frac{x}{\cos\alpha}, \text{ 代入 } y=t\sin\alpha, \text{ 得: 直线 } l \text{ 的一般方程 } y=\tan\alpha \cdot x,$$

$l$ 与 $C$ 交于 $A, B$ 两点， $|AB|=\sqrt{10}$ ，圆 $C$ 的圆心 $C(-6, 0)$ ，半径 $r=5$ ,

$$\text{圆心到直线的距离 } d=\sqrt{r^2-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}.$$

$$\therefore \text{圆心} C(-6, 0) \text{ 到直线距离 } d = \frac{|-6 \tan \alpha|}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{25 - \frac{10}{4}},$$

$$\text{解得 } \tan^2 \alpha = \frac{5}{3}, \therefore \tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

$$\therefore l \text{ 的斜率 } k = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

**【点评】** 本题考查圆的极坐标方程的求法，考查直线的斜率的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意点到直线公式、圆的性质的合理运用。

### [选修4-5: 不等式选讲]

24. 已知函数  $f(x) = |x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{1}{2}|$ ,  $M$  为不等式  $f(x) < 2$  的解集.

(I) 求  $M$ ;

(II) 证明: 当  $a, b \in M$  时,  $|a+b| < |1+ab|$ .

**【考点】** R5: 绝对值不等式的解法.

**【专题】** 32: 分类讨论; 35: 转化思想; 4C: 分类法; 4R: 转化法; 59: 不等式的解法及应用.

**【分析】** (I) 分当  $x < -\frac{1}{2}$  时, 当  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$  时, 当  $x > \frac{1}{2}$  时三种情况, 分别求解不等式, 综合可得答案;

(II) 当  $a, b \in M$  时,  $(a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0$ , 即  $a^2 b^2 + 1 > a^2 + b^2$ , 配方后, 可证得结论.

**【解答】** 解: (I) 当  $x < -\frac{1}{2}$  时, 不等式  $f(x) < 2$  可化为:  $\frac{1}{2} - x - x - \frac{1}{2} < 2$ ,

解得:  $x > -1$ ,

$$\therefore -1 < x < -\frac{1}{2},$$

当  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$  时, 不等式  $f(x) < 2$  可化为:  $\frac{1}{2} - x + x + \frac{1}{2} = 1 < 2$ ,

此时不等式恒成立,

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2},$$

当  $x > \frac{1}{2}$  时, 不等式  $f(x) < 2$  可化为:  $-\frac{1}{2} + x + x + \frac{1}{2} < 2$ ,

解得：  $x < 1$ ，

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 1,$$

综上所述可得：  $M = (-1, 1)$ ；

证明：（Ⅱ）当  $a, b \in M$  时，

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0,$$

$$\text{即 } a^2b^2 + 1 > a^2 + b^2,$$

$$\text{即 } a^2b^2 + 1 + 2ab > a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$\text{即 } (ab+1)^2 > (a+b)^2,$$

$$\text{即 } |a+b| < |1+ab|.$$

**【点评】** 本题考查的知识点是绝对值不等式的解法，不等式的证明，难度中档