2014年陕西高考数学试题（理）

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $M=\{x|x\geq 0,x\in R\},N=\{x|x^2<1,x\in R\}$，则 $M\bigcap N=$（　　）

$A.[0,1]$　　　$B.[0,1)$　　　$C.(0,1]$　　　$D.(0,1)$

【答案】B

【解析】

试题分析：由 $M=\{x|x\geq 0,x\in R\}=[0,+\infty)$，$N=\{x|x^2<1,x\in R\}=(-1,1)$，所以 $M\bigcap N=[0,1)$，故选 B.

考点：集合间的运算.

2.函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的最小正周期是（　　）

$A.\dfrac{\pi}{2}$　　　$B.\pi$　　　$C.2\pi$　　　$D.4\pi$

【答案】B

【解析】

试题分析：由周期公式 $T=\dfrac{2\pi}{w}$，又 $w=2$，所以函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故选 B.

考点：三角函数的最小正周期.

3.定积分 $\int_0^1(2x+e^x)dx$ 的值为（　　）

$A.e+2$　　　$B.e+1$　　　$C.e$　　　$D.e-1$

【答案】C

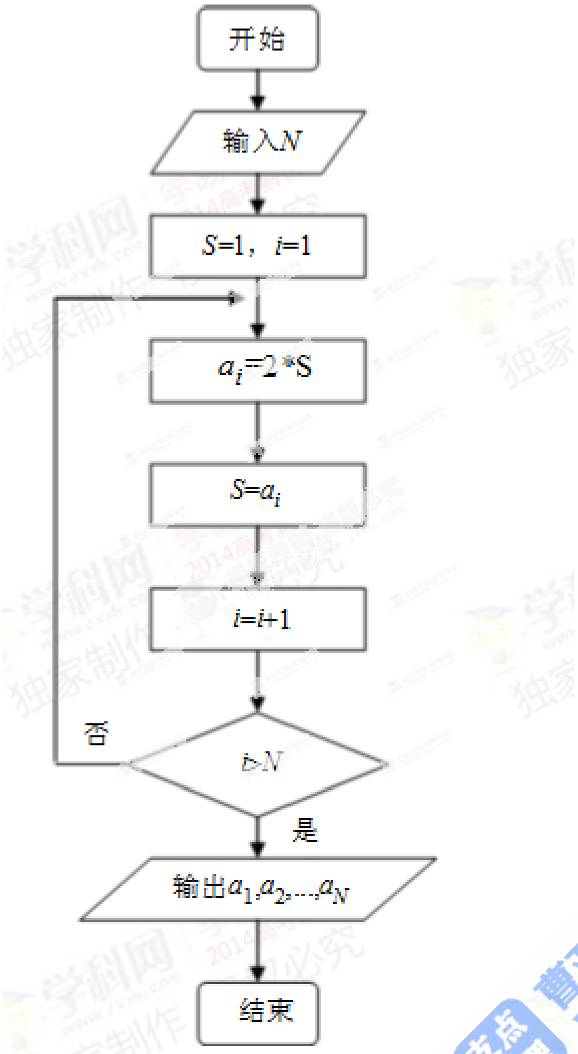
【解析】

试题分析：$\int_0^1(2x+e^x)dx=(x^2+e^x)|_0^1=(1^2+e^1)-(0^2+e^0)=e$，故选 C.

考点：定积分.

4.根据右边框图，对大于 2 的整数 N，得出数列的通项公式是（　　）

$A.a_n=2n$　　　$B.a_n=2(n-1)$　　　$C.a_n=2^n$　　　$D.a_n=2^{n-1}$



【答案】C

【解析】

试题分析：当 $S=1,i=1$时，$a_1=2\times1=2^1$；当 $S=2^1,i=2$时，$a_2=2\times2^1=2^2$；当 $S=2^2,i=3$时，$a_3=2\times2^2=2^3$；… 由此得出数列学科网的通项公式为 $a_n=2^n$，故选 C

考点：程序框图的识别.

5.已知底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上，则该球的体积为（　　）

$A.\dfrac{32\pi}{3}$　　$B.4\pi$　　$C.2\pi$　　$D.\dfrac{4\pi}{3}$

【答案】D

【解析】

试题分析：根据正四棱柱的几何特征得：该球的直径为正四棱柱的体对角线，故

$2R=\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}=2$，即得 $R=1$，所以该球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^2=\frac{4}{3}\pi 1^2=\frac{4\pi}{3}$，故选 D.

考点：正四棱柱的几何特征；球的体积.

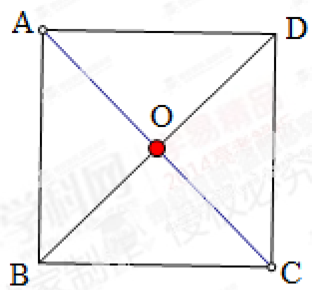
6.从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中，任取 2 个点，则这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率为（　　）

$A.\frac{1}{5}$　　$B.\frac{2}{5}$　　$C.\frac{3}{5}$　　$D.\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】

试题分析：从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中，任取 2 个点，共有 $C_5^2=10$ 条线段，A，B，C，D 四点中任意 2 点的连线段都不小于该正方形边长，共有 $C_4^2=6$，所以这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，故选 C



考点：古典概型及其概率计算公式.

7.下列函数中，满足“$f(x+y)=f(x)f(y)$”的单调递增函数是（　　）

（A）$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$　　（B）$f(x)=x^3$　　（C）$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　（D）$f(x)=3^x$

【答案】D

【解析】

试题分析：

A 选项：由 $f(x+y)=(x+y)^{\frac{1}{2}}$，$f(x)f(y)=x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}=(xy)^{\frac{1}{2}}$，得 $f(x+y)\neq f(x)f(y)$，所以 A 错误；B 选项：由 $f(x+y)=(x+y)^3$，$f(x)f(y)=x^3\cdot y^3=(xy)^3$，得 $f(x+y)\neq f(x)f(y)$，所以 B 错误；C 选项：函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是定义在 R 上减函数，所以 C 错误；D 选项：由 $f(x+y)=3^{x+y}$，

$f\left(x\right)f\left(y\right)=3^x\cdot 3^y=3^{x+y}$，得 $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$；又函数 $f\left(x\right)=3^x$ 是定义在 R 上增函数，所以 D 正确；故选 D.

考点：函数求值；函数的单调性.

8.原命题为"若 z_1,z_2 互为共轭复数，则 $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|$"，关于逆命题，否命题，逆否命题真假性的判断依次如下，正确的是（　　）

（A）真，假，真　　（B）假，假，真　　（C）真，真，假　　（D）假，假，假

【答案】B

【解析】

试题分析：设复数 $z_1=a+bi$，则 $z_2=\overline{z_1}=a-bi$，所以 $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\sqrt{a^2+b^2}$，故原命题为真；逆命题：若 $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|$，则 z_1,z_2 互为共轭复数；如 $z_1=3+4i$，$z_2=4+3i$，且 $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=5$，但此时 z_1,z_2 不互为共轭复，故逆命题为假；否命题：若 z_1,z_2 不互为共轭复数，则 $\left|z_1\right|\neq\left|z_2\right|$；如 $z_1=3+4i$，$z_2=4+3i$，此时 z_1,z_2 不互为共轭复，但 $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=5$，故否命学科网题为假；原命题和逆否命题的真假相同，所以逆否命题为真；故选 B.

考点：命题以及命题的真假.

9.设样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的均值和方差分别为 1 和 4，若 $y_i=x_i+a$（a 为非零常数，　$i=1,2,\cdots,10$），则 $y_1,y_2,\cdots y_{10}$ 的均值和方差分别为（　　）

（A）$1+a,4$　　（B）$1+a,4+a$　　（C）$1,4$　　（D）$1,4+a$

【答案】A

【解析】

试题分析：由题得：$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10\times1=10$；$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_{10}-1)^2=10\times4=40$

$y_1,y_2,\cdots y_{10}$ 的均值和方差分别为：

均值 $\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_{10}}{10}$

$$=\frac{(x_1+a)+(x_2+a)+\cdots+(x_{10}+a)}{10}=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_{10})+10a}{10}=\frac{10+10a}{10}=1+a$$

方差 $=\dfrac{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots+(y_{10}-\overline{y})^2}{10}$

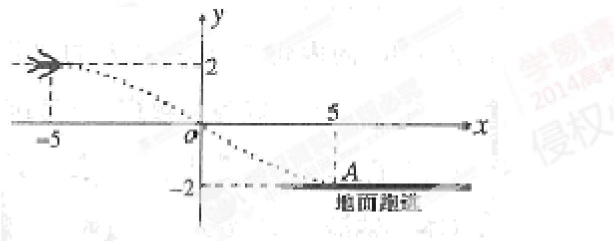
$$=\frac{[(x_1+a)-(1+a)]^2+[(x_2+a)-(1+a)]^2+\cdots+[(x_{10}+a)-(1+a)]^2}{10}$$

$$=\frac{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_{10}-1)^2}{10}=\frac{40}{10}=4$$

故选 A

考点：均值和方差.

10.如图，某飞行器在 4 千米高空水平飞行，从距着陆点 A 的水平距离 10 千米处下降，已知下降飞行轨迹为某三次函数图像的一部分，则函数的解析式为（　　）



（A） $y=\frac{1}{125}x^3-\frac{3}{5}x$　　　（B） $y=\frac{2}{125}x^3-\frac{4}{5}x$

（C） $y=\frac{3}{125}x^3-x$　　　（D） $y=-\frac{3}{125}x^3+\frac{1}{5}x$

【答案】 A

【解析】

试题分析：由题目图像可知：该三次函数过原点，故可设该三次函数为 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx$，则

$y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$，由题得：$f(-5)=2$，$f(5)=-2$，$f'(5)=0$

即 $\begin{cases}-125a+25b-5c=2\\125a+25b+5c=-2\\75a+10b+c=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{125}\\b=0\\c=-\frac{3}{5}\end{cases}$，所以 $y=\frac{1}{125}x^3-\frac{3}{5}x$，故选 A.

考点：函数的解析式.

二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）.

11.已知 $4^a=2, \lg x=a$, 则 $x=$________.

【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】

试题分析：由$4^a=2$得$a=\frac{1}{2}$，所以$\lg x=\frac{1}{2}$，解得$x=\sqrt{10}$，故答案为$\sqrt{10}$.

考点：指数方程；对数方程.

12.若圆C的半径为1，其圆心与点$(1,0)$关于直线$y=x$对称，则圆C的标准方程为______.

【答案】$x^2+(y-1)^2=1$

【解析】

试题分析：因为圆心与点$(1,0)$关于直线$y=x$对称，所以圆心坐标为$(0,1)$，所以圆的标准方程为：

$x^2+(y-1)^2=1$，故答案为$x^2+(y-1)^2=1$

考点：圆的标准方程.

13. 设$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，向量$\vec{a}=(\sin 2\theta，\cos\theta)$，$\vec{b}(\cos\theta，1)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\tan\theta=$______.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

试题分析：因为$\vec{a}//\vec{b}$，所以$\sin 2\theta\times 1-\cos^2\theta=0$，即$\sin 2\theta=\cos^2\theta$，所以$2\sin\theta\cos\theta=\cos^2\theta$，因为$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\theta\neq 0$，所以$2\sin\theta=\cos\theta$，所以$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$，故答案为$\frac{1}{2}$

考点：共线定理；三角恒等变换.

14. 观察分析下表中的数据：

多面体	面数（F）	顶点数（V）	棱数（E）
三棱锥	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12

猜想一般凸多面体中，$F，V，E$所满足的等式是________.

【答案】$F+V-E=2$

【解析】

试题分析：①三棱锥：$F=5,V=6,E=9$，得$F+V-E=5+6-9=2$；②五棱锥：$F=6,V=6,E=10$，得$F+V-E=6+6-10=2$；③立方体：$F=6,V=8,E=12$，得$F+V-E=6+8-12=2$；所以归纳猜想一般凸多面体中，$F，V，E$所满足的等式是：$F+V-E=2$，故答案为$F+V-E=2$

考点：归纳推理.

15.（考生注意：请在下列三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题评分）

$A.$(不等式选做题)设 $a,b,m,n\in R$，且 $a^2+b^2=5,ma+nb=5$，则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为________

【答案】$\sqrt{5}$

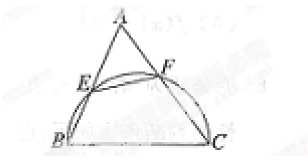
【解析】

试题分析：由柯西不等式得：$(a^2+b^2)(m^2+n^2)\ge(ma+nb)^2$，所以 $5(m^2+n^2)\ge 5^2$，得 $m^2+n^2\ge 5$

所以 $\sqrt{m^2+n^2}\ge\sqrt{5}$，故答案为 $\sqrt{5}$

考点：柯西不等式.

$B.$（几何证明选做题）.如图，ΔABC 中，$BC=6$，以 BC 为直径的半圆分别交 AB,AC 于点 E,F，若 $AC=2AE$,则 $EF=$_______



【答案】3

【解析】

试题分析：由四边形 $BCFE$ 为圆内接四边形 $\Rightarrow\angle AEF=\angle C$，$\angle AFE=\angle B\Rightarrow\Delta AEF\sim\Delta ACB\Rightarrow$

$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1}{2}$，又因为 $BC=6$，所以 $EF=3$，故答案为 3

考点：几何证明；三角形相似.

$C.$（坐标系与参数方程选做题）在极坐标系中，点 $(2,\dfrac{\pi}{6})$ 到直线 $\rho\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})=1$ 的距离是__________

【答案】1

【解析】

试题分析：直线$\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=1$化为直角坐标方程为$\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x-1=0$，点$(2,\frac{\pi}{6})$的直角坐标为$(\sqrt{3},1)$，

点$(\sqrt{3},1)$到直线$\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x-1=0$的距离$d=\frac{|\frac{\sqrt{3}}{2}\times1-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}-1=0|}{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=1$，故答案为 1.

考点：极坐标方程；点到直线距离.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤（本大题共 6 小题，共 75 分）

16. （本小题满分 12 分）

ΔABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c.

（1）若a，b，c成等差数列，证明：$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$；

（2）若a，b，c成等比数列，求$\cos B$ 的最小值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{1}{2}$.

【解析】

试题分析：（1）因为 a，b，c 成等差数列，所以 $a+c=2b$，再由三角形正弦定理得 $\sin A+\sin C=2\sin B$，又在 ΔABC 中，有 $B=\pi-(A+B)$，所以 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$，最后得：$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$，即得证；

（2）因为 a，b，c 成等比数列，所以 $b^2=2ac$，由余弦学科网定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}$ $=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}$，根据基本不等式 $a^2+c^2\geq 2ac$（当且仅当 $a=c$ 时等号成立）得 $\frac{a^2+c^2}{2ac}\geq 1$（当且仅当 $a=c$ 时等号成立），即得 $\cos B=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$，所以 $\cos B$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

试题解析：（1）$\because a$，b，c 成等差数列

$\therefore a+c=2b$

由正弦定理得 $\sin A+\sin C=2\sin B$

$\because \sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$

$\therefore \sin A+\sin C=2\sin(A+C)$

（2）$\because a$，b，c 成等比数列

$\therefore b^2=2ac$

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}$

$\because a^2+c^2\geq 2ac$（当且仅当 $a=c$ 时等号成立）

$\therefore \dfrac{a^2+c^2}{2ac}\geq 1$（当且仅当 $a=c$ 时等号成立）

$\therefore \dfrac{a^2+c^2}{2ac}-\dfrac{1}{2}\geq 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$（当且仅当 $a=c$ 时等号成立）

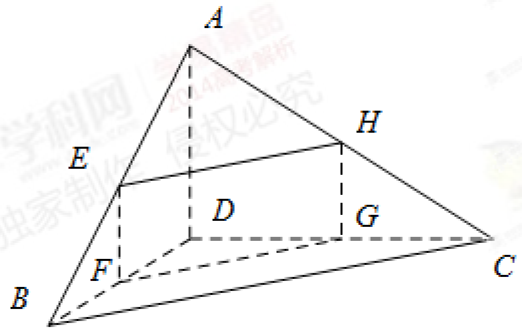
即 $\cos B\geq \dfrac{1}{2}$

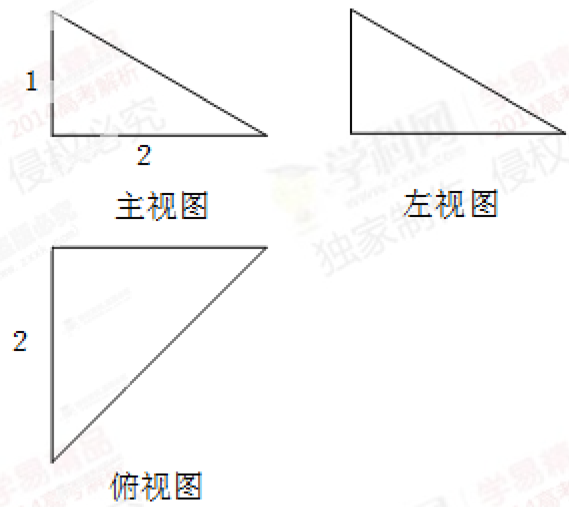
所以 $\cos B$ 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$

考点：正弦定理；余弦定理；基本不等式.

17. （本小题满分 12 分）

四面体 $ABCD$ 及其三视图如图所示，过棱 AB 的中点 E 作平行于 AD， BC 的平面分别交四面体的棱 BD，DC，CA 于点 F，G，H.





（1）证明：四边形 $EFGH$ 是矩形；

（2）求直线 AB 与平面 $EFGH$ 夹角 θ 的正弦值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】

试题分析：（1）由该四面体的三视图可知： $BD\perp DC,BD\perp AD,AD\perp DC$， $BD=DC=2,AD=1$

由题设， BC // 面 $EFGH$ ，面 $EFGH\bigcap$ 面 $BDC=FG$ ，面 $EFGH\bigcap$ 面 $ABC=EH$ ，所以 BC // FG ，

$BC \parallel EH$，所以 $FG \parallel EH$，同理可得 $EF \parallel HG$，即得四边形 $EFGH$ 是平行四边形，同时可证 $EF \perp FG$，即证四边形 $EFGH$ 是矩形；

（2）以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$， $A(0,0,1)$， $B(2,0,0)$， $C(0,2,0)$

$\overrightarrow{DA}=(0,0,1)$， $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，设平面 $EFGH$ 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$ 因为 $BC \parallel FG$，$EF \parallel AD$，所以 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，列出方程组，即学科网可得到平面 $EFGH$ 的一个法向量 $\vec{n}$，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角的余弦值的绝对值即为所求.

试题解析：（1）由该四面体的三视图可知：

$BD \perp DC, BD \perp AD, AD \perp DC$， $BD=DC=2, AD=1$

由题设，$BC \parallel$ 面 $EFGH$

面 $EFGH \cap$ 面 $BDC=FG$

面 $EFGH \cap$ 面 $ABC=EH$

$\therefore BC \parallel FG$， $BC \parallel EH$，　$\therefore FG \parallel EH$.

同理 $EF \parallel AD$， $HG \parallel AD$，　$\therefore EF \parallel HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

又 $\because BD \perp AD, AD \perp DC, BD \cap DC=D$

$\therefore AD \perp$ 平面 BDC

$\therefore AD \perp BC$

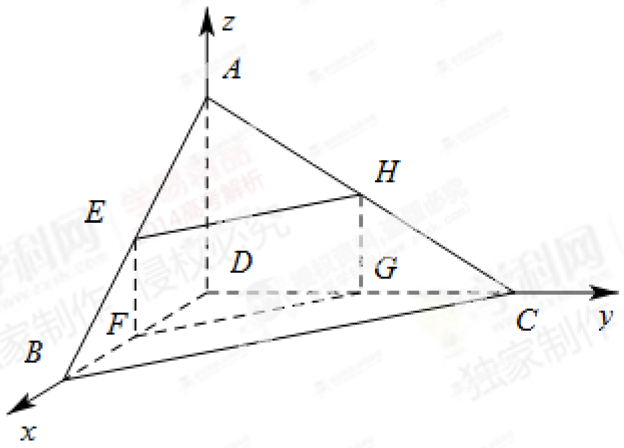
$\because BC \parallel FG$，$EF \parallel AD$

$\therefore EF \perp FG$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形

（2）如图，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$， $A(0,0,1)$， $B(2,0,0)$， $C(0,2,0)$

$\overrightarrow{DA}=(0,0,1)$， $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$



设平面 $EFGH$ 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\because BC\ //\ FG$，$EF\ //\ AD$

$\therefore \vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0, \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

即得 $\begin{cases} z=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,1,0)$

$$\therefore \sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BA},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

考点：面面平行的性质；线面角的求法.

18.（本小题满分 12 分）

在直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1,1),B(2,3),C(3,2)$，点 $P(x,y)$ 在 ΔABC 三边围成的区域（含边界）上

（1）若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，求 $\left|\overrightarrow{OP}\right|$；

（2）设 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in R)$，用 x,y 表示 $m-n$，并求 $m-n$ 的最大值.

【答案】（1） $2\sqrt{2}$；（2） $m-n=y-x$，1.

【解析】

试题分析：（1）因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，所以 $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$，即得

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(2,2)$，最后求得 $|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$；

（2）因为 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，所以 $(x,y)=(m+2n,2m+n)$，即 $\begin{cases} x=m+2n \\ y=2m+n \end{cases}$，两式相减得：$m-n=y-x$

令 $y-x=t$，点 $P(x,y)$ 在 ΔABC 三边围成的区域（含边界）上，当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2,3)$ 时，t 取得最大值 1，故 $m-n$ 的最大值为 1.

试题解析：（1）因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

所以 $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$

即得 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(2,2)$

所以 $|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$

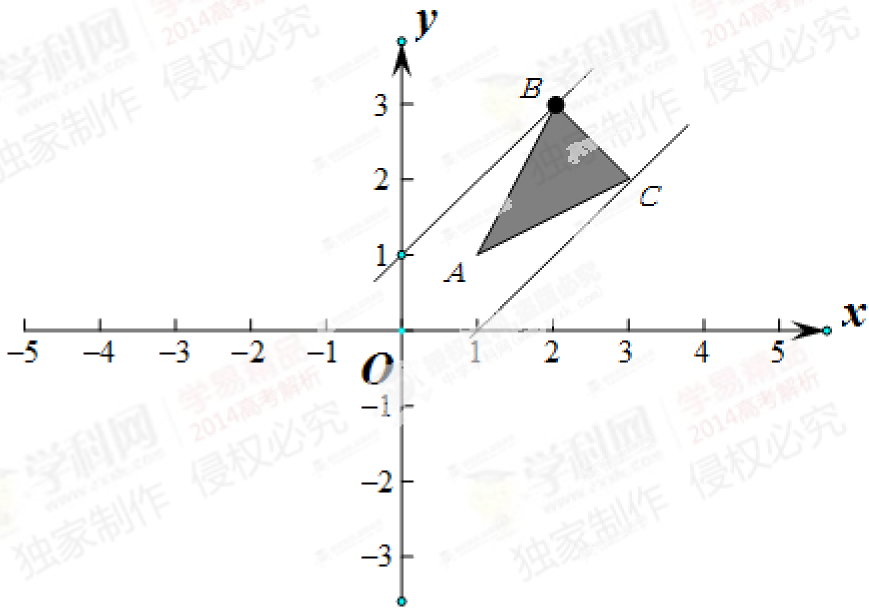
（2）$\because \overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

$\therefore (x,y)=(m+2n,2m+n)$

即 $\begin{cases} x=m+2n \\ y=2m+n \end{cases}$

两式相减得：$m-n=y-x$

令 $y-x=t$，由图可知，当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2,3)$ 时，t 取得最大值 1，故 $m-n$ 的最大值为 1.



考点：平面向量的线性运算；线性规划.

19.（本小题满分 12 分）

在一块耕地上种植一种作物，每季种植成本为 1000 元，此作物的市场价格和这块地上的产量均具有随机性，且互不影响，其具体情况如下表：

作物产量（kg）	300	500
概率	0.5	0.5

作物市场价格（元/kg）	6	10
概率	0.4	0.6

（1）设 X 表示在这块地上种植 1 季此作物的利润，求 X 的分布列；

（2）若在这块地上连续 3 季种植此作物，求这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率.

【答案】（1）分布列见解析；（2）0.896.

【解析】

试题分析：（1）设 A 表示事件"作物产量为 $300\,kg$"，B 表示事件"作物市场价格为 6 元$/kg$"

由题设得 4000，2000，800，结合概率公式计算出对应的概率，得出分布列；

（2）设 C_i 表示事件"第 i 季利润不少于 2000 元" $(i=1,2,3)$，由题意知：C_1,C_2,C_3 相互独立，由（1）知

$P(C_i)=P(X=4000)+P(X=2000)=0.3+0.5=0.8\ (i=1,2,3)$，3 季利润均不少于 2000 元的概率为：

$P(C_1C_2C_3)=P(C_1)P(C_2)P(C_3)=0.8^3=0.512$，3 季中有 2 季利润学科网不少于 2000 元的概率为：

$P(\overline{C_1}C_2C_3)+P(C_1\overline{C_2}C_3)+P(C_1C_2\overline{C_3})=3\times0.8^2\times0.2=0.384$，根据互斥事件概率的加法公式得：这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率为：$0.512+0.384=0.896$

试题解析：（1）设 A 表示事件"作物产量为 $300\,kg$"，B 表示事件"作物市场价格为 6 元$/kg$"

由题设知：$P(A)=0.5$，$P(B)=0.5$

因为利润=产量×市场价格-成本

所以 X 所以可能的取值为

$500\times10-1000=4000$，$500\times6-1000=2000$

$300\times10-1000=2000$，$300\times6-1000=800$

$P(X=4000)=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.5)(1-0.4)=0.3$，

$P(X=2000)=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=(1-0.5)\times0.4+0.5\times(1-0.4)=0.5$，

$P(X=800)=P(A)P(B)=0.5\times0.4=0.2$，

所以 X 的分布列为

X	4000	2000	800

P	0.3	0.5	0.2

（2）设 C_i 表示事件“第 i 季利润不少于 2000 元” $(i=1,2,3)$，

由题意知：C_1,C_2,C_3 相互独立，由（1）知

$P(C_i)=P(X=4000)+P(X=2000)=0.3+0.5=0.8\ (i=1,2,3)$

3 季利润均不少于 2000 元的概率为：

$P(C_1C_2C_3)=P(C_1)P(C_2)P(C_3)=0.8^3=0.512$

3 季中有 2 季利润不少于 2000 元的概率为：

$P(\overline{C_1}C_2C_3)+P(C_1\overline{C_2}C_3)+P(C_1C_2\overline{C_3})=3\times0.8^2\times0.2=0.384$

所以，这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率为：

$0.512+0.384=0.896$

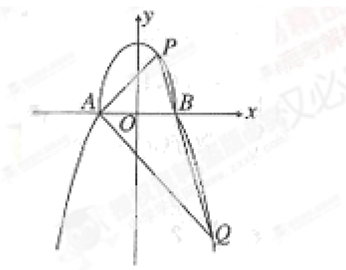
20. 考点：离散型随机变量的分布列和期望；互斥事件的概率.

21.（本小题满分 13 分）

如图，曲线 C 由上半椭圆 $C_1:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0,y\geq0)$ 和部分抛物线 $C_2:y=-x^2+1(y\leq0)$ 连接而成，C_1,C_2 的公共点为 A,B，其中 C_1 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求 a,b 的值；

（2）过点 B 的直线 l 与 C_1,C_2 分别交于 P,Q（均异于点 A,B），若 $AP\perp AQ$，求直线 l 的方程.



【答案】（1）$a=2$，$b=1$；（2）$y=-\dfrac{8}{3}(x-1)$

【解析】

试题分析：（1）由上半椭圆 $C_1:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0,y\geq 0)$ 和部分抛物 $C_2:y=-x^2+1(y\leq 0)$ 公共点为 A,B，得 $b=1$，设 C_2 的半焦距为 c，由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $a^2-c^2=b^2=1$，解得 $a=2$；

（2）由（1）知，上半椭圆 C_1 的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1(y\geq 0)$，$B(1,0)$，易知，直线 l 与 x 轴不重合也不垂直，故可设其方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，并代入 C_1 的方程中，整理得：$(k^2+4)x^2-2k^2x+k^2-4=0$，由韦达定理得 $x_P+x_B=\frac{2k^2}{k^2+4}$，又 $B(1,0)$，得 $x_P=\frac{k^2-4}{k^2+4}$，从而求得 $y_P=\frac{-8k}{k^2+4}$，继而得点 P 的坐标为 $(\frac{k^2-4}{k^2+4},\frac{-8k}{k^2+4})$，同理，由 $\begin{cases}y=k(x-1)(k\neq 0)\\ y=-x^2+1(y\leq 0)\end{cases}$ 得点 Q 的学科网坐标为 $(-k-1,-k^2-2k)$，最后由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，解得 $k=-\frac{8}{3}$，经检验 $k=-\frac{8}{3}$ 符合题意，故直线 l 的方程为 $y=-\frac{8}{3}(x-1)$.

试题解析：（1）在 C_1 方程中，令 $y=0$，得 $A(-b,0),B(b,0)$

在 C_2 方程中，令 $y=0$，得 $A(-1,0),B(1,0)$

所以 $b=1$

设 C_2 的半焦距为 c，由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $a^2-c^2=b^2=1$，解得 $a=2$

所以 $a=2$，$b=1$

（2）由（1）知，上半椭圆 C_1 的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1(y\geq 0)$，$B(1,0)$

易知，直线 l 与 x 轴不重合也不垂直，设其方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$

代入 C_1 的方程中，整理得：

$$(k^2+4)x^2-2k^2x+k^2-4=0 \qquad (*)$$

设点 P 的坐标 (x_P,y_P)

由韦达定理得 $x_P+x_B=\frac{2k^2}{k^2+4}$

又 $B(1,0)$，即 $x_B=1$，得 $x_P=\frac{k^2-4}{k^2+4}$，从而求得 $y_P=\frac{-8k}{k^2+4}$

所以点 P 的坐标为 $(\frac{k^2-4}{k^2+4},\frac{-8k}{k^2+4})$

同理，由 $\begin{cases} y=k(x-1)(k\neq 0) \\ y=-x^2+1(y\leq 0) \end{cases}$ 得点 Q 的坐标为 $(-k-1,-k^2-2k)$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2k}{k^2+4}(k,-4)$，$\overrightarrow{AQ}=-k(1,k+2)$

$\because AP\perp AQ$

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，即 $\frac{-2k^2}{k^2+4}[k-4(k+2)]=0$

$\because k\neq 0$，$\therefore k-4(k+2)=0$，解得 $k=-\frac{8}{3}$

经检验，$k=-\frac{8}{3}$ 符合题意，

故直线 l 的方程为 $y=-\frac{8}{3}(x-1)$

考点：椭圆和抛物线的几何性质；直线与圆锥曲线的综合问题.

21.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\ln(1+x), g(x)=xf'(x), x\ge 0$，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

（1）$g_1(x)=g(x), g_{n+1}(x)=g(g_n(x)), n\in N_+$，求 $g_n(x)$ 的表达式；

（2）若 $f(x)\ge ag(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（3）设 $n\in N_+$，比较 $g(1)+g(2)+\cdots+g(n)$ 与 $n-f(n)$ 的大小，并加以证明.

【答案】（1）$g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$；（2）$(-\infty,1]$；（3）$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)>n-\ln(n+1)$，证明见解析.

【解析】

试题分析：（1）易得 $g(x)=\dfrac{x}{1+x}$，且有 $g(x)\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，当 $x=0$ 时，$g_n(0)=0$，

当 $x>0$ 时 $g(x)>0$，由 $g_{n+1}(x)=g(g_n(x))$，得 $\dfrac{1}{g_{n+1}(x)}-\dfrac{1}{g_n(x)}=1$，所以数列 $\{\dfrac{1}{g_n(x)}\}$ 是以 $g_1(x)$ 为首项，以 1 为公差的等差数列，继而得 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$，经检验 $g_n(0)=0$，所以 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x\ge 0)$；

（2）在 $x\ge 0$ 范围内 $f(x)\ge ag(x)$ 恒成立，等价于 $f(x)-ag(x)\ge 0$ 成立，令 $h(x)=f(x)-ag(x)$

$=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{1+x}$，即 $h(x)_{\min}\ge 0$ 成立，$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{a(1+x)-ax}{(1+x)^2}=\dfrac{x+1-a}{(1+x)^2}$，令 $h'(x)>0$，得

$x>a-1$，分 $a\le 1$ 和 $a>1$ 两种情况讨论，分别求出 $h(x)$ 的最小值，继而求出 a 的取值范围；

（3）由题设知：$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{n}{n+1}$，$n-f(n)=n-\ln(n+1)$，比较结果为：

$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)>n-\ln(n+1)$，证明如下：上述不等式等价于 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)$

在（2）中取 $a=1$，可得 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}, x>0$，令 $x=\dfrac{1}{n}, n\in N^+$，则 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，即

$\ln(n+1)-\ln n>\dfrac{1}{n+1}$，使用累加法即学科网可证明结论.

试题解析：$\because f(x)=\ln(x+1)$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$\therefore g(x)=\dfrac{x}{1+x}$

（1）$g(x)=\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x+1-1}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$

$\because x\ge 0$，$\therefore 1+x\ge 1$，$\therefore \dfrac{1}{1+x}\le 1$，$\therefore 1-\dfrac{1}{1+x}\ge 0$，即 $g(x)\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号

当 $x=0$ 时，$g_n(0)=0$

当 $x>0$ 时 $g(x)>0$

$\because g_{n+1}(x)=g(g_n(x))$

$\therefore g_{n+1}(x)=\dfrac{g_n(x)}{1+g_n(x)}$，$\therefore \dfrac{1}{g_{n+1}(x)}=\dfrac{1+g_n(x)}{g_n(x)}=\dfrac{1}{g_n(x)}+1$，即 $\dfrac{1}{g_{n+1}(x)}-\dfrac{1}{g_n(x)}=1$

$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{1}{g_n(x)}\}$ 是以 $g_1(x)$ 为首项，以 1 为公差的等差数列

$\therefore \dfrac{1}{g_n(x)}=\dfrac{1}{g_1(x)}+(n-1)\times 1=\dfrac{1}{\frac{x}{1+x}}+(n-1)\times 1=\dfrac{1+nx}{x}$

$\therefore g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x>0)$

当 $x=0$ 时，$g_n(0)=\dfrac{0}{1+0}=0$

$\therefore g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x\ge 0)$

（2）在 $x\ge 0$ 范围内 $f(x)\ge ag(x)$ 恒成立，等价于 $f(x)-ag(x)\ge 0$ 成立

令 $h(x)=f(x)-ag(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{1+x}$，即 $h(x)\ge 0$ 恒成立，

$$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{a(1+x)-ax}{(1+x)^2}=\frac{x+1-a}{(1+x)^2}$$

令 $h'(x)>0$，即 $x+1-a>0$，得 $x>a-1$

当 $a-1\le 0$ 即 $a\le 1$ 时，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

$h(x)\ge h(0)=\ln(1+0)-0=0$

所以当 $a\le 1$ 时，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上 $h(x)\ge 0$ 恒成立；

当 $a-1>0$ 即 $a>1$ 时，$h(x)$ 在 $[a-1,+\infty)$ 上单调递增，在 $[0,a-1]$ 上单调递减，

所以 $h(x)\ge h(a-1)=\ln a-a+1$

设 $\varphi(a)=\ln a-a+1(a>1)$

$\varphi'(a)=\frac{1}{a}-1$

因为 $a>1$，所以 $\frac{1}{a}-1<0$，即 $\varphi'(a)<0$，所以函数 $\varphi(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

所以 $\varphi(a)<\varphi(1)=0$，即 $h(a-1)<0$

所以 $h(x)\ge 0$ 不恒成立

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$

（3）由题设知：$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}$，

$n-f(n)=n-\ln(n+1)$

比较结果为：$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)>n-\ln(n+1)$

证明如下：

上述不等式等价于 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)$

在（2）中取 $a=1$，可得 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x},x>0$

令 $x=\frac{1}{n},n\in N^{+}$，则 $\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}$，即 $\ln(n+1)-\ln n>\frac{1}{n+1}$

故有 $\ln 2-\ln 1>\frac{1}{2}$

$\ln 3-\ln 2>\frac{1}{3}$

……

$\ln(n+1)-\ln n>\frac{1}{n+1}$

上述各式相加可得：$\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}$

结论得证.

考点：等差数列的判断及通项公式；函数中的恒成立问题；不等式的证明.