2003年广东高考数学真题及答案

一、选择题：每小题5分，共60分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1．暂缺

2． 已知 $x\in(-\frac{\pi}{2},0),\cos x=\frac{4}{5}$,则 $\tan 2x=$ （　　）

A．$\frac{7}{24}$　　B．$-\frac{7}{24}$　　C．$\frac{24}{7}$　　D．$-\frac{24}{7}$

3．圆锥曲线 $\rho=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是 （　　）

A．$\rho\cos\theta=-2$　　B．$\rho\cos\theta=2$　　C．$\rho\sin\theta=-2$　　D．$\rho\sin\theta=2$

4．等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=\frac{1}{3},a_2+a_5=4,a_n=33$，则 n 为 （　　）

A．48　　B．49　　C．50　　D．51

5．双曲线虚轴的一个端点为M，两个焦点为 F_1、F_2，$\angle F_1MF_2=120°$，则双曲线的离心率为 （　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, x\le 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, \quad x>0\end{cases}$ 若 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是 （　　）

A．（－1，1）　　B．（－1，+∞）

C．（－∞，－2）∪（0，+∞）　　D．（－∞，－1）∪（1，+∞）

7．函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$ 的最大值为 （　　）

A．$1+\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

8．已知圆 $C:(x-a)^2+(x-2)^2=4(a>0)$ 及直线 $l:x-y+3=0$.当直线 l 被 C 截得 的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时，则 a= （　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2-\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{2}+1$

9．已知圆锥的底面半径为R，高为3R，在它的所有内接圆柱中，全面积的最大值是（　　）

A．$2\pi R^2$　　B．$\frac{9}{4}\pi R^2$　　C．$\frac{8}{3}\pi R^2$　　D．$\frac{3}{2}\pi r^2$

10．函数 $f(x)=\sin x,x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ （　　）

A．$-\arcsin x,x\in[-1,1]$　　B．$-\pi-\arcsin x,x\in[-1,1]$

C．$-\pi+\arcsin x,x\in[-1,1]$　　D．$\pi-\arcsin x,x\in[-1,1]$

11．已知长方形的四个顶点A（0，0），B（2，0），C（2，1）和D（0，1）．一质点从AB的中点 P_0 沿与AB夹

角为θ的方向射到 BC 上的点 P_1 后，依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2，P_3 和 P_4（入射角等于反射角）．设 P_4 的坐标为（x_4，0），若 $1<x_4<2$

则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （　　）

A.（$\frac{1}{3}$，1）　　B. $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　　C. $(\frac{2}{5},\frac{1}{2})$　　D. $(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$

12．一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为（　　）

A．3π　　B．4π　　C．$3\sqrt{3}\pi$　　D．6π

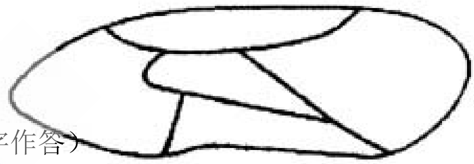
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上

13．不等式 $\sqrt{4x-x^2}<x$ 的解集是________

14．$(x^2-12x)9$ 展开式中 x^9 的系数是________

15．在平面几何里，有勾股定理：“设△ABC 的两边 AB、AC 互相垂直，则 $AB^2+AC^2=BC^2$，拓展到空间，类比平面几何的勾股定理，研究三棱锥的侧面积与底面面积间的关系，可以得出的正确结论是：“设三棱锥 A—BCD 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两相互垂直，则________________

16．如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻区域不得使用同一颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有________种．（以数字作答）



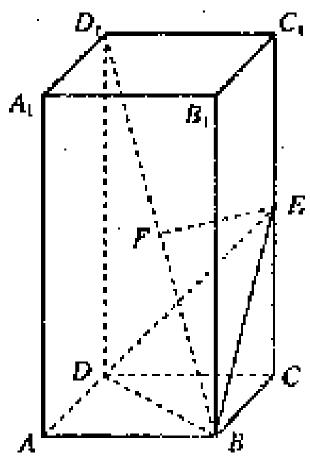
三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17．（本小题满分 12 分）

已知正四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$，AB=1，AA_1=2，点 E 为 CC_1 中点，点 F 为 BD_1 中点.

（1）证明 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线；

（2）求点 D_1 到面 BDE 的距离.



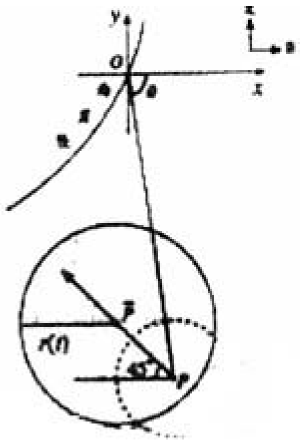
18．（本小题满分 12 分）

已知复数 z 的辐角为 60°，且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项．求 $|z|$.

19．（本小题满分 12 分）已知 c>0，设 P：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减 Q：不等式 x+|x-2c|>1 的解集为 R.如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围

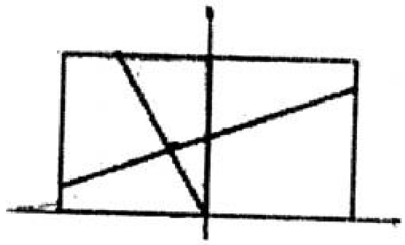
20．（本小题满分 12 分）

在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市O（如图）东偏南$\theta(\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10})$方向300km的海面P处，并以20km/h的速度向西偏北45°方向移动.台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为60km,并以10km/h的速度不断增大. 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭？



21.（本小题满分14分）

已知常数$a>0$,在矩形ABCD中，AB=4，BC=4a，O为AB的中点，点E、F、G分别在BC、CD、DA上移动，且$\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$，P为GE与OF的交点（如图），问是否存在两个定点，使P到这两点的距离的和为定值？若存在，求出这两点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由.



22.（本小题满分14分）

设a_n为常数，且$a_n=3^{n-1}-2a_{n+1}(n\in N)$

（1）证明对任意$n\geq 1,a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^n]+(-1)^n\cdot 2^n a_n$；

（2）假设对任意$n\geq 1$有$a_n>a_{n-1}$，求a_n的取值范围.

一、选择题：

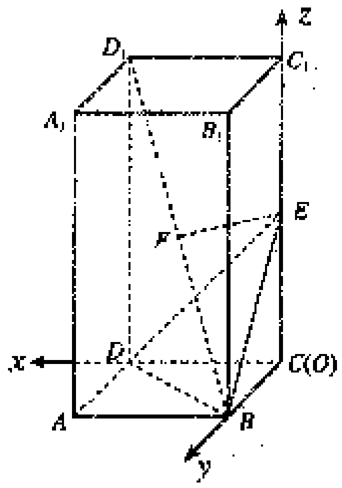
1.D　2.D　3.C　4.C　5.B　6.D　7.A　8.C　9.B　10.D　11.C　12.A

二、填空题：

13．$(2,4]$　　14．　$-\dfrac{21}{2}$　　15．S2△ABC+S2△ACD+S2△ADB=2S△BCD

三、解答题：

（I）证明：取 BD 中点 M，连结 MC，FM，



∵F 为 BD_1 中点，　∴$FM/\!/D_1D$ 且 $FM=\dfrac{1}{2}D_1D$

又 $EC=\dfrac{1}{2}CC_1$，且 EC⊥MC，

∴四边形 EFMC 是矩形　∴$EF\perp CC_1$

又 CM⊥面 DBD_1　∴EF⊥面 DBD_1

∵$BD_1\subset$面 DBD_1，

∴$EF\perp BD_1$　故 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线.

（II）解：连结 ED_1，有 $V_{E-DBD_1}=V_{D_1-DBE}$

由（I）知 EF⊥面 DBD_1，设点 D_1 到面 BDE 的距离为 d，

则 $S_{\triangle DBC}\cdot d=S_{\triangle DBD_1}\cdot EF$. ………………9 分

∵$AA_1=2\cdot AB=1$.

$$\therefore BD=BE=ED=\sqrt{2},EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta DBD_1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=\sqrt{2},S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore d=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

故点 D_1 到平面 BDE 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

18.　解：设 $z=r\cos60^\circ+r\sin60^\circ)$，则复数$z$的实部为$\dfrac{r}{2}$. $z-\bar{z}=r,z\bar{z}=r^2$ 由题设

$|z-1|^2=|z|\cdot|z-2|$即$:(z-1)(\bar{z}-1)=|z|\sqrt{(z-2)(\bar{z}-2)},\therefore r^2-r+1=r\sqrt{r^2-2r+4},$

整理得$r^2+2r-1=0.$解得$:r=\sqrt{2}-1,r=-\sqrt{2}-1$(舍去).即$|z|=\sqrt{2}-1.$

19.

20．解：如图建立坐标系以 O 为原点，正东方向为 x 轴正向.

在时刻：(1) 台风中心 P（$\bar{x}$，　$\bar{y}$）的坐标为$\begin{cases}\bar{x}=300\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}-20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ \bar{y}=-300\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}+20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$

此时台风侵袭的区域是$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})\le[r(t)]^2,$

其中$r(t)=10t+60$, 若在 t 时刻城市 O 受到台风的侵袭，则有

$(0-\bar{x})^2+(0-\bar{y})^2\le(10t+60)^2$. 即$(300\times\frac{\sqrt{2}}{10}-20\times\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(-300\times\frac{7\sqrt{2}}{10}+20\times\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2$

$\le(10t+60)^2$, 即$t^2-36t+288\le 0$, 解得$12\le t\le 24$

答：12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.

21．根据题设条件，首先求出点 P 坐标满足的方程，据此再判断是否存在的两定点，使得点 P 到两点距离的和为定值.

按题意有 A（－2，0），B（2，0），C（2，4a），D（－2，4a）设$\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DC}{DA}(0\le k\le 1)$

由此有 E（2，4ak），F（2－4k，4a），G（－2，4a－4ak）直线 OF 的方程为：$2ax+(2k-1)y=0$①

直线 GE 的方程为：$-a(2k-1)x+y-2a=0$②

从①，②消去参数 k，得点 P（x,y）坐标满足方程$2a^2x^2+y^2-2ay=0$

整理得$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1$ 当$a^2=\frac{1}{2}$时，点 P 的轨迹为圆弧，所以不存在符合题意的两点.

当$a^2\ne\frac{1}{2}$时，点 P 轨迹为椭圆的一部分，点 P 到该椭圆焦点的距离的和为定长

当$a^2<\frac{1}{2}$时，点 P 到椭圆两个焦点（$-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a),(\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a)$的距离之和为定值$\sqrt{2}$

当$a^2>\frac{1}{2}$时，点 P 到椭圆两个焦点（0，$a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}),(0,a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}})$ 的距离之和为定值 2a.

22．本小题主要考查数列、等比数列的概念，考查数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力，满分 14 分.

（1）证法一：（i）当 n=1 时，由已知 $a_1=1-2a_0$，等式成立;

（ii）假设当 n=k（k≥1）等式成立，则$a_k=\frac{1}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]-(-1)^k2a_0$,

那么$a_{k+1}=3^k-2a_k=3^k-\frac{2}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]-(-1)^k2^{k+1}a_0$

$$=\frac{1}{5}[3^{k+1}+(-1)^k2^{k+1}]+(-1)^{k+1}2^{k+1}a_0.$$

也就是说，当 n=k+1 时，等式也成立. 根据（i）和（ii），可知等式对任何 n∈N，成立.

证法二：如果设$a_n=3^{n-1}-2(a_{n-1}-a3^{n-1})$, 用$a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}$代入，可解出$a=\frac{1}{5}$.

所以$\left\{a_n-\frac{3^n}{5}\right\}$是公比为－2，首项为$a_1-\frac{3}{5}$的等比数列.

$\therefore a_n-\frac{3^n}{5}=(1-2a_0-\frac{3}{5})(-2)^{n-1}(n\in N)$. 即$a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}2^n}{5}+(-1)^n2^na_0$.

（2）解法一：由a_n通项公式 $a_n-a_{n-1}=\frac{2\times 3^{n-1}+(-1)^{n-1}3\times 2^{n-1}}{5}+(-1)^n3\times 2^{n-1}a_0$.

$\therefore a_n > a_{n-1}(n \in N)$ 等价于 $(-1)^{n-1}(5a_0 - 1) < (\frac{3}{2})^{n-2}(n \in N).\cdots\cdots$①

（i）当 n=2k－1，k=1，2，…时，①式即为 $(-1)^{2k-2}(5a_0 - 1) < (\frac{3}{2})^{2k-3}$

即为 $a_0 < \frac{1}{5}(\frac{3}{2})^{2k-3} + \frac{1}{5}.\cdots\cdots$②

②式对 k=1，2，…都成立，有 $a_0 < \frac{1}{5} \times (\frac{3}{2})^{-1} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3}.$

（ii）当 n=2k，k=1，2，…时，①式即为 $(-1)^{2k-1}(5a_0 - 1) < (\frac{3}{2})^{2k-2}.$

即为 $a_0 > -\frac{1}{5} \times (\frac{3}{2})^{2k-2} + \frac{1}{5}.\cdots\cdots$③ ③式对 k=1，2，…都成立，有

$a_0 > -\frac{1}{5} \times (\frac{3}{2})^{2\times1-2} + \frac{1}{5} = 0.$ 综上，①式对任意 n∈N_*，成立，有 $0 < a_0 < \frac{1}{3}.$

故 a_0 的取值范围为 $(0, \frac{1}{3}).$

解法二：如果 $a_n > a_{n-1}$（n∈N_*）成立，特别取 n=1，2 有 $a_1 - a_0 = 1 - 3a_0 > 0.$

$a_2 - a_1 = 6a_0 > 0.$ 因此 $0 < a_0 < \frac{1}{3}.$ 下面证明当 $0 < a_0 < \frac{1}{3}.$ 时，对任意 n∈N_*，

$a_n - a_{n-1} > 0.$ 由 a_n 的通项公式 $5(a_n - a_{n-1}) = 2\times3^{n-1} + (-1)^{n-1}3\times2^{n-1} + (-1)^n 5\times3\times2^{n-1}a_0.$

（i）当 n=2k－1，k=1，2…时，$5(a_n - a_{n-1}) = 2\times3^{n-1} + 3\times2^{n-1} - 5\times3\times2^{n-1}a_0$

$> 2\times2^{n-1} + 3\times2^{n-1} - 5\times3\times2^{n-1} = 0$

（ii）当 n=2k，k=1，2…时，$5(a_n - a_{n-1}) = 2\times3^{n-1} - 3\times2^{n-1} + 5\times3\times2^{n-1}a_0$

$> 2\times3^{n-1} - 3\times2^{n-1} \geq 0.$ 故 a_0 的取值范围为 $(0, \frac{1}{3}).$