2015年普通高等学校招生全国统一考试（陕西卷）

数学（文科）

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.（本大题共10小题，每小题5分，共50分）．

1. 设集合 $M=\{x\mid x^2=x\}$，$N=\{x\mid \lg x\le 0\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $[0,1]$　*B*. $(0,1]$　*C*. $[0,1)$　*D*. $(-\infty,1]$

【答案】*A*

【解析】由 $M=\{x\mid x^2=x\}\Rightarrow M=\{0,1\}$，$N=\{x\mid \lg x\le 0\}\Rightarrow N=\{x\mid 0<x\le 1\}$

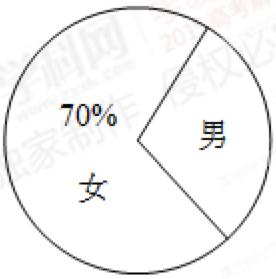
所以 $M\cup N=[0,1]$，故答案选 *A*.

【考点定位】集合间的运算.

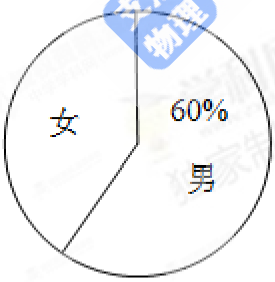
【名师点睛】1.本题考查以不等式为基础的集合间的运算，解不等式时注意原式意义的范围.2.本题属于基础题，高考常考题型，注意运算的准确性.

2. 某中学初中部共有110名教师，高中部共有150名教师，其性别比例如图所示，则该校女教师的人数为（　　）

A．93　*B*．123　*C*．137　*D*．167



（初中部）



（高中部）

【答案】*C*

【解析】由图可知该校女教师的人数为 $110\times 70\%+150\times(1-60\%)=77+60=137$

故答案选 *C*

【考点定位】概率与统计.

【名师点睛】1.扇形统计图是用整个圆表示总数，用圆内各个扇形的大小表各部分数量占总数的百分数.2.通过扇形图可以很清晰地表示各部分数量同总数之间的关系.

3.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线经过点 $(-1,1)$，则抛物线焦点坐标为（　　）

A．$(-1,0)$　　B．$(1,0)$　　C．$(0,-1)$　　D．$(0,1)$

【答案】B

【解析】由抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 得准线 $x=-\frac{p}{2}$，因为准线经过点 $(-1,1)$，所以 $p=2$，

所以抛物线焦点坐标为 $(1,0)$，故答案选 B

【考点定位】抛物线方程和性质.

【名师点睛】1.本题考查抛物线方程和性质，采用待定系数法求出 p 的值.本题属于基础题，注意运算的准确性.2.给出抛物线方程要求我们能够找出焦点坐标和直线方程，往往这个是解题的关键.

4.设 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x},x\geq 0\\ 2^x,x<0\end{cases}$，则 $f(f(-2))=$（　　）

A．-1　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】因为 $f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$，所以 $f(f(-2))=f(\frac{1}{4})=1-\sqrt{\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

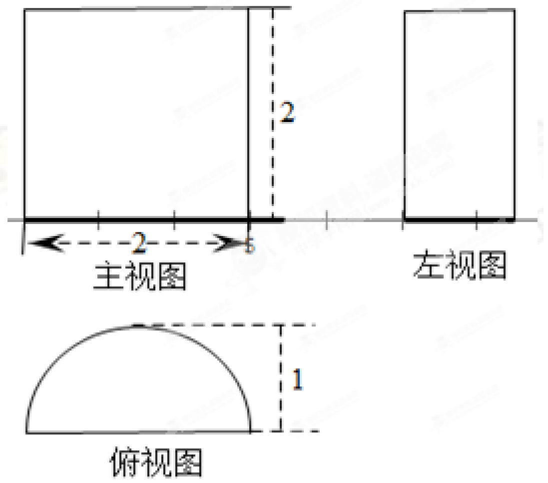
故答案选 C 学科网

【考点定位】1. 分段函数；2. 复合函数求值.

【名师点睛】1.本题考查分段函数和复合函数求值，此题需要先求 $f(-2)$ 的值，继而去求 $f(f(-2))$ 的值；2.若求函数 $f[f(a)]$ 的值，需要先求 $f(a)$ 的值，再去求 $f[f(a)]$ 的值；若是解方程 $f[f(x)]=a$ 的根，则需先令 $f(x)=t$，即 $f(t)=a$，再解方程 $f(t)=a$ 求出 t 的值，最后在解方程 $f(x)=t$；3.本题属于基础题，注意运算的准确性.

5. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）

A．3π　　B．4π　　C．$2\pi+4$　　D．$3\pi+4$



【答案】D

【解析】由几何体的三视图可知该几何体为圆柱的截去一半，

所以该几何体的表面积为 $\pi\times1\times2+\frac{1}{2}\times\pi\times1^2\times2+2\times2=3\pi+4$，故答案选 D

【考点定位】1. 空间几何体的三视图；2. 空间几何体的表面积.

【名师点睛】1.本题考查空间几何体的三视图及几何体的表面积，意在考查考生的识图能力、空间想象能力以及技术能力；2.先根据三视图判断几何体的结构特征，再计算出几何体各个面的面积即可；3.本题属于基础题，是高考常考题型.

6. “$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos2\alpha=0$”的（　　）

A 充分不必要条件　　B 必要不充分条件　　C 充分必要条件　　D 既不充分也不必要

【答案】A

【解析】$\cos2\alpha=0\Rightarrow\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0\Rightarrow(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=0$，

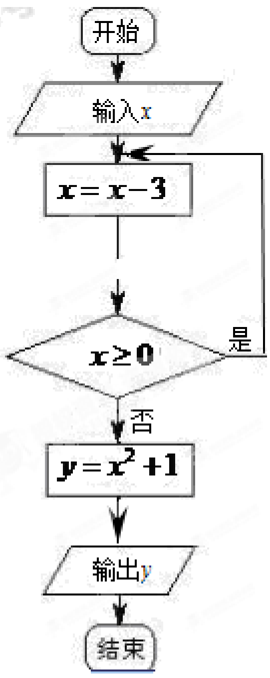
所以 $\sin\alpha=\cos\alpha$ 或 $\sin\alpha=-\cos\alpha$，故答案选 A.

【考点定位】1. 恒等变换；2. 命题的充分必要性.

【名师点睛】1.本题考查三角恒等变换和命题的充分必要性，采用二倍角公式展开 $\cos2\alpha=0$，求出 $\sin\alpha=\cos\alpha$ 或 $\sin\alpha=-\cos\alpha$ .2.本题属于基础题，高考常考题型.

7.根据右边框图，当输入 x 为 6 时，输出的 $y=$（　　）

A. 1　　B. 2 .　C. 5　　D. 10



【答案】D

【解析】该程序框图运行如下：$x=6-3=3>0$，$x=3-3=0$，$x=0-3=-3<0$，$y=(-3)^2+1=10$，故答案选D.

【考点定位】程序框图的识别.

【名师点睛】1.本题考查程序框图的识别，解题的关键是判断什么时候退出循环.2.考查逻辑思维能力、计算能力.本题属于基础题，常考题型.

8.对任意向量$\vec{a},\vec{b}$，下列关系式中不恒成立的是（　　）

A. $|\vec{a}\bullet\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$　　B. $|\vec{a}-\vec{b}|\le||\vec{a}|-|\vec{b}||$　　C. $(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$　　D. $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

【答案】B

【解析】因为$|\vec{a}\bullet\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|\le|\vec{a}||\vec{b}|$，所以$A$选项正确；当$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反时，$B$选项不成立，所以$B$选项错误；向量平方等于向量模的平方，所以$C$选项正确；$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$，所以$D$选项正确，故答案选$B$.

【考点定位】1. 向量的模；2. 数量积.

【名师点睛】1.本题考查向量模的运算，采用向量数量积公式.2.向量的平方就是模的平方进行化解求解.本题属于基础题，注意运算的准确性.

9. 设$f(x)=x-\sin x$，则$f(x)=$（　　）

A．既是奇函数又是减函数　　B．既是奇函数又是增函数

C．是有零点的减函数　　D．是没有零点的奇函数

【答案】B

【解析】$f(x)=x-\sin x \Rightarrow f(-x)=(-x)-\sin(-x)=-x+\sin x=-(x-\sin x)=-f(x)$

又 $f(x)$ 的定义域为 R 是关于原点对称，所以 $f(x)$ 是奇函数；

$f'(x)=1-\cos x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 是增函数.

故答案选 B

【考点定位】函数的性质.

【名师点睛】1.本题考查函数的性质，判断函数的奇偶性时，应先判断函数定义域是否关于原点对称，然后再判断 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的关系，函数的单调性可以通过导函数判断.2.本题属于基础题，注意运算的准确性.

10．设 $f(x)=\ln x, 0<a<b$，若 $p=f(\sqrt{ab})$，$q=f(\frac{a+b}{2})$，$r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，则下列关系式中正确的是（　　）

A．$q=r<p$　　B．$q=r>p$　　C．$p=r<q$　　D．$p=r>q$

【答案】C

【解析】$p=f(\sqrt{ab})=\ln\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\ln ab$；$q=f(\frac{a+b}{2})=\ln\frac{a+b}{2}$；$r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))=\frac{1}{2}\ln ab$

因为 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，由 $f(x)=\ln x$ 是个递增函数，$f(\frac{a+b}{2})>f(\sqrt{ab})$

所以 $q>p=r$，故答案选 C 学科网

【考点定位】函数单调性的应用.

【名师点睛】1.本题考查函数单调性，因为函数 $f(x)=\ln x$ 是个递增函数，所以只需判断 $\frac{a+b}{2}$ 和 $\sqrt{ab}$ 的大小关系即可；2.本题属于中档题，注意运算的准确性.

11.某企业生产甲乙两种产品均需用 A，B 两种原料，已知生产 1 吨每种产品需原料及每天原料的可用限额表所示，如果生产 1 吨甲乙产品可获利润分别为 3 万元.4 万元，则该企业每天可获得最大利润为（　　）

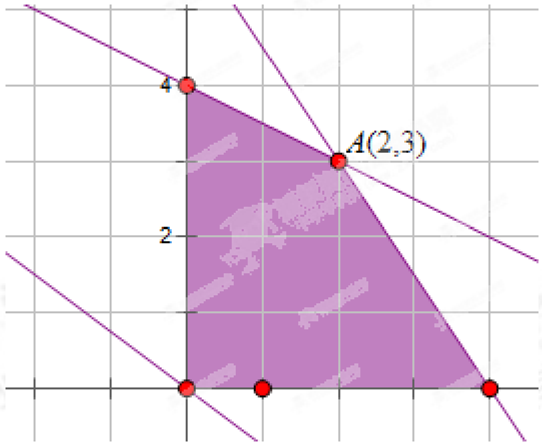
	甲	乙	原料限额
A(吨)	3	2	12
B(吨)	1	2	8

A．12 万元　　B．16 万元　　C．17 万元　　D．18 万元

【答案】D

【解析】设该企业每天生产甲乙两种产品分别x，y吨，则利润$z=3x+4y$

由题意可列$\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0 \\ 3x+2y\le 12 \\ x+2y\le 8 \end{cases}$，其表示如图阴影部分区域：



当直线$3x+4y-z=0$过点$A(2,3)$时，z取得最大值$z=3\times 2+4\times 3=18$，

故答案选D。学科网

【考点定位】线性规划.

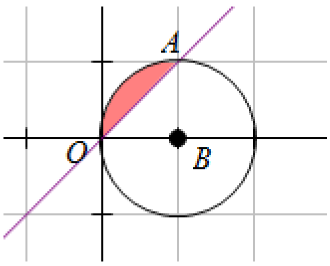
【名师点睛】1.本题考查线性规划在实际问题中的应用，在解决线性规划的应用题时，可依据以下几个步骤：①分析题目中相关量的关系，列出不等式组，即约束条件和目标函数；②由约束条件画出可行域；③分析目标函数z与直线截距之间的关系；④使用平移直线法求出最优解；⑤还原到现实问题中.2.本题属于中档题，注意运算的准确性.

12. 设复数$z=(x-1)+yi\ (x,y\in R)$，若$|z|\le 1$，则$y\ge x$的概率（　　）

A. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$　　C. $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$

【答案】C

【解析】$z=(x-1)+yi\Rightarrow |z|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le 1\Rightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$



如图可求得 $A(1,1)$，$B(1,0)$，阴影面积等于 $\frac{1}{4}\pi\times1^2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

若 $|z|\le1$，则 $y\ge x$ 的概率 $\dfrac{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}{\pi\times1^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$

故答案选 C

【考点定位】1. 复数的模长；2. 几何概型.

【名师点睛】1.本题考查复数的模长和几何概型，利用 $z=a+bi\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 把此题转化成几何概型，采用分母实数化和利用共轭复数的概念进行化解求解.2.求几何概型，一般先要求出实验的基本事件构成的区域长度（面积或体积），再求出事件 A 构成区域长度（面积或体积），最后再代入几何概型的概率公式求解；求几何概型概率时，一定要分清“试验”和“事件”，这样才能找准基本事件构成的区域长度（面积或体积）.3.本题属于题，注意运算的准确性.

二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）.

13.中位数为 1010 的一组数构成等差数列，其末项为 2015，则该数列的首项为________

【答案】5

【解析】若这组数有 $2n+1$ 个，则 $a_{n+1}=1010$，$a_{2n+1}=2015$，又 $a_1+a_{2n+1}=2a_{n+1}$，所以 $a_1=5$；

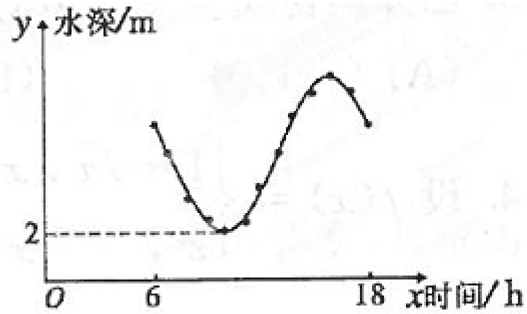
若这组数有 $2n$ 个，则 $a_n+a_{n+1}=1010\times2=2020$，$a_{2n}=2015$，又 $a_1+a_{2n}=a_n+a_{n+1}$，所以 $a_1=5$；

故答案为 5

【考点定位】等差数列的性质.

【名师点睛】1.本题考查等差数列的性质，这组数字有可能是偶数个，也有可能是奇数个.然后利用等差数列性质 $m+n=p+q\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$ .2.本题属于基础题，注意运算的准确性.

14.如图，某港口一天 6 时到 18 时的谁深变化曲线近似满足函数 $y=3sin(\frac{\pi}{6}x+\Phi)+k$，据此函数可知，这段时间水深(单位：$m$)的最大值为____________.



【答案】8

【解析】由图像得，当$\sin(\frac{\pi}{6}x+\Phi)=-1$时$y_{\min}=2$，求得$k=5$，

当$\sin(\frac{\pi}{6}x+\Phi)=1$时，$y_{\max}=3\times1+5=8$，故答案为 8.

【考点定位】三角函数的图像和性质.

【名师点睛】1.本题考查三角函数的图像和性质，在三角函数的求最值中，我们经常使用的是整理法，从图像中知此题$\sin(\frac{\pi}{6}x+\Phi)=-1$时，$y$取得最小值，继而求得$k$的值，当$\sin(\frac{\pi}{6}x+\Phi)=1$时，$y$取得最大值. 2. 本题属于中档题，注意运算的准确性.

15.函数$y=xe^x$　　在其极值点处的切线方程为____________.

【答案】$y=-\frac{1}{e}$

【解析】$y=f(x)=xe^x\Rightarrow f'(x)=(1+x)e^x$，令$f'(x)=0\Rightarrow x=-1$，此时$f(-1)=-\frac{1}{e}$

函数$y=xe^x$在其极值点处的切线方程为$y=-\frac{1}{e}$

【考点定位】：导数的几何意义.

【名师点睛】1.本题考查导数的几何意义，利用导数研究曲线上某点处切线方程等基础知识，考查运算求解能力.2.解决导数几何意义的问题时要注意抓住切点的三重作用：①切点在曲线上；②切点在切线上；③切点处导函数值等于切线斜率.

16.观察下列等式：

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

…………

据此规律，第n个等式可为______________________.

【答案】$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

【解析】观察等式知：第n个等式的左边有$2n$个数相加减，奇数项为正，偶数项为负，且分子为 1，分母是 1 到$2n$的连续正整数，等式的右边是$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

故答案为$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

【考点定位】归纳推理.

【名师点睛】本题考查的是归纳推理，解题关键点在于发现其中的规律，要注意从运算的过程中去寻找. 本题属于基础题，注意运算的准确性.

三. 解答题：解答应写出文字说明. 证明过程或演算步骤（本大题共 6 小题，共 75 分）

17. ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，向量 $\vec{m}=(a,\sqrt{3}b)$ 与 $\vec{n}=(\cos A,\sin B)$ 平行.

(I)求 A；

(II)若 $a=\sqrt{7},b=2$ 求 ΔABC 的面积.

【答案】(I) $A=\dfrac{\pi}{3}$；(II) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解析】

试题分析：(I)因为 $\vec{m}/\!/\vec{n}$，所以 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$，由正弦定理，得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，又 $\sin B\neq 0$，从而 $\tan A=\sqrt{3}$，由于 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$；

(II)解法一：由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，代入数值求得 $c=3$，由面积公式得 ΔABC 面积为 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 解法二：由正弦定理，得 $\dfrac{\sqrt{7}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2}{\sin B}$，从而 $\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，又由 $a>b$ 知 $A>B$，所以 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，由 $\sin C=\sin(A+B)=\sin(B+\dfrac{\pi}{3})$，计算得 $\sin C=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，所以 ΔABC 面积为 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

试题解析：(I)因为 $\vec{m}/\!/\vec{n}$，所以 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$

由正弦定理，得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，

又 $\sin B\neq 0$，从而 $\tan A=\sqrt{3}$，

由于 $0<A<\pi$

所以 $A=\frac{\pi}{3}$

(II)解法一：由余弦定理，得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，而 $a=\sqrt{7},b=2$， $A=\frac{\pi}{3}$，

得 $7=4+c^2-2c$，即 $c^2-2c-3=0$

因为 $c>0$，所以 $c=3$，

故 ΔABC 面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

解法二：由正弦定理，得 $\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin B}$

从而 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 学科网

又由 $a>b$ 知 $A>B$，所以 $\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

故 $\sin C=\sin(A+B)=\sin(B+\frac{\pi}{3})$

$=\sin B\cos\frac{\pi}{3}+\cos B\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

所以 ΔABC 面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【考点定位】1. 正弦定理和余弦定理；2. 三角形的面积.

【名师点睛】1.本题考查解三角形和三角形的面积，利用正弦定理进行边角互化，继而求出 A 的值；可利用余弦定理求出 c 的值，代入到三角形面积公式求解计算.2.高考中经常将三角变换与解三角形知识综合起来命题，其中关键是三角变换，而三角变换中主要是“变角、变函数名和变运算形式”，其中的核心是“变角”，即注意角之间的结构差异，弥补这种结构差异的依据就是三角公式.

18．如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD\,//\,BC,\angle BAD=\frac{\pi}{2},AB=BC=\frac{1}{2}AD=a$，$E$ 是 AD 的中点，O 是 OC 与 BE 的交点，将 ΔABE 沿 BE 折起到图 2 中 ΔA_1BE 的位置，得到四棱锥 A_1-BCDE.

(I)证明：$CD\perp$ 平面 A_1OC；

(II)当平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$ 时，四棱锥 A_1-BCDE 的体积为 $36\sqrt{2}$，求 a 的值.

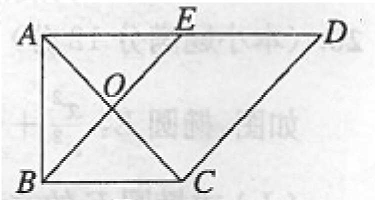


图1

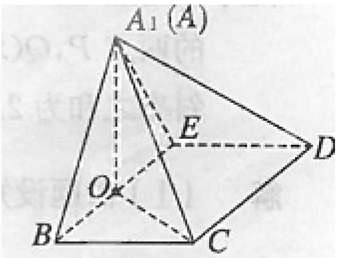


图2

【答案】(I) 证明略，详见解析；(II) $a=6$.

【解析】

试题分析：(I) 在图 1 中，因为 $AB=BC=\frac{1}{2}AD=a$，E 是 AD 的中点，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，所以四边形 $ABCE$ 是正方形，故 $BE\perp AC$，又在图 2 中，$BE\perp A_1O,BE\perp OC$，从而 $BE\perp$ 平面 A_1OC，又 $DE//BC$ 且 $DE=BC$，所以 $CD//BE$，即可证得 $CD\perp$ 平面 A_1OC；

(II)由已知，平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$，且平面 $A_1BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，又由(I)知，$A_1O\perp BE$，所以 $A_1O\perp$ 平面 $BCDE$，即 A_1O 是四棱锥 A_1-BCDE 的高，易求得平行四边形 $BCDE$ 面积 $S=BC\cdot AB=a^2$，从而四棱锥 A_1-BCDE 的为 $V=\frac{1}{3}\times S\times A_1O=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，由 $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=36\sqrt{2}$，得 $a=6$.

试题解析：(I)在图 1 中，因为 $AB=BC=\frac{1}{2}AD=a$，E 是 AD 的中点 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，所以 $BE\perp AC$，

即在图 2 中，$BE\perp A_1O,BE\perp OC$

从而 $BE\perp$ 平面 A_1OC

又 $CD//BE$

所以 $CD\perp$ 平面 A_1OC.

(II)由已知，平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$，

且平面 $A_1BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$

又由(I)知，$A_1O\perp BE$，所以 $A_1O\perp$ 平面 $BCDE$，

即 A_1O 是四棱锥 A_1-BCDE 的高，

由图 1 可知，$A_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，平行四边形 $BCDE$ 面积 $S=BC\cdot AB=a^2$，

从而四棱锥 A_1-BCDE 的为

$$V=\frac{1}{3}\times S\times A_1O=\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3,$$

由 $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=36\sqrt{2}$，得 $a=6$.

【考点定位】1. 线面垂直的判定；2. 面面垂直的性质定理；3. 空间几何体的体积.

【名师点睛】1.在处理有关空间中的线面平行、线面垂直等问题时，常常借助于相关的判定定理来解题，同时注意恰当的将问题进行转化；2.求几何体的体积的方法主要有公式法、割补法、等价转化法等，本题是求四棱锥的体积，可以接使用公式法.

19.随机抽取一个年份，对西安市该年 4 月份的天气情况进行统计，结果如下：

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
天气	晴	雨	阴	阴	阴	雨	阴	晴	晴	晴	阴	晴	晴	晴	晴

日期	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
天气	晴	阴	雨	阴	阴	晴	阴	晴	晴	晴	阴	晴	晴	晴	雨

(I)在 4 月份任取一天，估计西安市在该天不下雨的概率；

(II)西安市某学校拟从 4 月份的一个晴天开始举行连续两天的运动会，估计运动会期间不下雨的概率.

【答案】(I) $\frac{13}{15}$； (II) $\frac{7}{8}$.

计概率，运动会期间不下雨的概率为 $\frac{7}{8}$.

【解析】

试题分析：(I)在容量为 30 的样本中，从表格中得，不下雨的天数是 26，以频率估计概率，4 月份任选一天，西安市不下雨的概率是 $\frac{26}{30}=\frac{13}{15}$.

(II)称相邻两个日期为"互邻日期对"（如 1 日与 2 日，2 日与 3 日等）这样在 4 月份中，前一天为晴天的互邻日期对有 16 对，其中后一天不下雨的有 14 个，所以晴天的次日不下雨的频率为 $\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$，以频率估计概率，运动会期间不下雨的概率为 $\frac{7}{8}$.

试题解析：(I)在容量为 30 的样本中，不下雨的天数是 26，以频率估计概率，4 月份任选一天，西安市不下雨的概率是$\frac{13}{15}$.

(II)称相邻两个日期为“互邻日期对”(如 1 日与 2 日，2 日与 3 日等）这样在 4 月份中，前一天为晴天的互邻日期对有 16 对，其中后一天不下雨的有 14 个，所以晴天的次日不下雨的频率为$\frac{7}{8}$，以频率估计概率，运动会期间不下雨的概率为$\frac{7}{8}$.

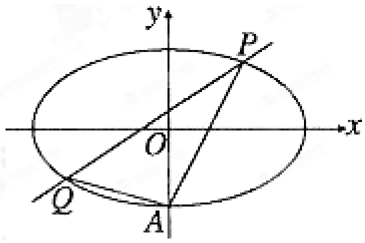
【考点定位】概率与统计.

【名师点睛】(1)利用古典概型概率公式求概率时，求试验的基本事件和事件 A 的基本事件的个数，必须利用树状图.表格.集合等形式把事件列举出来，格式要规范；（2）列举基本事件时，要注意找规律，要不重不漏.本题属于基础题，注意运算的准确性.

20．如图，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I)求椭圆 E 的方程；

(II)经过点 $(1,1)$，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P,Q（均异于点 A），证明：直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2.



【答案】(I) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$； (II)证明略，详见解析.

【解析】

试题分析：(I)由题意知$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},b=1$，由 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，继而得椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(II) 设 $P(x_1 y_1)$，$Q(x_2 y_2)$，则 $x_1x_2\neq 0$，由题设知，直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，化简得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$，则 $x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}$ ①，

$x_1x_2=\frac{2k(k-2)}{1+2k^2}$ ②，由已知 $\Delta>0$， 从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和 $k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}$

化简得 $k_{AP}+k_{AQ}=2k+(2-k)\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$，把①②式代入方程得 $k_{AP}+k_{AQ}=2$.

试题解析：(I)由题意知 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1$，综合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(II)由题设知，直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得

$$(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0,$$

由已知 $\Delta>0$，设 $P(x_1y_1)$, $Q(x_2y_2)$， $x_1x_2\neq 0$

则 $x_1+x_2=\dfrac{4k(k-1)}{1+2k^2}$, $x_1x_2=\dfrac{2k(k-2)}{1+2k^2}$，

从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{kx_1+2-k}{x_1}+\frac{kx_2+2-k}{x_1}$$

$$=2k+(2-k)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$=2k+(2-k)\frac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-(2k-1)=2.$$

【考点定位】1. 椭圆的标准方程；2. 圆锥曲线的定值问题.

【名师点睛】定值问题的处理常见的方法：（1）通过考查极端位置，探索出“定值”是多少，然后再进行一般性的证明或计算，即将该问题涉及的几何式转化为代数式或三角形形式，证明该式是恒定的，如果以客观题形式出现，特殊方法往往比较快速奏效；（2）进行一般计算推理求出其结果.

21.设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1, n\in N, n\geq 2.$

(I)求 $f_n'(2)$；

(II)证明：$f_n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 内有且仅有一个零点（记为 a_n），且 $0<a_n-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

【答案】(I) $f_n'(2)=(n-1)2^n+1$ ；(II)证明略，详见解析.

【解析】学科网

试题分析：(I)由题设 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}$，所以 $f_n'(2)=1+2\times2+\cdots+n2^{n-1}$，此式等价于数列 $\{n\cdot2^{n-1}\}$ 的前 n 项和，由错位相减法求得 $f_n'(2)=(n-1)2^n+1$；

(II)因为 $f(0)=-1<0$，$f_n(\frac{2}{3})=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\ge1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2>0$，所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内至少存在一个零点，又 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$，所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内单调递增，因此，$f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内有且只有一个零点 a_n，由于 $f_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}-1$，所以 $0=f_n(a_n)=\frac{1-a_n^n}{1-a_n}-1$，由此可得 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n^{n+1}>\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}<a_n<\frac{2}{3}$，继而得 $0<a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_n^{n+1}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

试题解析：(I)由题设 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}$，

所以 $f_n'(2)=1+2\times2+\cdots+n2^{n-1}$　　　　①

由　$2f_n'(2)=1\times2+2\times2^2+\cdots+n2^n$　　　　②

①－②得 $-f_n'(2)=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n2^n$

$$=\frac{1-2^2}{1-2}-n\cdot2^n=(1-n)2^n-1,$$

所以　$f_n'(2)=(n-1)2^n+1$

(II)因为 $f(0)=-1<0$

$$f_n(\frac{2}{3})=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{3}}-1=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\ge1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2>0,$$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内至少存在一个零点，

又 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内单调递增，

因此，$f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内有且只有一个零点 a_n，

由于 $f_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}-1$，

所以 $0=f_n(a_n)=\dfrac{1-a_n^{\ n}}{1-a_n}-1$

由此可得 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n^{\ n+1}>\frac{1}{2}$

故 $\frac{1}{2}<a_n<\frac{2}{3}$

所以 $0<a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_n^{\ n+1}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

【考点定位】1. 错位相减法；2. 零点存在性定理；3. 函数与数列.

【名师点睛】（1）在函数出现多项求和形式，可以类比数列求和的方法进行求和；（2）证明零点的唯一可以从两点出发：先使用零点存在性定理证明零点的存在性，再利用函数的单调性证明零点的唯一性；（2）有关函数中的不等式证明，一般是先构造函数，再求出函数在定义域范围内的值域即可；（4）本题属于中档题，要求有较高逻辑思维能力和计算能力.

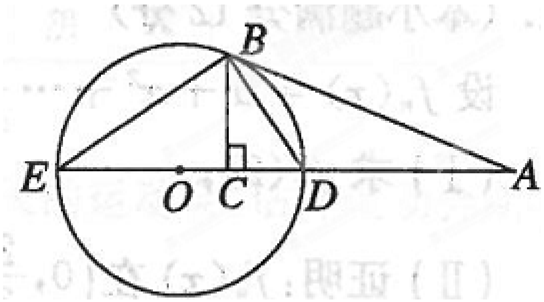
考生注意：请在 22.23.24 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分，作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题是以后的方框涂黑.

22. 选修 4-1：几何证明选讲

如图，AB 切 $\odot O$ 于点 B，直线 AO 交 $\odot O$ 于 D,E 两点，$BC\perp DE$，垂足为 C.

(I)证明：$\angle CBD=\angle DBA$

(II)若 $AD=3DC,BC=\sqrt{2}$，求 $\odot O$ 的直径.



【答案】(I)证明略，详见解析；(II) 3.

【解析】

试题分析：: (I) 因为 DE 是 $\odot O$ 的直径，则 $\angle BED+\angle EDB=90^\circ$，又 $BC\perp DE$，所以 $\angle CBD+\angle EDB=90^\circ$，又 AB 切 $\odot O$ 于点 B，得 $\angle DBA=\angle BED$，所以 $\angle CBD=\angle DBA$；

(II)由(I)知 BD 平分 $\angle CBA$，则 $\frac{BA}{BC}=\frac{AD}{CD}=3$，又 $BC=\sqrt{2}$，从而 $AB=3\sqrt{2}$，由 $AB^2=BC^2+AC^2$，解得 $AC=4$，所以 $AD=3$，由切割线定理得 $AB^2=AD\cdot AE$，解得 $AE=6$，故 $DE=AE-AD=3$，即 $\odot O$ 的直径为 3.

试题解析：(I)因为 DE 是 $\odot O$ 的直径，

则 $\angle BED+\angle EDB=90^\circ$

又 $BC\perp DE$，所以 $\angle CBD+\angle EDB=90^\circ$

又 AB 切 $\odot O$ 于点 B，

得 $\angle DBA=\angle BED$

所以 $\angle CBD=\angle DBA$

(II)由(I)知 BD 平分 $\angle CBA$，

则 $\frac{BA}{BC}=\frac{AD}{CD}=3$，

又 $BC=\sqrt{2}$，从而 $AB=3\sqrt{2}$，

所以 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4$

所以 $AD=3$，

由切割线定理得 $AB^2 = AD \cdot AE$

即 $AE = \dfrac{AB^2}{AD} = 6$，

故 $DE = AE - AD = 3$，

即⊙O 的直径为 3.

【考点定位】1. 几何证明；2. 切割线定理.

【名师点睛】（1）近几年高考对本部分的考查主要是围绕圆的性质考查考生的推理能力、逻辑思维能力，试题多是运用定理证明结论，因而圆的性质灵活运用是解题的关键；（2）在几何题目中出现求长度的问题，通常会使用到相似三角形.全等三角形.切割线定理等基础知识；（3）本题属于基础题，要求有较高分析推理能力.

23.选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标版权法 xOy 吕，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，⊙C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{3}\sin\theta$.

(I)写出⊙C 的直角坐标方程；

(II) P 为直线 l 上一动点，当 P 到圆心 C 的距离最小时，求点 P 的坐标.

【答案】(I) $x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 3$； (II) $(3,0)$.

【解析】

试题分析：(I)由 $\rho = 2\sqrt{3}\sin\theta$，得 $\rho^2 = 2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，从而有 $x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}y$，所以 $x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 3$

(II)设 $P\left(3 + \dfrac{1}{2}t, \dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$，又 $C(0,\sqrt{3})$，则 $|PC| = \sqrt{\left(3 + \dfrac{1}{2}t\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{t^2 + 12}$，故当 $t = 0$ 时，$|PC|$ 取得最小值，此时 P 点的坐标为 $(3,0)$.

试题解析：(I)由 $\rho = 2\sqrt{3}\sin\theta$，

得 $\rho^2 = 2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，

从而有 $x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}y$

所以$x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$

(II)设$P\left(3+\frac{1}{2}t,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$，又$C(0,\sqrt{3})$，

则$|PC|=\sqrt{\left(3+\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{t^2+12}$，

故当$t=0$时，$|PC|$取得最小值，

此时P点的坐标为$(3,0)$.

【考点定位】1. 极坐标系与参数方程；2.点与圆的位置关系.

【名师点睛】本题考查极坐标系与参数方程，解决此类问题的关键是如何正确地把极坐标方程或参数方程转化平面直角坐标系方程，并把几何问题代数化.本题属于基础题，注意运算的准确性.

24. 选修 4-5：不等式选讲

已知关于x的不等式$|x+a|<b$的解集为$\{x\,|\,2<x<4\}$

(I)求实数a,b的值；

(II)求$\sqrt{at+12}+\sqrt{bt}$的最大值.

【答案】(I) $a=-3,b=1$；(II) 4.

【解析】

试题分析：(I)由$|x+a|<b$，得$-b-a<x<b-a$，由题意得$\begin{cases}-b-a=2\\ b-a=4\end{cases}$，解得$a=-3,b=1$；

(II)柯西不等式得$\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\sqrt{4-t}+\sqrt{t}\le\sqrt{[(\sqrt{3})^2+1^2][(\sqrt{4-t})^2+(\sqrt{t})^2}$

$=2\sqrt{4-t+t}=4$，当且仅当$\frac{\sqrt{4-t}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{t}}{1}$即$t=1$时等号成立，故$\left(\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}\right)_{max}=4$.

试题解析：(I)由$|x+a|<b$，得$-b-a<x<b-a$学科网

则$\begin{cases}-b-a=2\\ b-a=4\end{cases}$，解得$a=-3,b=1$.

(II) $\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\sqrt{4-t}+\sqrt{t}\le\sqrt{[(\sqrt{3})^2+1^2][(\sqrt{4-t})^2+(\sqrt{t})^2}$

$=2\sqrt{4-t+t}=4$

当且仅当$\frac{\sqrt{4-t}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{t}}{1}$即$t=1$时等号成立，

故$\left(\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}\right)_{\max}=4$

【考点定位】1. 绝对值不等式和方程；2. 柯西不等式.

【名师点睛】（1）零点分段法解绝对值不等式的步骤：①求零点；②划区间.去绝对值号；③分别解去掉绝对值的不等式；④取每个结果的并集，注意在分段时不要遗漏区间的端点值；（2）要注意区别不等式与方程区别；（3）用柯西不等式证明或求值事要注意两点：一是所给不等式的形式是否和柯西不等式的形式一致，若不一致，需要将所给式子变形；二是注意等号成立的条件.